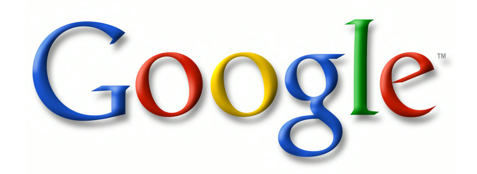
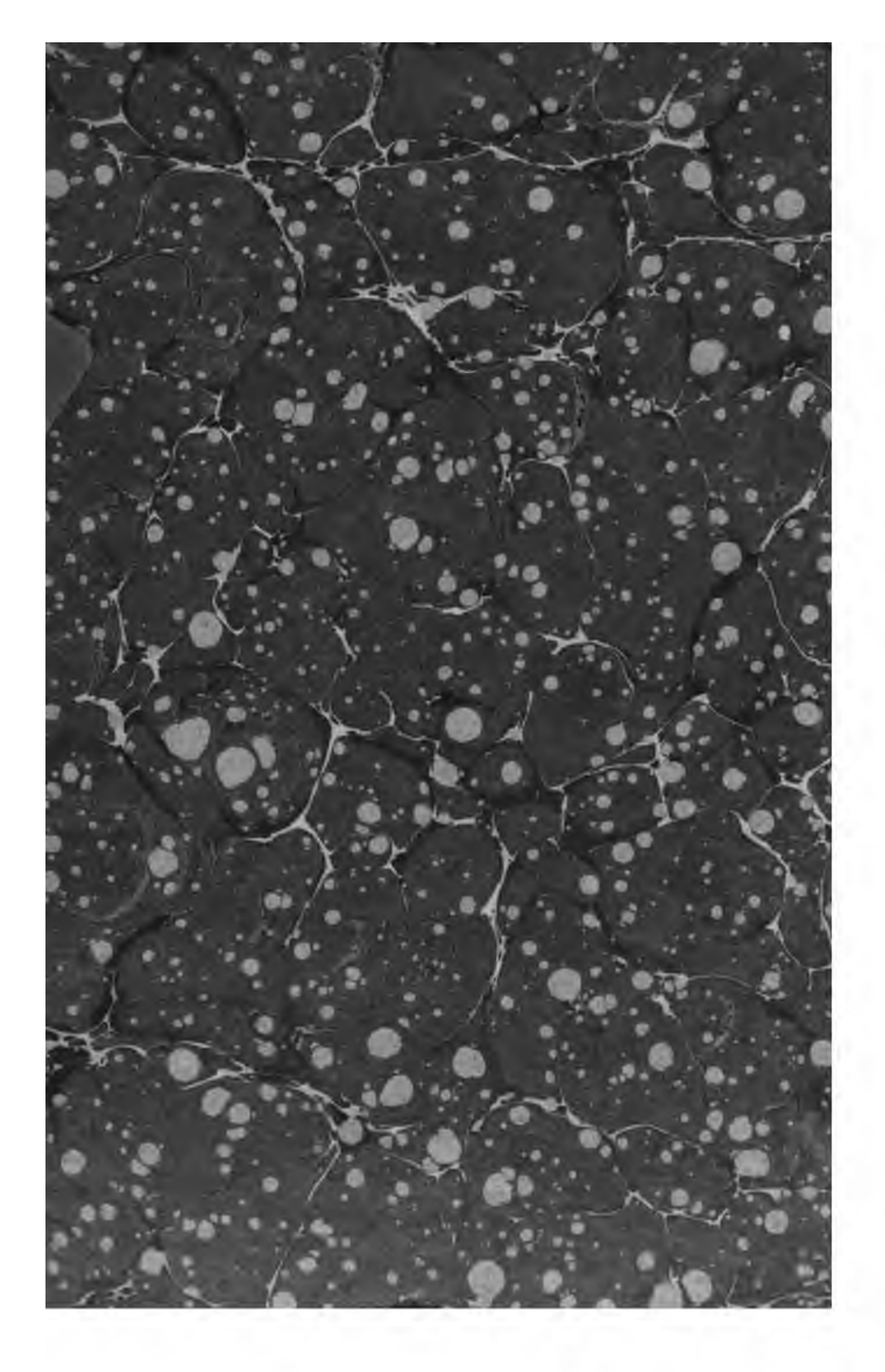
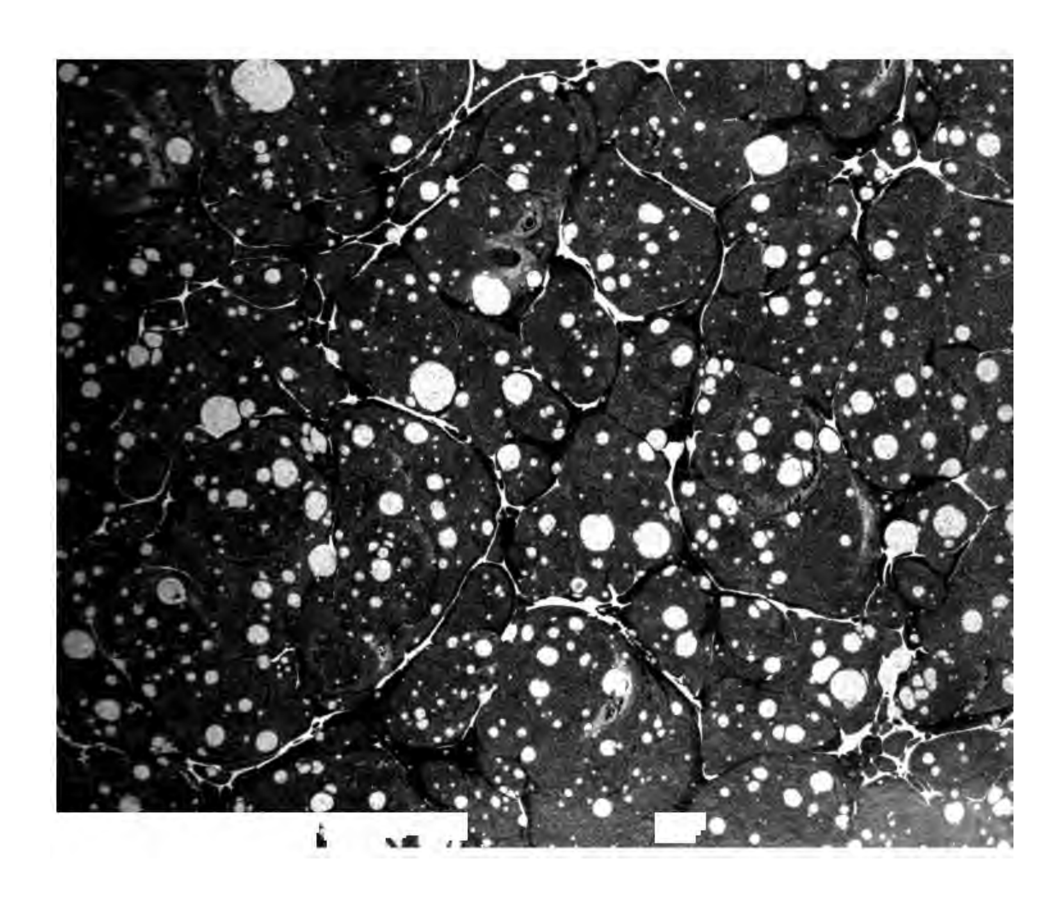
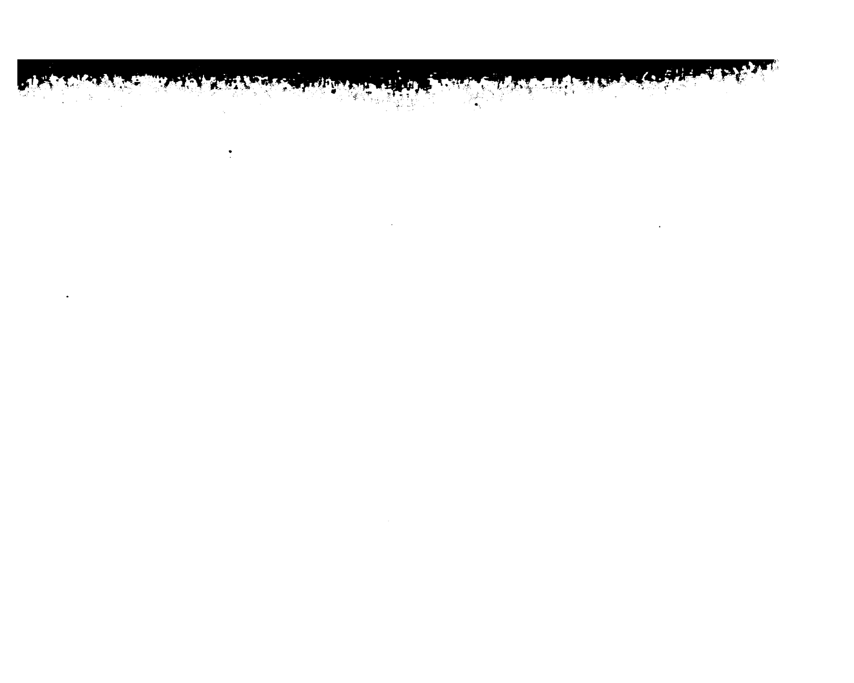








5. № 11.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 18. HEFT 1.

DER GANZEN REIHE 323. BANDES 1. HEFT.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT DREI TAFELN.



LEIPZIG, 1905.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
ROSSPLATZ 17.

Inhalt.

		Seite
1.	G. Quincke. Über Eisbildung und Gletscherkorn. (Hierzu Taf. I.)	1
2.	Boris Weinberg. Über die innere Reibung des Eises	81
3.	A. Kalähne. Elektrische Schwingungen in ringförmigen Metallröhren. (Theoretisch.)	92
4.	E. Warburg. Über die Wirkung der Bestrahlung, den Einfluß der Temperatur und das Verhalten der Halogene bei der Spitzenentladung; nach Versuchen von F. R. Gorton mitgeteilt	128
5.	Karl Hahn. Die ladende Wirkung der Röntgenstrahlen	140
6.	R. Gans. Zur Elektrodynamik in bewegten Medien. Zweite Mitteilung	172
7.	S. Valentiner und R. Schmidt. Über eine neue Methode der Darstellung von Neon, Krypton und Xenon	187
8.	F. Streintz und O. Strohschneider. Versuche über Metallstrahlung. (Hierzu Taf. II u. III.)	198
9.	W. H. Julius. Bemerkungen über erschütterungsfreie Aufstellung	206
10.	J. v. Panayeff. Über die Beziehung des Schmelzpunktes zur Wärmeausdehnung der Metalle	210

Manuskripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude,** zu senden. Seine Adresse ist **Berlin N.W. 7.** Neue Wilhelmstr. 16.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

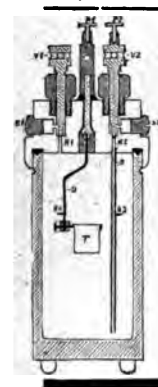
Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.



Emil Gundelach,
Gehlberg in Thüringen.
Hohlglashütte
und Glasinstrumentenfabrik.
Glasinstrumente und Geräte
für wissenschaftlichen und technischen Gebrauch
Weltausstellung St. Louis 1904
höchste Auszeichnung: Grand Prix
Gegründet 1852
G











ARTHUR PFEIFFER,

Wetzlar O.

[W]erkstätten für Präzisionsmechanik und -Optik.

— Gegründet 1890. —

Alleinvertrieb und Alleinberechtigung zur Fabrikation der

[P]atent-Geryk-Öl-Luftpumpen

in Deutschland.



Komplette Pumpeinrichtung für Hand- und Motorbetrieb ($^1/_8$ P.S.).

Durch Patente und Gebrauchsmuster geschützt.

Jederzeit, ohne Vorbereitung, zum Gebrauch fertig.

Die Geryk-Pumpe ist die denkbar **einfachste** und **betriebs[s]ichersite** Konstruktion aller Flüssigkeitspumpen und giebt **nach [J]ahren** noch die **unverminderte** Leistung, wie sie von keiner ähn[li]chen Konstruktion erreicht wird.

[M]AX KOHL, Chemnitz i. S.



Arbeits-(Praktikanten-)Tische

in allen möglichen Ausführungen,

ganz den jeweiligen örtlichen Verhältnissen angepaßt.



[Ex]perimentier-Schalttafeln

[An]stalten und Laboratorien, als Wandtableau und in **[...]arer Tische ausgeführt,** gestatten die Verwendung [de]s **städtischer Centralen** bis 110, 160, 220 Volt und [...] **Amp.** Für alle im Experimentalunterricht vorkommende Arbeiten: Die Schalttafeln sind für kleine und große Stromstärken bei beliebigen Spannungen von 0,3 bis 110 resp. 220 Volt zu verwenden. Höhere Spannungen als die eingestellt, treten auch bei Stromunterbrechung nicht auf. – Es ist damit also einem wirklichen, lang gefühlten Bedürfnis abgeholfen.

Ia. Referenzen. ***Man verlange Spezial-Prospekt!***



D. D. Thermoskope nach Kolbe

in neuester, verbesserter Ausführung.

Neu! Öl-Luftpumpen Neu!

mit Teleskopkolben, System Kohl, D.R.P.

Die Pumpe verdünnt bis auf 0,0006 mm und ***verspritzt während des Pumpens kein Öl! Sie eignet sich vorzüglich zum Auspumpen von Röntgen-Röhren.***

Man verlange Spezial-Prospekt!

Neu! Spinthariskope Neu!

mit Phosphorescenzschirm und einer kleinen Menge Radiumbromid [...] Zeit [...] außerordentlichen [...] Radiums [...]

Preis M. 12 – [...] 28 –.

Radiumbromid

von überraschender Wirkung; chemisch rein.

Preis auf Anfrage.

Weltausstellung Lüttich 1905: 2 Grands Prix!

[Welteaus]stellung St. Louis 1904: Grand Prix und Gold. Medaille.

[...]n der Sonderausstellung des Kgl. Preuss. Unterrichtsministeriums [...] der Regierung ausgestellte Einrichtung eines physikal[ischen ...] deutschen Unterrichtsausstellung, Abteilung [...]

[Ehrend]iplom der Ausstellung der Versammlung deutscher Naturforscher [...] 1898.

Goldene Medaillen Leipzig 1897. Weltausstellung Paris [...]

[M]it ausführlichen *Kostenanschlägen, Beschreibungen, [...] franko.*

Anzeigen [illegible] Leipzig [illegible] 9.

[illegible] R. [illegible]

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 18.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 18.

DER GANZEN REIHE 323. BAND.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
UND INSBESONDERE VON
M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT ACHT FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1905.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Inhalt.

Vierte Folge. Band 18.

Elftes Heft.

		Seite
1.	G. Quincke. Über Eisbildung und Gletscherkorn. (Hierzu Taf. I.)	1
2.	Boris Weinberg. Über die innere Reibung des Eises	81
3.	A. Kalähne. Elektrische Schwingungen in ringförmigen Metallröhren. (Theoretisch)	92
4.	E. Warburg. Über die Wirkung der Bestrahlung, den Einfluß der Temperatur und das Verhalten der Halogene bei der Spitzenentladung; nach Versuchen von F. R. Gorton mitgeteilt	128
5.	Karl Hahn. Die ladende Wirkung der Röntgenstrahlen	140
6.	R. Gans. Zur Elektrodynamik in bewegten Medien. Zweite Mitteilung	172
7.	S. Valentiner und R. Schmidt. Über eine neue Methode der Darstellung von Neon, Krypton und Xenon	187
8.	F. Streintz und O. Strohschneider. Versuche über Metallstrahlung. (Hierzu Taf. II u. III, Figg. 1—11.)	198
9.	W. H. Julius. Bemerkungen über erschütterungsfreie Aufstellung	206
10.	J. v. Panayeff. Über die Beziehung des Schmelzpunktes zur Wärmeausdehnung der Metalle	210

Ausgegeben am 12. Oktober 1905.

Zwölftes Heft.

1.	J. Stark, T. Retschinsky und A. Schaposchnikoff. Untersuchungen über den Lichtbogen	213
2.	Balthasar Hartmann. Untersuchung über die Leistungsfähigkeit der Assmannschen Methode zur experimentellen Bestimmung des Verhältnisses $c_p/c_v = \varkappa$ der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen von Gasen	252

Seite
3. A. Denizot. Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucaultschen Pendelversuches 299
4. Peter Nell. Studien über Diffusionsvorgänge wässeriger Lösungen in Gelatine 323
5. J. S. Sachs. Untersuchungen über den Einfluß der Erde bei der drahtlosen Telegraphie 348
6. E. Aschkinass. Elektrische Leitungsfähigkeit und Reflexionsvermögen der Kohle 373
7. A. L. Holz. Über Flüssigkeitsbewegungen, welche durch Rotation fester Körper verursacht werden 387
8. R. H. Weber. Permeabilitätsmessung an Stahlkugeln . . . 395
9. B. Walter u. R. Pohl. Das Eigenlicht des Radiumbromids 406
10. G. E. Leithäuser. Bemerkung zu der Arbeit des Herrn Becker: „Messungen an Kathodenstrahlen" 410

Ausgegeben am 7. November 1905.

Dreizehntes Heft.

1. R. Malmström. Versuch einer Theorie der elektrolytischen Dissoziation unter Berücksichtigung der elektrischen Energie . 413
2. A. Kalähne. Über die Strahlung des Chininsulfates . . . 450
3. W. Matthies. Über die Glimmentladung in den Halogenen Chlor, Brom, Jod 473
4. W. v. Ignatowsky. Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht 495
5. M. Laue. Die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien 523
6. Martin Gildemeister und Hans Strehl. Über den Geschwindigkeits- und Energieverlust von Geschossen in Wasser 567
7. Georg Wulff. Zur Geometrie der Doppelbrechung 579
8. W. Betz. Eine Methode zur Bestimmung der Dicke der optischen Konstanten durchsichtiger Metallschichten 590
9. W. Voege. Ein Beitrag zur Kenntnis der Funkenentladung in Gasen. (Hierzu Taf. IV.) 606
10. K. Prytz. Poröse Körper als Durchwege für Gase. Poröser Kontakt 617
11. August Schmauss. Über den Vorgang der Abscheidung eines Kolloides im elektrischen Strome 628
12. F. Hack. Das elektromagnetische Feld in der Umgebung eines gedämpft schwingenden linearen Oszillators 634
13. A. Einstein. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? 639
14. Arthur Boltzmann. Bemerkungen zu Hrn. S. Valentiners Abhandlung: „Über den maximalen Wirkungsgrad umkehrbarer Kreisprozesse" 642

Ausgegeben am 21. November 1905.

Vierzehntes Heft.

Seite

1. W. Voigt. Theoretisches und Experimentelles zur Aufklärung des optischen Verhaltens aktiver Kristalle 645
2. Chr. Jensen und H. Sieveking. Die Verwendung von Mikrophonkontakten für telegraphische Relais und zum Nachweis schwacher Ströme 695
3. H. Rubens. Über das Emissionsspektrum des Auerbrenners. (Hierzu Taf. V u. VI.) 725
4. L. Holborn und F. Henning. Über die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes 739
5. M. Toepler. Beobachtungen im Grenzgebiete zwischen Spitzenstrom und Büschellichtbogen (Glimmstrom) 757
6. A. Wörmann. Die Neutralisationswärme starker Säuren und Basen und ihre Änderung mit Temperatur und Konzentration 775
7. O. Lehmann. Näherungsweise Bestimmung der Doppelbrechung fester und flüssiger Kristalle 796
8. O. Lehmann. Drehung der Polarisationsebene und der Absorptionsrichtung bei flüssigen Kristallen 808
9. Franz Weidert. Über den Einfluß der Belichtung auf die thermoelektrische Kraft des Selens 811
10. P. Lohberg. Selbstgegenfritter (Autoantikohärer) 850
11. G. Tammann. Über das Haften von heißem Holzkohlepulver an kalten Körpern 856
12. B. Walter. Über einen neuen Kitt für physikalische Apparate 860
13. B. Walter. Über das Nachleuchten der Luft bei Blitzschlägen. (Hierzu Taf. VII, Figg. 1 u. 2.) 863
14. Carl Forch. Berichtigung zu der Arbeit: Die Oberflächenspannung von anorganischen Salzlösungen 867
15. C. L. Weber. Zu der Mitteilung von v. Panayeff: Über die Beziehung des Schmelzpunktes zur Wärmeausdehnung der Metalle 868

Ausgegeben am 12. Dezember 1905.

Fünfzehntes Heft.

1. G. C. Schmidt. Über Polarisationserscheinungen in Vakuumröhren 869
2. Gerhard Glage. F. E. Neumanns Methode zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit gut leitender Körper in Stab- und Ringform und ihre Durchführung an Eisen, Stahl, Kupfer, Silber, Blei, Zinn, Zink, Messing, Neusilber 904
3. Allvar Gullstrand. Über Astigmatismus, Koma und Aberration. (Hierzu Taf. VIII.) 941
4. Gottlieb Kučera. Über die von den sekundären β- und γ-Strahlen des Radiums in verschiedenen Gasen hervorgebrachte Ionisation 974

Seite
5. W. Wien. Über die Energie der Kathodenstrahlen im Verhältnis zur Energie der Röntgen- und Sekundärstrahlen . . 991
6. Max Reinganum. Über Energie und spezifische Wärme in der Nähe der kritischen Temperatur 1008
7. H. Greinacher. Über eine an dünnen halbleitenden Schichten beobachtete Erscheinung 1020
8. Johannes Friedel. Experimentelle Untersuchungen über lamellare Doppelbrechung 1031
9. Max Wien. Über Telephonplatten mit hohen Eigentönen . 1049
10. W. Holtz. Die wahre Bedeutung der Flügel am Reibzeug der Elektrisiermaschine und ihr Ersatz 1054
11. W. Holtz. Die Trichterventilröhre beim Wechsel von Druck und Funkenart 1057
12. Richard Thöldte. Die Bestimmung der galvanischen Polarisation während des Schlusses des Stromes 1061
13. M. P. Rudzki. Bemerkung zur Abhandlung von Hrn. A. Denizot unter dem Titel: „Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucaultschen Pendelversuches“ 1070
14. E. Gehrcke. Über eine Interferenzerscheinung am Stufengitter. (Hierzu Taf. VIII, Figg. 2 u. 3.) 1074
15. Max Wien. Bemerkung zu der Abhandlung von Hrn. E. Madelung: „Über Magnetisierung durch schnell verlaufende Ströme und die Wirkungsweise des Rutherford-Marconischen Magnetdetektors“ 1077
16. W. v. Ignatowsky. Berichtigung zu der Arbeit: „Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht“ 1078

Namenregister zum Jahrgang 1905 1079

Ausgegeben am 28. Dezember 1905.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I. Quincke.
„ II u. III. Streintz und Strohschneider.
„ IV. Voege.
„ V u. VI. Rubens.
„ VII. Walter, Figg. 1 u. 2.
„ VIII. Allvar Gullstrand.
„ VIII. Gehrcke, Figg. 2 u. 3.

1905. № 11.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 18.

1. *Über Eisbildung und Gletscherkorn;*
von G. Quincke.

(Hierzu Taf. I, Figg. 224, *a*, *b*; 225, *a*, *b*, *c*; 226, *a*, *b*.)

§ 170. *Oberflächenspannung an der Grenze von Wasser- und wässeriger Salzlösung.* Das Eis der Seen und der Gletscher besteht aus erstarrten Schaummassen, deren ölartige Schaumwände aus sehr verdünnter Salzlösung bei etwas höherer Temperatur als 0° eine Oberflächenspannung an der Grenze mit dem reinen Wasser im Innern der Schaumkammern hatten.[1]) Bei der Abkühlung sind diese ölartigen Schaumwände später als der Inhalt der Schaumkammern gefroren. Bei dem Wiederauftauen schmelzen die salzhaltigen Schaumwände eher, als das reine Eis im Innern der Schaumkammern.

Alle Erscheinungen, welche man am Eise bei der sogenannten Regelation, den Tyndallschen Eisblumen, der Bildung des Gletscherkorns, der Plastizität und dem Fließen des Gletschereises oder dem Auftauen durch Belichten beobachtet, bestätigen diese Auffassung.

Ich werde im folgenden, wie früher, solche Flüssigkeiten ölartig nennen, deren Grenzfläche mit der umgebenden Flüssigkeit möglichst klein werden will, oder eine Oberflächenspannung zeigt.

Durch langsames Frieren und Wiederauftauen läßt sich die periodische Bildung ölartiger Lamellen, Schaumwände und Blasen und deren Gestalt im Eise ebenso verfolgen, wie bei dem Eintrocknen von Kolloidlösungen in dünnen Schichten auf Quecksilber oder Glas, oder bei dem Kristallisieren von Salzen aus wässerigen Salzlösungen bei Einwirkung von Alkohol.

§ 171. *Periodische Bildung von Salzlösung beim Gefrieren des Wassers mit schwachem Salzgehalt. Regelation. Tyndallsche*

1) G. Quincke, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 5. p. 103. 1903; Ann. d. Phys. 9. p. 43. 1902.

Eisblumen und Tannenbäume. Nach Faraday[1]) bilden wässerige Lösungen von Farbstoffen, Salzen, Säureu und Alkalien beim Abkühlen reines farbloses Eis, frei von Salzen, Säuren oder Alkalien.

Rüdorff[2]) fand, daß aus einer Salzlösung reines Eis gefriert, daß der geringe Salzgehalt desselben nur von eingeschlossener Mutterlauge herrührt und daß der Gefrierpunkt einer Salzlösung proportional mit dem Salzgehalt sinkt.

Die Versuche von F. Kohlrausch[3]) über das elektrische Leitungsvermögen des geschmolzenen Eises bestätigen dies ebenfalls.

Manche konzentrierte Salzlösungen werden bei niedriger Temperatur von ölartiger Beschaffenheit und diese lassen sich, selbst wenn ein Stückchen Eis in ihnen schwimmt, unter ihren Gefrierpunkt abkühlen, während sich fortwährend Eisflocken aus demselben ausscheiden. Hat die Bildung dieser aber bis zu einem gewissen Grade zugenommen, so steigt die Temperatur plötzlich.[4])

Zwei Eisstücke von 0° unter Wasser ohne Druck oder mit sehr geringem Druck in Berührung gebracht, frieren nach Faraday[5]) zusammen. Trockene Eisstücke, oder so kalte Eisstücke, daß sie überall in starrem Zustande sind, frieren nicht zusammen. Das Zusammenfrieren der feuchten Eisstücke bei 0° nennt man *Regelation.* Eisstücke in warmem Wasser aneinander gehalten, frieren nach Tyndall[6]) ebenfalls zusammen.

Faraday[7]) schildert die Eisbildung im Wasser, das in einem See allmählich friert, folgendermaßen. Die Wasseroberfläche ist mit Luft in Berührung, welche beträchtlich

---

1) M. Faraday, Experimental Researches in Chemistry and Physics. p. 82 u. 373. 1859.

2) F. Rüdorff, Pogg. Ann. **114.** p. 66. 1861; **145.** p. 600. 1872. Berl. Monatsb. 1862. p. 163.

3) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **53.** p. 212. 1894.

4) F. Rüdorff, Pogg. Ann. **140.** p. 424. 1870.

5) M. Faraday, Proc. Roy. Soc. **10.** p. 430. 1860; Pogg. Ann. **111.** p. 649. 1860.

6) J. Tyndall, Heat considered as a mode of motion p. 191. London 8°. 1865.

7) M. Faraday, Experim. Res. **4.** p. 374; Phil. Transact. 1858. p. 228.

unter 0° abgekühlt ist. Dann liegen horizontale Schichten von 0, 1, 2—4° übereinander, mit nach unten zunehmender Dichtigkeit. Nimmt die Temperatur allmählich weiter ab, so friert das reine Wasser von oben nach unten, und die Schichten werden dadurch nicht verschoben.

Enthält das Wasser Spuren einer Salzlösung, so wird das Salz unter der zuerst gebildeten Decke von reinem Eis in einer horizontalen Schicht ausgeschieden, als Salzlösung von größerer Dichtigkeit mit dem Bestreben in der wärmeren tiefer gelegenen Schicht unterzusinken. Bei weiterer Abkühlung durch das darüber gelegene Eis wird diese Salzlösung, unter 0° abgekühlt, ebenfalls gefrieren und sich beim Gefrieren ausdehnen, wie reines Wasser. Die salzhaltigere Wasserschicht unmittelbar unter der Eisdecke wird nicht in die darunter gelegene weniger salzhaltige Wasserschicht untersinken, sobald die vom Salzgehalt herrührende Dichtigkeitszunahme kleiner ist, als die von der Temperaturabnahme bedingte Dichtigkeitsabnahme. Die Schichten mit frierendem Eis und die Schicht von 4° werden mehr aneinander rücken und der Abstand dieser Schichten wird kleiner werden, aber die Wasserteilchen werden ihre respektive Lage behalten.

Der Prozeß des Frierens geht nach Faraday auch nicht kontinuierlich vor sich, sondern in intermittierenden Pulsationen (oder periodisch, wie beim Eintrocknen kolloidaler Lösungen. Q.). Sobald sich eine Eisschicht gebildet hat, wird der Prozeß des Frierens stocken, bis die beim Erstarren entwickelte Wärme nach oben abgeleitet ist. Es kann sich eine schwache Salzlösung über einer darunter gefrorenen Eisschicht bilden, welche die Zwischenräume zwischen den festen Eisschichten füllt und bei weiterem Abkühlen auch erstarrt. So entstehen salzhaltige Eisschichten, die bei niedrigerer Temperatur schmelzen, als das darüber und darunter gelagerte reine Eis.

Beim Wiederauftauen durch Bestrahlung mit Sonnenlicht oder elektrischem Licht bilden diese salzhaltigen Wasserschichten die von Tyndall[1]) am norwegischen Seeeis beschriebenen Tannenbäume und Eisblumen, Sterne mit sechs

---

1) J. Tyndall, Phil. Trans. 1858. p. 213; Heat London 1865. p. 111. Fig. 33.

Blumenblättern und einer runden Blase, einem luftleeren Raum in der Mitte. Diese um eine Luftblase angeordneten Blumenblätter im Innern des Gletschereises hat schon Agassiz[1]) beobachtet und als eine Erscheinung der Diathermansie gedeutet. Die Diathermansie des Eises hat Moseley[2]) nachgewiesen durch Entzündung eines Streichholzes im Brennpunkt einer Eislinse, auf welche Sonnenstrahlen fielen. Klocke[3]) und Hagenbach[4]) beobachteten als Schmelzungsfiguren auch kreisrunde parallel gestellte Wasserscheibchen in Gletscherkörnern.

Schon Faraday hat darauf aufmerksam gemacht, daß sehr geringe Mengen Salz, die durch chemische Analyse oder auf andere Weise nicht nachzuweisen sind, diese Erscheinungen hervorrufen können.

Die Formen der Tyndallschen Eisblumen beweisen die Oberflächenspannung an der Grenze von den dünnen unsichtbaren Schichten Salzlösung und dem umgebenden reinen Wasser.

Die Formen der Tyndallschen Sterne oder Tannenbäume mit Astwinkeln von 120° oder 90° entsprechen ganz den Formen der Kristallskelette oder Tannenbäume, welche man beim Kristallisieren wässeriger Salzlösungen beobachtet, und deren Bildung von mir[5]) durch die Oberflächenspannung an der Grenze von ölartiger wasserarmer Salzlösung A und wasserreicher Salzlösung B erklärt worden ist, je nachdem sich die neuen noch flüssigen Ölwände der Seitenäste oder Tannennadeln an alte noch flüssige, oder an alte schon erstarrte Wände angesetzt haben.

Die Faradaysche Erklärung der Eisblumen durch periodisch abgeschiedene wässerige Salzlösung entspricht meiner Erklärung der Bildung von Kugeln, Blasen und Sphärokristallen (Stärkekörnern) in Kolloidlösungen, welche in dünnen Schichten auf Glas oder Quecksilber eintrocknen, durch periodische Abscheidung von ölartiger wasserarmer Kolloidlösung A

---

1) L. Agassiz, Ann. d. chim. (3) **6.** p. 473. 1842.

2) H. Moseley, Phil. Mag. (4) **39.** p. 8. 1870.

3) F. Klocke, N. Jahrb. f. Min. **1.** p. 25. 1881.

4) E. Hagenbach, Rapports du Congrès international de physique **3.** p. 411. Paris 1900.

5) G. Quincke, § 58 u. 60. Nr. 12; Ann. d. Phys. **9.** p. 31 u. 42. 1902.

mit Oberflächenspannung an der Grenze mit wasserreicherer Kolloidlösung *B*.

Kieselsäurekörner und Sphärokristalle in flachen Tropfen von Kieselsäurelösung etc., welche auf Quecksilber eintrocknet[1]), entstehen bei kontinuierlichem Verdampfen des Wassers ebenso in kurzen Zwischenräumen oder periodisch, wie die Tyndallschen Eisblumen im gefrierenden Seeeis, welche bei kontinuierlich von oben nach unten fortschreitender Abkühlung durch periodische Abscheidung von Salzlösung entstanden sind und beim Auftauen früher schmelzen als das sie umgebende reine Eis. Beide zeigen ähnliche Formen, die bei beiden durch die Oberflächenspannung der periodisch abgeschiedenen ölartigen Flüssigkeit bestimmt werden. Die Sphärokristalle werden deutlicher sichtbar zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen als doppeltbrechende Massen[1]) in einfach brechender Umgebung. Die Tyndallschen Eisblumen werden sichtbar beim Schmelzen der Salzlösung unter dem Einfluß der Sonnenstrahlen als einfach brechende Flüssigkeit im Innern der doppeltbrechenden noch festen Eismassen.

Je weniger ölartige alkalihaltige Kieselsäurelösung oder ölartige Salzlösung vorhanden ist, um so weniger Schaumwände aus ölartiger Flüssigkeit werden gebildet, um so größer sind die Schaumkammern der Sphärokristalle oder der sternförmigen Eisblumen der Kieselsäurekörner oder des Gletschereises, dessen Gletscherkörner den Schaumkammern erstarrter Kolloide entsprechen.

Der Schmelzpunkt des Wassers wird nach Schultz-Sellack[2]) durch Auflösung von Luft in ähnlicher Weise erniedrigt, wie durch Auflösen von Salzen. Es scheidet sich also bei langsamem Gefrieren von luft- und salzhaltigem Brunnenwasser nicht bloß Salzlösung, sondern auch Luft periodisch ab. Die Luft scheidet sich zuerst, wie gewöhnlich, an der Grenze der heterogenen Flüssigkeiten aus, hier also an der Grenze von wasserarmer Salzlösung *A* und wasserreicher Salzlösung *B* oder reinem Wasser, und steigt dann in

1) G. Quincke, Ann. d. Phys. **9.** p. 824. Fig. 96, 97, 98. 1902; **13.** p. 226. Fig. 186. 1904.

2) C. Schultz-Sellack, Pogg. Ann. **137.** p. 254. 1869.

dem frierenden Wasser in kurzen Zwischenräumen als Blasen in die Höhe.

A. Künstliches Eis.

§ 172. *Künstliches Eis aus Brunnenwasser und destilliertem Wasser. Schaumwände und Forelsche Streifen. Brunnenwasser* wurde in hohen Blechtrögen aus Eisenblech von 110 × 20 × 10 cm, die sich nach unten etwas verjüngten, in abgekühlte Salzlake eingesetzt. Das Wasser entwickelte während des Gefrierens fortwährend Luftblasen, die in kleinen Zwischenräumen in die Höhe stiegen, und zeigte nach dem Gefrieren an der Oberfläche 20 Schichten klares Eis von 1 mm Dicke, welche voneinander durch 3 mm dicke Schichten von weißem, durch viele Luftblasen getrübtem Eise getrennt waren. Auf dem Hofe im Sonnenlicht und bei einer Lufttemperatur von 25° schmolzen an den Seitenflächen des Eisblocks die trüben Schichten eher, als die klaren Schichten. Die Oberfläche zeigte horizontale wellige Streifen, die ich mit dem Fingernagel fühlen konnte. Die klaren Eisschichten bildeten die vorstehenden Hügel, die trüben Schichten die tiefer liegenden Furchen.

Bei dem langsamen Gefrieren des salzhaltigen Brunnenwassers sind periodisch Schichten reinen Wassers und salzhaltigen Wassers gefroren.

Beim Gefrieren von reinem Eis aus salz- und lufthaltigem Wasser scheiden sich Salzlösung und Luftblasen gleichzeitig und periodisch ab. Die Luftblasen wie gewöhnlich an der Grenze zweier heterogener Flüssigkeiten, hier ölartiger Salzlösung und Wasser. Die Luftblasen steigen in die Höhe, reißen die klebrige Salzlösung mit und sammeln sich in horizontalen Schichten, analog den horizontalen Flockenschichten von Mastix, Kieselsäure etc. in trüben Lösungen (§ 9 u. § 31 Ann. d. Phys. 7. p. 73 u. 673. 1902), und frieren in dem Wasser in dieser Lage ein. Die durch Luftblasen getrübten salzhaltigen Eisschichten schmelzen im Sonnenlicht eher, als die klaren Schichten von reinem Eis, und bilden Furchen an der Oberfläche des Eisblocks. Ohne Sonnenlicht und im Zimmer entstehen viel kleinere Furchen als mit Sonnenlicht und in freier Luft.

Die sogenannten Forelschen Streifen und die wellen-

förmige oder streifige Oberfläche der Gletscherkörner (vgl. unten § 181 u. 185) finden hierdurch ihre Erklärung.

In dem Eisblock aus Brunnenwasser lagen unzählige horizontale weißliche Röhrchen normal zu den Seitenflächen des Eisblocks.

Ich ließ ferner *destilliertes Wasser* in einem hohen Blechtrog unter denselben Bedingungen, wie Brunnenwasser, gefrieren. In 12 Stunden hatte sich ein Eisblock von 97 cm Höhe, 16 cm Breite und 8 cm Dicke gebildet. Das Eis war viel klarer als das Eis aus Brunnenwasser und zeigte am oberen Ende eine Vertiefung. Die Kuppe des Eisblocks ist immer trüber durch ausgeschiedene Luftblasen, als der untere Teil. Unter der Kuppe des Eisblocks lagen zehn horizontale klare Eisschichten, die durch 2 mm dicke trübe Schichten mit Luftblasen voneinander getrennt waren. Die klaren Schichten wurden nach oben dünner, hatten unten 8 mm, oben 2 mm Dicke. Beim Abschmelzen des Eisblocks in der Stube entstanden an der Oberfläche der trüben Schichten horizontale Furchen, die im Sonnenlicht noch tiefer wurden.

Da das Eis sich allmählich bildet, so reichern sich die im destillierten Wasser noch enthaltenen Salze im oberen Teile des Troges allmählich an, die trüben luft- und salzhaltigen Schichten folgen um so schneller aufeinander, je weiter sie im Eisblock nach oben liegen.

Eis aus Brunnenwasser enthält mehr Salze als destilliertes Wasser und bildet daher auch beim Gefrieren mehr horizontale trübe Schichten mit kleinerem Abstand voneinander.

In dem Eisblock aus destilliertem Wasser lagen viele weißliche Röhrchen von 0,1—0,2 mm Durchmesser und 5 bis 20 mm Länge mit runden Enden. Die aneinander gereihten Röhrchen bildeten gerade Linien normal zur Oberfläche des Eisblocks, in einigen Millimetern Abstand voneinander. An den gekrümmten Stellen der Oberfläche lagen diese Röhrchen ebenfalls normal zur Oberfläche, auch an der Vertiefung der oberen Kuppe, und bildeten hier Kurven. Die Röhrchen lagen besonders zahlreich auf den Diagonalflächen AE, BF, CF, DE und in der Mittelfläche EF zwischen den beiden breiten Seitenflächen des Eisblocks (Fig. 215, *d*).

Bei der allmählich von außen nach innen fortschreitenden

Abkühlung scheidet sich periodisch ölartige Salzlösung in dünnen Schichten aus, die sich normal an die feste Oberfläche ansetzen, und hohle Blasen, aneinander hängende Schaumkammern oder — wenn die ölartige Flüssigkeit bei niedriger Temperatur sehr klebrig ist — Falten oder hohle Schläuche bilden, wie ich dies früher (§ 25) geschildert habe.[1])

Die weißlichen Röhrchen enthalten reines Eis und Luft. Bei langsamem Abschmelzen des Eisblocks verschwindet dieses weißliche Eis zuletzt und die vielen kleinen Luftblasen vereinigen sich zu einzelnen größeren Luftblasen. Die Röhrchen bestehen aus einer unsichtbaren Haut von ölartiger Salzlösung, die mit reinem oder sehr salzarmem lufthaltigen Wasser gefüllt war. Dies reine Wasser ist bei der Abkühlung zuerst gefroren und die ausgeschiedenen Luftbläschen sind von der Ölhaut, die sich normal zur festen Oberfläche angesetzt hatte, zurückgehalten worden. Das gefrorene reine Wasser schmilzt bei langsamer Erwärmung und Auftauen später als die salzhaltige Ölhaut.

Die halbgeschmolzenen Röhrchen zeigen häufig im Mikroskop einen runden Kopf und Anschwellungen mit einem klaren

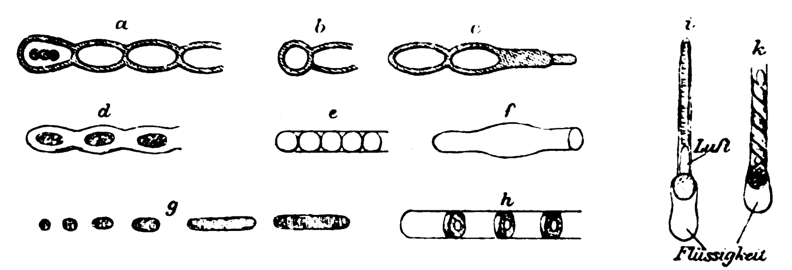


Fig. 211.

Kern, der von einer weißlichen Haut mit Querwänden umhüllt ist (Fig. 211, *a*, *b*, *c*, *f*). Der Kern enthält oft kugelförmige mit weißlichem Eis gefüllte Einschlüsse in klarer Grundmasse (Fig. 211, *a*), oder er besteht aus mehreren aneinandergereihten klaren Kugeln in weißlicher Grundmasse (Fig. 211, *e*). Die klaren Teile enthalten dann Eis mit sehr geringem Salzgehalt

1) G. Quincke, Wied. Ann. 35. p. 568. 1888; Ann. d. Phys. 7. p. 652. 1903.

und niedrigerem Schmelzpunkt als die weißlichen Teile, die aus reinem Eis und Luft bestehen. Häufig sind auch weißliche Kerne von einer Hülle klaren Eises oder klarer Flüssigkeit umgeben (Fig. 211, *d*), oder eine mit weißlichem Eise gefüllte Röhre erscheint in einzelne Röhrchen verschiedener Größe zerfallen (Fig. 211, *g*). In seltenen Fällen erscheinen die Röhrchen gekrümmt, oder zu einer Schraube gewunden, oder das weißliche Eis bildet die 0,05 mm dicke Wand einer klaren kugelförmigen Blase von 5 mm Durchmesser.

Zuweilen zerfällt das Eis der Röhrchen bei langsamem Auftauen in Schrauben oder schraubenförmige Bänder von weißlichem Eis (Fig. 211, *k*), wie ich sie bei dem Zerfließen von Serumalbuminkristallen in Wasser beobachtet habe (§ 163, Fig. 209, *c*, *d*, Ann. d. Phys. **15**. p. 17. 1904), oder in kurze weißliche Hohlzylinder (Fig. 211, *h*). Am unteren Ende der vertikalen oder schrägstehenden Röhrchen entstehen mit weißlichem Eis gefüllte Kugeln, die von einer Hülle klarer Flüssigkeit umgeben sind, während Luftblasen sich im oberen Teil der Röhrchen ansammeln (Fig. 211, *i*). Diese klare Flüssigkeit am unteren Ende der Röhrchen halte ich für verdünnte Salzlösung mit niedrigerem Schmelzpunkt als das reinere Eis der Umgebung.

Undurchsichtige milchige Stellen enthalten Fäden mit Luftblasen, die häufig vertikal stehen. Am Rande der Flüssigkeitstropfen im Innern des Eises sieht man zuweilen kleine Blasen mehrere Minuten lang in wirbelnder Bewegung, welche eine periodische Ausbreitung der entstehenden Flüssigkeit beweist.

Mit dem Mikroskop erkennt man oft eine Reihe Flüssigkeitskugeln nebeneinander mit abnehmender Größe von 0,5—0,1 mm



Fig. 212.

Durchmesser, in deren oberem Teile eine Luftblase liegt, die mit der Größe der Flüssigkeitskugel wächst (Fig. 212). Die Blasen haben sich aus Eiskugeln gebildet, die beim Schmelzen kleineres Volumen angenommen haben. Die Kugeln aus ölartiger Flüssigkeit sind beim Abkühlen später erstarrt, und beim Auf-

tauen früher geschmolzen, als die umgebende Flüssigkeit. Sie sind verdünnte Salzlösung in einer Grundmasse von reinem Eis. Die Blasen könnten auch verdünnte Luft enthalten oder luftleer sein.

Dies reine Eis enthält aber auch noch Salz. Beim Schmelzen in der Sonne lösten sich an der oberen Fläche des klaren Eises bei schwachem Druck viele klare sechsseitige Säulen von 12 mm Länge und 3 mm Durchmesser ab, deren Säulenachse normal zur Oberfläche des Eisblocks lag. Bei weiterem Schmelzen zeigte die Oberfläche des Eisblocks ein Netzwerk von 0.3 mm breiten Furchen, welche konvexe Flächenstücke von 2—3 mm Durchmesser begrenzten und sich unter Winkeln von 120°, seltener von 150°, 90° oder anderen Winkeln trafen. Auf dem Hofe in vollem Sonnenlicht traten diese sechsseitigen Säulen und das Netzwerk von Furchen viel deutlicher hervor, als im Zimmer. Die Säulen waren durch eine sichtbare Schicht Salzlösung voneinander getrennt, die als flüssige Schaumwände Schaumkammern mit reinem Wasser umschlossen hatten, beim Abkühlen später erstarrt und im Sonnenlicht früher geschmolzen waren, als das reine Wasser im Innern der Schaumkammern. Bei längerer Einwirkung des flüssigen Salzwassers der Schaumwände löst sich ein Teil des benachbarten reinen Eises darin auf. Die Dicke der Schaumwände nimmt zu und sie werden dadurch sichtbar.

Bei noch längerer Einwirkung des Sonnenlichtes werden mehr Schaumwände im Innern des klaren Eises sichtbar, die vertikale lange Schaumkammern von 5 × 15 mm begrenzen. Viele kugelförmige Hohlräume erscheinen mit scharfer Grenze und einem kugelförmigen Hohlraum im Innern. Oft liegen solche kugelförmige Gebilde von 0.5 oder 1 mm Durchmesser mit oder ohne Hohlblase in den Schnittpunkten der Schaumkanten, hatten sich also vor dem Erstarren als ölartige Salzlösung oder als eine von einer dünnen Haut ölartiger Salzlösung umschlossene Flüssigkeitskugel in unsichtbaren Schaumwänden und Schaumkanten aus ölartiger Salzlösung festgesetzt.

Bei passender Beleuchtung durch einen halb weißen, halb schwarzen Hintergrund mit scharfer Grenze erkennt man in der Kuppe des Eisblocks die von sehr dünnen kugelförmigen Schaumwänden begrenzten 3—5 mm breiten Schaumkammern,

en Wände normal zur Eisoberfläche stehen. Bei besonders ıstiger Beleuchtung erscheinen im durchgehenden Licht das ere der Schaumkammern dunkelblau, die Schaumwände lichte Linien.

Nach meinen Versuchen über das Gefrieren schwacher lzlösungen (§ 175—176) genügen 1—10 Milliontel Proz. Salz, se Gebilde hervorzurufen.

Die Formen der Röhrchen aus weißlichem und klarem ise (Fig. 211) entsprechen genau den Astformen der Metallsalzgetationen aus erstarrten ölartigen Niederschlägen, welche ich üher beschrieben habe (§ 25, Fig. 8; § 28, Fig. 21, *a*; 22, *a*, *b*; 29, Fig. 29, 36; Ann. d. Phys. 7. p. 649—671. 1902).

Im Innern des klaren Eisblocks aus destilliertem Wasser, er ohne Sonnenlicht langsam auftaut, erkennt man mit dem likroskop leicht Schaumkammern von 1,6—2,5 mm Breite, eren Schaumwände Winkel von 120° miteinander einchließen und normal zur Oberfläche des Eisblocks stehen. uweilen habe ich aber auch den Neigungswinkel zweier chaumwände sich ändern sehen. Er ging in 10 Minuten on 160° in 120° über (Fig. 213, *a*, *b*). Es ist dies ein Be-

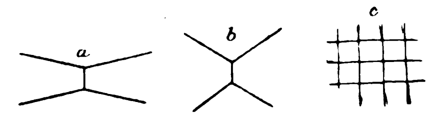


Fig. 213.

reis, daß sowohl *die Schaumwände als der doppeltbrechende Inhalt der Schaumkammern bei 0° aus sehr klebriger Flüssigkeit* estehen und daß die Oberflächenspannung der beiden Schaumwände langsam kleiner wurde, indem durch Wasseraufnahme ie ölartige Salzlösung der Schaumwände verdünntere Salzösung wurde.

In seltenen Fällen bildeten die Schaumwände Winkel on 90° und begrenzten Schaumkammern von 0,8—1 mm Breite im obersten Teile des Eises. Sie hatten sich also an ltere schon erstarrte Schaumwände angesetzt und waren dann benfalls erstarrt (Fig. 213, *c*).

Läßt man den Eisblock aus destilliertem Wasser langsam uftauen ohne Sonnenlicht, so bilden sich durch Zusammen-

fließen weniger Schaumkammern mit dickeren Wänden, die Schaumkammern erscheinen größer und das Eis wird allmählich immer klarer, am meisten in der Mitte des Eisprismas, wo die zuletzt erstarrten und salzreichsten Teile der Wassermasse liegen. Ein Teil der Salzlösung in den aneinanderhängenden Schaumwänden, besonders wenn sie durch Auflösen von benachbartem Eis wasserreicher geworden ist, fließt nach unten ab und vereinigt sich mit dem Schmelzwasser. Die Schaumwände werden dadurch dünner. Nach 18 Stunden waren von dem ganzen Eisblock 1 cm dicke flache Eisstücke, parallel der breiten Vertikalwand des Blechtroges zurückgeblieben mit einzelnen weißlichen Röhrchen, in welchen das Mikroskop Schaummassen mit aneinanderhängenden Schaumkammern und weißlichen Wänden erkennen ließ. Die weißlichen Wände zeigten feine Streifungen oder enthielten wieder kleinere Schaumkammern, wie die braunen Wände der Schaumkammern von Leimtannat, das man im Wasser aufquellen läßt (§ 98, Ann. d. Phys. 11. p. 66. 1903). Im Polarisationsapparate zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen zeigte die klare Eismasse große Schaumkammern von 5—10 mm Durchmesser; meist mit ebenen, in seltenen Fällen auch mit gekrümmten Schaumwänden, welche Winkel von 120° miteinander einschlossen und normal zur vertikalen Oberfläche des Eisblocks lagen. Die Schaumkammern erschienen meist als sechsseitige Säulen, in seltenen Fällen als fünfseitige Säulen, mit Säulenwinkeln von 120° und 90°. Jede Schaumkammer enthielt einen optisch homogenen Eiskristall. Die optische Achse lag nicht normal zur Oberfläche der Eisplatte. Aber die Eiskristalle der verschiedenen Schaumkammern waren verschieden orientiert, waren also bei der Kristallisation durch dünne ölartige Flüssigkeitsschichten voneinander getrennt geblieben. Durchbrechen die Eiskristalle bei ihrer Entstehung unter Volumenvergrößerung diese dünnen ölartigen Flüssigkeitsschichten und berühren das überkaltete Wasser in der benachbarten Schaumkammer, so entstehen in dieser Eiskristalle mit gleicher Orientation, wie in der zuerst erstarrten Schaumkammer. Dann entstehen größere in orientierter Lage aneinander gewachsene Eiskristalle mit eingelagerten unsichtbaren Schichten ölartiger Salzlösung. Eine ähnliche Bildung orien-

tierter nebeneinanderliegender oder aneinander gewachsener Kristalle habe ich an wässerigen Lösungen von Kupfersulfat etc. (§ 49, Ann. d. Phys. 9. p. 14. 1902) bei Berührung mit Alkohol beobachtet.

In einem Eisblock aus Wasser der Heidelberger Wasserleitung, welches ein wenig mehr Salze als das destillierte Wasser und weniger Salze als das Brunnenwasser enthielt, lagen weniger horizontale weißliche Röhrchen, als in einem Eisblock aus Brunnenwasser, und mehr, als in einem Eisblock aus destilliertem Wasser.

Übrigens hängt das Aussehen des Eises von der Geschwindigkeit ab, mit der das Wasser gefroren ist. Der Eisblock erscheint um so klarer, je langsamer man das Wasser gefrieren läßt (vgl. unten § 177).

In einem besonders klaren Eisblock aus destilliertem Wasser waren statt vieler horizontaler Röhrchen mit weißlichem Eis, eine geringere Anzahl Röhrchen von 1 mm Durchmesser und 20—30 mm Länge auf (kreisförmigen) Kurven verteilt, deren konkave Seite nach außen gekehrt war und deren oft kaum wahrnehmbare Enden normal zur Eisoberfläche lagen. Die Röhrchen waren klarer, enthielten weniger Luft als die vorher beschriebenen Röhrchen. Das destillierte Wasser hatte zufällig weniger Salze und Luft, als gewöhnlich, enthalten. Die beim Abkühlen ausgeschiedenen ölartigen Röhrenwände aus wässeriger Salzlösung waren weniger zahlreich und dünner wie gewöhnlich. Ihre Oberflächenspannung war auf der konvexen Seite geringer als auf der konkaven Seite, die der Richtung des größten Wärmeverlustes zugekehrt war.

Bei den Metallsalzvegetationen (§ 28, 29, Fig. 24, 35, Ann. d. Phys. 7. p. 660. 1902) krümmten sich auch die hohlen Äste aus ölartiger Flüssigkeit in den stark verdünnten Salzlösungen bei sehr geringerer Dicke der Röhrenwand.

In freier Luft bei vollem Sonnenlicht zerfiel auch dieser klarste Eisblock in viele sechsseitige Säulen mit Säulenachse normal zur Eisoberfläche und zeigte außen ein Netzwerk von Furchen. Aber die sechsseitigen Säulen schienen weniger leicht gegeneinander verschiebbar, die flüssigen Schaumwände zwischen den Schaumkammern waren dünner als bei Eis aus Brunnenwasser. Die Säulen am unteren Teile des Eisblocks

waren etwas größer als im oberen Teile, die Furchen der Oberfläche weniger tief als gewöhnlich.

Das Eis erscheint um so fester, je klarer das auftauende Eis ist, je weniger und je dünnere Schaumwände aus ölartiger Salzlösung in ihm liegen.

§ 173. *Künstliches Eis aus luftfreiem destillierten Wasser, in Eisen oder Messing gefroren.* Ganz reines luftfreies Wasser, welches man in einem Glasrohr von oben nach unten frieren läßt, gibt, wie Bunsen[1]) gezeigt hat, einen Eiszylinder, klar und durchsichtig wie Kristallglas. Der Eiszylinder zeigte an seiner Basis eine sehr regelmäßige halbkugelförmige Höhlung, ein Beweis, daß auch an der Grenze von erstarrendem und flüssigem Wasser eine Oberflächenspannung wirksam ist.

Ich suche die Ursache dieser Erscheinung in einer sehr dünnen unsichtbaren Haut aus ölartiger wasserarmer Salzlösung, herrührend von den äußerst geringen Spuren Salz, die noch in dem destillierten Wasser enthalten waren.

Im Bunsenschen Eiskalorimeter beobachtet man eine kontinuierliche Volumenabnahme des Eisbechers, der von Wasser von 0^{0} umgeben ist. Schuller und Wartha[2]), sowie v. Than[3]) haben diese Volumenabnahme bedeutend verringert, indem sie das eigentliche Eiskalorimeter mit einem äußeren Mantel von reinem Eise, einem Thermostaten, umgaben. Sie erklärten die Volumenabnahme des Eisbechers im Kalorimeter durch die Wärme, welche von dem äußeren Mantel des reinen Eises im Thermostaten von Atmosphärendruck und 0^{0} kontinuierlich übergeht zu dem Eisbecher des Kalorimeters unter höherem Druck und niedrigerer Temperatur und stützten diese Ansicht durch sinnreiche Versuche. C. v. Than bestimmte durch eine Quecksilbersäule von veränderlicher Höhe den Druck im Innern des Wassers, bei welchem das Volumen des Eisbechers konstant blieb. Diesen Druck nannte er den neutralen Punkt. Dieser „neutrale Punkt“ erfordert aber für dieselbe Eismasse in demselben Kalorimeter nach einem Jahre einen 40 cm höheren Druck als vorher. Das Eis hatte sich

1) R. W. Bunsen, Ges. Abhandl. **3.** p. 474. 1904; Pogg. Ann. **141.** p. 5. 1870.

2) A. Schuller u. V. Wartha, Wied. Ann. **2.** p. 363. 1877.

3) C. v. Than, Wied. Ann. **13.** p. 91. 1888.

also geändert und v. Than sieht den Grund der Änderung in den ungleichen Mengen Glas, welche während dieses Jahres sich im Wasser des Kalorimeters und im Wasser des Thermostaten gelöst hatten.

Meine oben beschriebenen Versuche sahen den Grund der Schaumwände im Eis ebenfalls in einem sehr kleinen Salzgehalt des Eises. Ähnlich wie Salz müßte aufgelöste Luft wirken. Da aber bei den Versuchen mit dem Eiskalorimeter Luft völlig ausgeschlossen war, so habe ich die Schaumbildungen im schmelzenden Eise nur den Salzen, und nicht der Luft zugeschrieben.

Luftfreies Wasser in einem Kryophor friert bei schneller Verdunstung durch Abkühlung der Wasserdämpfe zu einer weißen Eismasse, wegen des im Wasser aufgelösten Glases.

Künstliches Eis aus luftfreiem Wasser zeigte in der Tat ähnliche Erscheinungen wie Eis aus lufthaltigem Wasser bei allmählichem Auftauen.

Der eiserne Blechtrog von 110 × 20 × 10 cm wurde mit ausgekochtem destillierten Wasser gefüllt und heiß in die abgekühlte Salzlake eingesetzt. Nach 12 Stunden hatte sich ein klarer Eisblock von 107 × 18 × 9 cm gebildet mit einer *weißen Mittelschicht EF* (Fig. 215, *d*) oben in der Mitte zwischen den breiten Seitenwänden, und vier trüben *vertikalen Diagonalflächen* (*AE*, *EF*, *CF*, *DE*), die von den vier vertikalen Kanten ausgingen und den von den Seitenflächen des Eisprismas eingeschlossenen rechten Winkel halbierten. In dem Eisblock lagen viele horizontale Röhrchen normal zur Oberfläche. Der untere Teil der Mittelschicht war von zwei langen vertikalen weißen Streifen begrenzt, zwischen denen zu beiden Seiten der Achse des Eisblocks viele nahezu horizontale Schichten weißlichen Eises in 1,4 bis 1,6 mm Abstand voneinander lagen, wie die Rippen einer Federfahne oder eines Skeletts. Nach einiger Zeit verwandelten sich diese Rippen in geschlossene Röhren von 1 mm Durchmesser mit runden Enden und Anschwellungen, deren Durchmesser allmählich zu- und dann wieder abnahm. Lage und Gestalt dieser röhrenförmigen Schaumkammern entsprach der Lage und Gestalt der Äste der Tannenbäume oder Kristallskelette Fig. 83, *a*, § 58 (Ann. d. Phys. **9**. p. 31. 1902), doch waren die Astwinkel nicht 90°,

sondern die Röhren etwas gegen die Achse des Eisblocks gehoben. Im unteren Teile des Eisblocks, 10 cm über der Basis, quollen diese geschlossenen Schaumkammern am schnellsten auf. Dann schritt die Quellung langsam zu höher gelegenen Schaumkammern fort. Bei einzelnen Schaumkammern schnürte sich der runde Kopf ab zu einer Blase von 3 mm Durchmesser mit 0,15 mm dicker weißer Wand, die dann wieder einschrumpfte. Fig. 214, *a*—*e* gibt die Gestalt des Kopfes zu verschiedenen Zeiten.

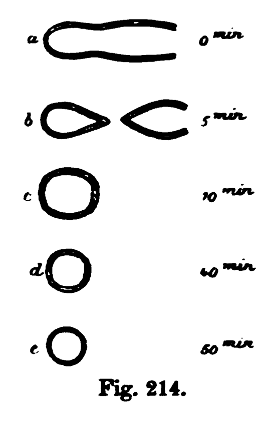


Fig. 214.

$2^1/_2$ Stunden nach Aufstellung des Eisblocks in einem Zimmer von 15° C. waren die Schaumkammern 60 cm über der Basis am größten.

In dem durch die Salzlake abgekühlten Blechtrog mit Wasser erfolgt die Ausscheidung der Eiskristalle gleichmäßig nach dem Innern in der Richtung der Oberflächennormalen. Die Spuren Salz, die im luftfreien Wasser noch enthalten sind, bleiben also als Mutterlauge zurück in den vier vertikalen Diagonalflächen und später in der Mittelschicht zwischen den breiten Seitenflächen des Blechtroges und bilden bei weiterer Abkühlung hier periodisch ölartige konzentrierte Salzlösung zwischen Lamellen von verdünnter Salzlösung und reinem Wasser. Bei einer gewissen Abkühlungsgeschwindigkeit rollen sich die sehr klebrigen ölartigen Lamellen von noch nicht ganz erstarrtem Wasser wegen der Oberflächenspannung gegen die benachbarte Salzlösung zu Röhren zusammen, die langsam in Kugeln zerfallen wollen. Dann erstarren die Röhrenwände von verdünnter Salzlösung oder reinem Wasser, und erst später die Salzlösung im Innern der Röhren oder Schaumkammern. Wird nun der Eisblock in ein Zimmer von 15° gestellt, so schmilzt die Salzlösung früher als die Röhrenwand. Diese Wände aus reinem Eis enthalten aber nach den Versuchen von § 172 auch Haarspalten mit Salzlösung. Durch diese diffundiert verdünnte Salzlösung von außen nach dem Innern der Schaumkammer und vermehrt deren Volumen. Möglicherweise diffundiert auch Salzlösung durch die nicht feste, sondern

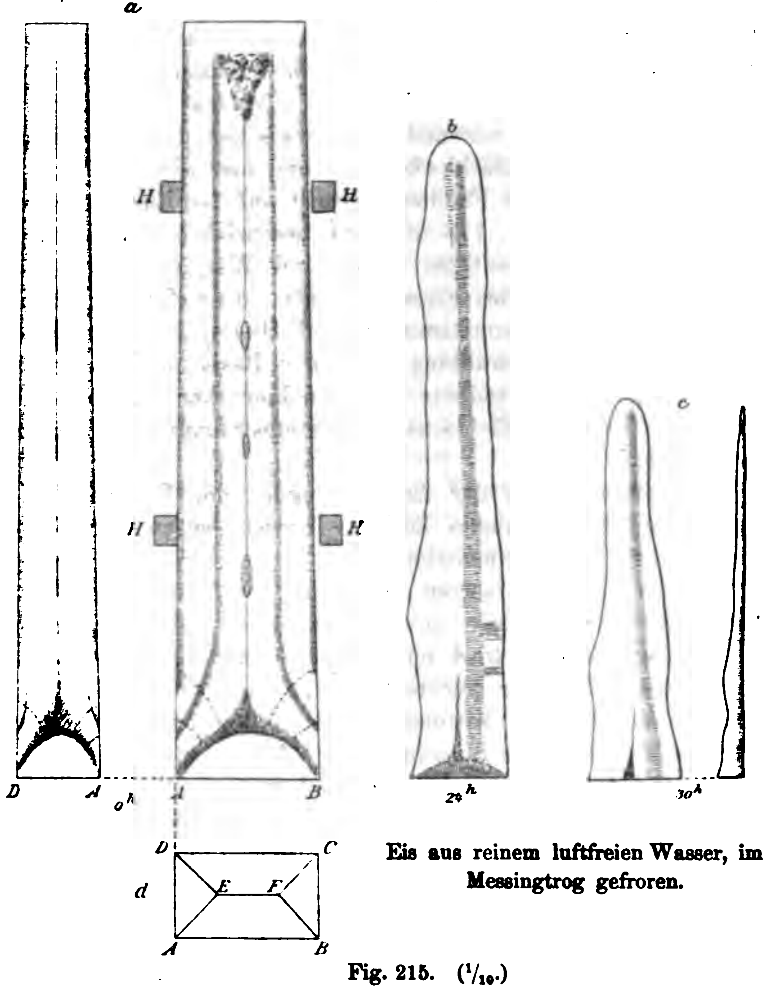
nur sehr klebrige flüssige Röhrenwand von reinem Eis. Bei weiterer Einwirkung von Wärmestrahlen des Tageslichtes und steigender Temperatur wird die Salzlösung außerhalb der Schaumkammern konzentrierter als innerhalb, das Volumen der Schaumkammern wird wieder kleiner, und schließlich löst sich das Eis der Schaumwände auch in dem benachbarten Salzwasser auf, die Tannenbäume mit den Schaumkammern sind verschwunden, die Mittelschicht des Eisblocks hat sich in verdünnte Salzlösung verwandelt, die zwischen den Eiswänden nach dem Fuße des Eisblocks sinkt und hier abfließt.

Das Gewicht des Eisblocks drückt auf die Eismasse und nach den in §§ 171, 178 und 184 beschriebenen Versuchen schmelzen durch einseitigen Druck und Wärmestrahlung die salzhaltigen Stellen des Eises eher als die salzfreien Stellen. Das Innere der Schaumkammern und Haarspalten muß also bei gleicher Wärmestrahlung nahe der Basis des Eisblocks eher flüssig werden, und die Diffusion hier eher beginnen als im oberen Teile des Eisblocks, in Übereinstimmung mit meiner Beobachtung.

Im oberen Teile der Anschwellungen der Röhrchen bemerkt man häufig kleine luftleere Blasen wegen der Kontraktion des Eises beim Schmelzen.

Beim Abkühlen setzen sich aus der Mutterlauge der Mittelschicht Eiskristalle an die Eiswände zu beiden Seiten an, die Mutterlauge wird immer konzentrierter, und schließlich wird ein Teil der gelösten Substanzen ausgeschieden und sinkt in der flüssigen Mittelschicht zu Boden bis an die hier schon ausgeschiedenen Schaumwände. Ebenso der im Wasser etwa vorhandene Sand und Staub. Ich habe im unteren Teile der in Eisentrögen gefrorenen Eisblöcke stets braungelb gefärbte Schaumflocken gefunden in den zuletzt erstarrten Schichten. Auch die oben erwähnten federartigen Schaumzellen zu beiden Seiten der Achse zeigten 20—30 cm über der Basis des Eisblocks eine braungelbe Färbung, die in der Umgebung der Schaumkammern fehlte und erst beim Aufquellen der Schaumkammern oder Verdünnung des Inhalts merklich wurde. Zuweilen erschien die Wand der Schaumkammer brauner als das Innere. Einige Milligramm Eisenoxydhydrat in 20 Liter Wasser gelöst, würden diese Färbung schon erklären können.

Später wurde, um von Eisenoxyd und anderen Verunreinigungen unabhängig zu sein, statt des Troges aus Eisenblech ein Trog aus Messingblech benutzt von 112 cm Höhe, 19 × 11 cm am oberen offenen, 16 × 8 cm am unteren ge-



Eis aus reinem luftfreien Wasser, im Messingtrog gefroren.

Fig. 215. (1/10.)

schlossenen Ende. Der Messingtrog wurde mit möglichst reinem destillierten Wasser gefüllt, das Wasser in dem Messingtrog über Kohlenfeuer $2\frac{1}{2}$ Stunde gekocht, der Trog mit einer übergreifenden Messingkappe bedeckt und heiß in die abgekühlte

Salzlake gestellt. Nach 15 Stunden wurde der Trog herausgenommen, die Messingkappe entfernt, und der Trog umgekehrt in eine flache Blechwanne gestellt, die das Schmelzwasser auffing und ableitete. Messingtrog und Eis wurden eine Viertelstunde in einem Zimmer von 15^0 gelassen, der Messingtrog vorsichtig abgehoben und der Eisblock frei zwischen vier Holzleisten *H* (Fig. 215) aufgestellt, die am oberen und unteren Querstück eines Arbeitsbocks[1]) festgeschraubt waren. Außerdem wurde das Eis mit zwei horizontalen Bindfäden lose an dem Arbeitsbock befestigt. Während des Abschmelzens wurden nach Bedürfnis der Abstand der Holzleisten und die Bindfäden verkürzt. Der klare Eisblock von 100 cm Höhe hatte an der breiteren Basis von 18 × 10 cm eine 6 cm tiefe Höhlung, an der schmaleren Basis 15 × 7 cm, und war der Länge nach von einer dünnen trüben Mittelschicht *EF*, und vier weniger trüben Diagonalflächen *AE*, *BF*, *CF*, *DE* durchzogen. Letztere halbierten die von den Seitenwänden gebildeten rechten Winkel (Fig. 215, *d*).

In einem Zimmer von 15^0 bei trübem Wetter schmolz der Eisblock oben schneller wie unten. Nach 30 Stunden war noch ein Eisblock von 50 cm Höhe geblieben mit einer Basis von 12 × 4 cm, der oben in eine scharfe Schneide von 5 cm Breite auslief. Das Eis war klarer und fester und schmolz bedeutend langsamer, als das früher in Eisentrögen gefrorene Eis. An der oberen Kuppe des schmelzenden Eisblocks sammelten sich die Sand- und Staubteilchen, die während der Herrichtung des Wassers in dasselbe gefallen waren, sich in der zuletzt erstarrten flüssigen Mittelschicht zu Boden gesetzt hatten, hier in den schon vorhandenen Schaumflocken hängen geblieben waren und im oberen Teile des umgekehrten Eisblocks trübere Stellen bildeten.

In der trüben Mittelschicht und den vier Diagonalflächen lagen normal zur Oberfläche horizontale Röhrchen von 0,05 bis 0,1 mm Durchmesser, klar oder mit weißem Eise gefüllt, teilweise in einzelne Kugeln oder kurze Röhrchen zerfallen, mit runden Enden und Anschwellungen. Die trüben Diagonal-

1) G. Quincke, Zeitschr. f. phys.-chem. Unterricht 5. p. 114. Fig. 1. 1892.

flächen fehlten in dem unteren breiteren Teile des umgekehrten Eisblocks, der später und langsamer erstarrt war, als die Hauptmasse und 15—20 cm hoch ganz klar erschien, abgesehen von einzelnen Kurven aneinander gereihter Röhrchen von 0,2 mm Durchmesser, die ihn normal zur Oberfläche durchzogen. Ähnliche Kurven, nur zahlreicher, lagen in der Mittelfläche.

Abgesehen von dem abschmelzenden Wasser wurde der Eisblock oben schmaler und unten breiter. Das Eis floß auf der ebenen Unterlage seitlich auseinander wie flüssige Leimgallerte (vgl. § 148; Ann. d. Phys. **14.** p. 860. 1904). Schon Person[1]) hat die latente Schmelzwärme des Eises erst bei Temperaturen unter -2^{0} konstant gefunden, und daraus geschlossen, daß Eis bei Erwärmen von -2^{0} auf 0^{0} allmählich in einen weichen Zustand übergeht.

Der an der Oberfläche des Eisblocks herabfließende kalte Luftstrom kühlt die Eisoberfläche ab und verzögert das Abschmelzen. Unter den Hindernissen, die den absteigenden Luftstrom hemmen, wie das obere Querstück des Arbeitsbocks oder die Holzleisten neben den schmalen Seitenflächen, oder die dicken Bindfäden, blieb das Eis wärmer, weicher und weniger klebrig, floß langsam nach außen und bildete einen Wulst oder Höcker mit großen Schaumkammern (Gletscherkörnern) und Schaumwänden mit Randwinkeln von 120^{0}, normal zur Oberfläche, die an den kälteren Stellen des Eisblocks erst später entstanden sind.

Nach Abheben des Messingtroges wurde das Eis unter dem Einfluß des Tageslichtes trüber. In dem klaren Eis zwischen den Diagonalflächen erschienen nach einigen Stunden sehr feine horizontale Röhrchen, und auf der weißlichen Mittelschicht weißere vertikale Streifen, welche durch hellere Streifen voneinander getrennt waren. Auch in den Diagonalflächen erscheinen wohl weißere und hellere Stellen. Die klaren und weißen Stellen auf Mittelschicht und Diagonalflächen verschoben sich langsam, änderten Form und Lage. Im allgemeinen wird der Eisblock nach einigen Stunden trüber und dann später wieder klarer, indem sich in der Mittelschicht

1) C. C. Person, Ann. de chim. (3) **30.** p. 81. 1850.

breitere horizontale Röhrchen mit Anschwellungen von 0,4 bis 1,6 mm Durchmesser und Schaumkammern ähnlicher Größe bilden, oder kugelförmige Hohlräume von 0,4 bis 0,8 mm Durchmesser, luftleer oder mit verdünnter Luft gefüllt, die allmählich von dem luftfreien Wasser absorbiert worden ist.

Nach 2 Stunden waren die Diagonalflächen oben klar, unten trübe. Die trüben Stellen gingen von der Mittelschicht um so weiter nach außen, je tiefer sie lagen, unter je höherem Druck sie standen. Die großen vertikalen weißen Streifen der Mittelschicht wanderten nach innen, oben schneller wie unten. Doch wechseln diese Erscheinungen sehr bei den verschiedenen Eisblöcken aus reinstem luftfreien Wasser, je nach dem äußerst geringen Salzgehalt desselben, je nach der Geschwindigkeit mit der das Eis gefroren war und je nach der Intensität des Tageslichtes und der Strahlung.

Nach 7 Stunden hatte sich im oberen Teile der klaren Mittelschicht ein Netzwerk von 0,2 mm breiten Schaumwänden aus reinem Eis gebildet, normal zu den breiten Seitenflächen mit Neigungswinkeln von 90 und 120°. In den Knotenpunkten der Schaumkanten lagen häufig Tetraeder, von Kugelflächen begrenzt und mit einfach brechender klarer Flüssigkeit gefüllt. Die 5—8 mm breiten Schaumkammern füllten sich allmählich mit flüssiger Salzlösung, während das Netzwerk von Schaumwänden immer weiter nach unten rückte und nach 11 Stunden bis 40 cm über der Basis des umgekehrten Eisblocks sichtbar war. Die Mittelschicht erschien auf einer Länge von 90 cm und in einer Breite von 4 cm klar. In diesem Netzwerk von Schaumwänden in der Mitte des Eisblocks floß klare Salzlösung abwärts neben zwei vertikalen weißen Streifen mit trüben Flocken und horizontalen Röhrchen von 0,2 mm Durchmesser und 0,02 mm dicken Wänden. An einzelnen Stellen konnte ich Röhren mit Schraubenwindungen oder halbkugelförmigen Anschwellungen und Astlöchern wie bei Kieselsäuregallerte (§ 64, Fig. 87, *e*, Ann. d. Phys. **9.** p. 807. 1902) erkennen.

Je nach der Intensität der Strahlung und der Beschaffenheit des Eises können auch die weißen Streifen in der Mittelschicht oder den Diagonalflächen weniger deutlich hervortreten oder ganz fehlen. Ein Teil der Hohlräume kann in

der klebrig flüssigen Eismasse durch den Luftdruck zusammengepreßt werden und verschwinden. Die Mittelschicht, in der die klare Salzlösung abfloß, konnte nach 36 Stunden 1 mm dick sein.

Nach 30 Stunden konnte man den scharfen klaren oberen Rand des Eisblocks mit einem Polarisationsspiegel beleuchten, und durch ein Nicolsches Prisma mit bloßem Auge oder mit einem horizontalen Mikroskop betrachten. Er zeigte doppeltbrechende Schaumkammern von 5—10 mm Durchmesser, durch flüssige Scheidewände getrennt, welche normal zu den breiten Seitenflächen des Eisblocks standen. Jede Schaumkammer enthielt einen Eiskristall, der in den verschiedenen Schaumkammern verschiedene Lage hatte. Die flüssigen Schaumwände stießen unter Winkeln von 120° zusammen und wurden dünner, indem die Flüssigkeit unten abfloß. An den Knotenpunkten dreier Schaumwände lag häufig ein Dreieck oder dreiseitiges Prisma, mit einfach brechender Flüssigkeit gefüllt. Beim allmählichen Abschmelzen gingen die Seiten des Dreiecks allmählich in drei Kreisbogen mit Neigungswinkeln von 120—180°, oder in einen einzigen Kreis über (Fig. 216, *a*, *b*, *c*).

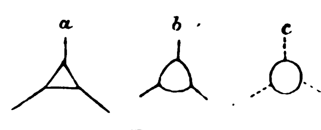


Fig. 216.

Beim Abschmelzen des Eises gelangt das Salzwasser der Schaumwände an die von Wasser bedeckte Eisoberfläche und veranlaßt auf dieser *freien Wasseroberfläche* (da seine Oberflächenspannung gegen Luft von der dieses Wassers verschieden ist) periodische Ausbreitung und Ausbreitungswirbel, die sich in kurzen Perioden von 0,5—5 Sekunden wiederholen.

Neben den Stellen mit klaren Schaumkammern lagen an der Kuppe des abschmelzenden Eisblocks trübe Stellen, in denen man mit dem Mikroskope ölartige trübe, nicht zusammenhängende Schaumwände erkannte, in Form von kugelförmigen Blasen, Röhren mit Anschwellungen oder klare Flüssigkeit (Salzlösung) in runden, elliptischen oder röhrenförmigen Hohlräumen. In den trüben Schaumwänden und der Salzlösung lagen viele luftleere oder mit Luft gefüllte Blasen. Die unter dem Einfluß der Wärmestrahlung gebildete Salzlösung konnte nicht abfließen und so blieb das Eis an dieser

Stelle trübe. Man sieht aber bei fortschreitender Erwärmung und Abschmelzung die Blasen und Hohlräume platzen, die Schaumwände zusammenfließen und vergehen und langsam klare Schaumkammern mit doppeltbrechenden Kristallen (Gletscherkörnern) entstehen, mit horizontalen Schaumkanten, wie an den klareren Stellen des Eisblocks.

Die Erstarrung des luftfreien Wassers geht gleichmäßig in der Richtung der Normalen von den Seitenflächen des Blechtroges nach dem Innern. Die im Wasser enthaltenen geringen Salzmengen bilden die Mutterlauge auf den Diagonalflächen und später in der Mittelschicht zwischen den reinen Eiskristallen und frieren bei etwas niedrigerer Temperatur als das reine Eis. Bei Belichtung durch Wärmestrahlen schmelzen sie eher als das reine Eis. Die trüben Stellen der Diagonalflächen und der Mittelschicht entsprechen den Tyndallschen Schmelzungsfiguren im Seeeis.

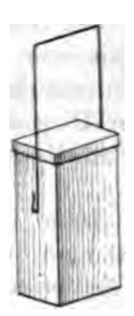
Die Erkaltungsgeschwindigkeit des Wassers beim Gefrieren nimmt mit dem Abstand von der Trogwand ab, die Konzentration der durch Gefrieren angereicherter Mutterlauge mit dem Fortschreiten der Eisbildung zu. Der Salzgehalt der Diagonalschichten nimmt also nach dem Innern des Eisblocks zu, und ist in der Mittelschicht größer als in den Diagonalschichten. Die Intensität der Wärmestrahlung nimmt mit dem Abstand von der Außenfläche des Eisblocks ab. Die Bildung der Schaumkammern in der Mittelschicht und den Diagonalflächen beim Erstarren und Wiederauftauen wird ein Optimum erreichen für eine gewisse Intensität der Wärmestrahlung und einen nicht zu großen Konzentrationsgrad der geschmolzenen Mutterlauge, wenn die Lamellen aus klebriger ölartiger Salzlösung noch Zeit haben, Röhren, Blasen und Schaumkammern zu formen, ehe sie vollständig erstarrt oder verdünnte wässerige Salzlösung geworden sind.

Damit sind die wechselnden Erscheinungen der vorübergehenden und dauernden Trübung in Mittelschicht und Diagonalflächen und in dem klaren Eise vollkommen erklärt, ebenso wie ihre Abhängigkeit vom Druck im Eise selbst (vgl. unten § 184).

Wir werden die klaren und trüben Stellen des ruhenden Eisblocks wiederfinden als blaue und weiße Bänder in dem zu Tal fließenden Gletschereis (§ 185).

§ 174. *Kleine Eisblöcke aus destilliertem Wasser.* Bei dem Auftauen kleiner Eisblöcke aus luftfreiem Wasser tritt der Einfluß der Wärmestrahlung mehr hervor und der Einfluß des Druckes ist weniger merklich als bei den großen Eisblöcken.

Ich ließ das Wasser in hohen prismatischen Trögen von 10,5 × 5 × 4 cm aus dünnem Weißblech oder Messing mit übergreifendem Deckel gefrieren. Über der Mitte der schmalen Seitenwände war ein U-förmig gebogener 0,5 mm dicker Eisendraht als Henkel angelötet (Fig. 217). Das destillierte Wasser wurde in den Trögen ausgekocht, um die absorbierte Luft auszutreiben. Vier Tröge konnten nebeneinander auf ein horizontales Brett von 70 × 4 × 0,5 cm gehängt und gleichzeitig in eine Blechwanne mit der Kältemischung aus 1 Teil Kochsalz und 3 Teilen Schnee oder gestoßenem Eis eingesenkt werden. Nach 4 Stunden wurde der Blechtrog aus der Kältemischung genommen, kurze Zeit über einer Gasflamme erwärmt, der Blechdeckel abgenommen, und gleichzeitig die Trogöffnung nach unten gekehrt. Ein klares Eisprisma mit einer weißen Mittelschicht von 1,5 cm Breite glitt heraus. Die weiße Mittelschicht lag im oberen Teile des Eisprismas und bestand aus vielen, nahezu horizontalen Röhrchen. Unter dem Einfluß einer elektrischen Glühlampe trübten sich in wenigen Sekunden die vier vertikalen Diagonalflächen und kurze Zeit darauf die vier basalen Diagonalflächen, welche von den vier Kanten der Basis des Eisprismas nach der Basis der weißen Mittelfläche gingen.

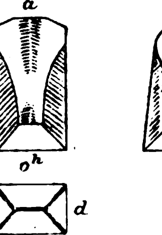

Fig. 217.

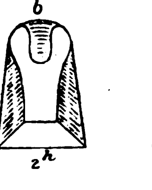
Die trüben Diagonalflächen zeigten viele runde Scheibchen oder Ringe von klarer Flüssigkeit. Fig. 218, *a*, *b*, *c* geben eine Ansicht des Eisblocks von der Seite und Fig. 218, *d* von unten gesehen. Die weißlichen Stellen sind schraffiert parallel der Lage der Röhrchen in der weißen Mittelschicht. Ein Teil der Röhrchen von 4—5 mm Länge und 0,2—0,3 mm Durchmesser zeigte Anschwellungen und abgerundete Enden und kugelförmige oder elliptische Hohlräume im Innern.

Nach 4 Stunden war die weiße Mittelschicht nach unten gewachsen und die vertikalen Diagonalflächen zeigten horizont

helle Streifen, 1 mm hoch und durch 2 mm hohe trübe Streifen voneinander getrennt.

Bei anderen Eisblöcken wurden im Tageslicht Diagonal- und Mittelflächen in 5 Min. trübe, oder es traten in den Diagonalflächen statt der horizontalen Streifen vertikale weiße Streifen von 1,8 mm Höhe auf, die durch 1 mm hohe, klare Streifen voneinander getrennt waren.





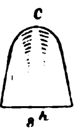


Fig. 218. (1/5.)

Im oberen Teile des in Weißblech gefrorenen Eisblockes konnte ich 1 cm unter der Oberfläche mit dem Mikroskop Röhrchen mit drei Anschwellungen, abgerundeten Enden und Querenden erkennen, deren 0,01 mm dicke Wände braun gefärbt waren (wie Fig. 211, *f*).

Nach 1 1/2 Stunden war der Eisblock unten 4,5, oben 4 cm breit (Fig. 218, *b*). Das rechtwinklige Prisma war wie ein Prisma aus Leimgallerte zu einer abgestumpften Pyramide auseinander geflossen (§ 148).

Frisch destilliertes Wasser gab in gleicher Kältemischung klarere Eisblöcke als später, nachdem es 2 Monate in Glasflaschen gestanden und Glas aufgelöst hatte.

Mit der Temperatur der Kältemischung, dem Wassergehalt des dafür benutzten Schnees oder der Geschwindigkeit, mit der das Wasser gefroren ist, wechselt das Aussehen des Eisblocks.

Mit Luft oder verdünnter Luft gefüllte Röhren von 0,1 bis 0,2 mm Durchmesser liegen normal zur Oberfläche. Dieselben sind zylindrisch oder konisch, zeigen drei und mehr Anschwellungen oder sind in einzelne Kugeln oder kürzere zylindrische Stücke zerfallen. Die Röhren liegen vorzugsweise auf den Diagonal- oder Mittelflächen und zeigen häufig weiße Wände von 0,02—0,06 mm Dicke.

Die Röhrchen wachsen auf den Diagonalflächen unter Einwirkung von Auerlicht. An der Oberfläche entstehen unter Einwirkung von Sonnenlicht, oder elektrischem Bogenlicht feine Furchen und Schaumwände normal zur Oberfläche, die

sich unter Winkeln von 120° schneiden, entsprechend den Haarspalten des Gletschereises.

Nach $^1/_2$—1 Stunde entstehen auf den Diagonalflächen trübe weißliche Flecke mit unzähligen runden Blasen von 0,03 mm. Später erscheinen Schnüre von nebeneinander gereihten Kugeln von 0,1—0,2 mm, jede mit einer kleinen Luftblase (oder luftleeren Blase) von 0,01—0,04 mm im oberen Teile. Die Luftblasen sind um so kleiner, je kleiner die Flüssigkeitskugel ist, in der sie liegen.

Durch einen kurzen Schlag oder durch den Druck einer Stahlspitze spaltet der Eisblock nach den basalen und vertikalen Diagonalflächen und nach der Mittelfläche, also an den Stellen, wo die angereicherte Mutterlauge der Salze gefroren ist, mit welchem das Wasser verunreinigt war.

Die abgespaltenen Eisbrocken konnten in einer flachen Glasschale während des langsamen Abschmelzens unter dem Polarisationsmikroskop untersucht werden.

Man sieht dann verschieden orientierte Eiskristalle oder Gletscherkörner, die durch ebene oder kugelförmige sichtbare oder unsichtbare Schaumwände mit Neigungswinkeln von 120°, 110° . . . voneinander getrennt sind. Nach mehrstündigem Tauen sieht man zahlreiche parallele Schnüre von Kugeln oder Linsen von 0,04—0,12 mm Durchmesser, in deren oberem Teile allmählich kleine luftleere Blasen auftreten, die also aus geschmolzener ölartiger Salzlösung bestehen. Die Kugeln und Linsen derselben Schnur zeigen oft wechselnde Größe, aus der sich erkennen läßt, daß sie beim Frieren der Flüssigkeit aus massiven und hohlen Zylindern oder langgestreckten Kegeln mit Anschwellungen entstanden sind, indem die Oberfläche der ölartigen Flüssigkeit möglichst klein werden wollte. Die Linsen können stark gewölbt oder flach sein und sind von zwei kugelförmigen Schaumwänden begrenzt, die in einer größeren dünnen, ebenen, gewundenen oder windschiefen Schaumwand hängen. Kugeln und Linsen können vor dem Schmelzen klaren oder weißlichen Inhalt haben.

Häufig liegen viele Schnüre von Hunderten von Linsen, die keine oder kleine luftleere Blasen enthalten, parallel nebeneinander auf unsichtbaren gewundenen Schaumwänden. Die Größe der Linsen nimmt von Schnur zu Schnur allmählich ab,

von 0,08 bis 0,0005 mm und kleiner. Die Schaumwand erscheint dann trübe bei schwacher Vergrößerung. Die Trübung nimmt mit der Zeit zu, wenn mehr luftleere Blasen sich bilden und erst bei sehr starker Vergrößerung erkennt man die Linsen, die von zwei flachen Kugelflächen begrenzt oder auch flache Zylinder sind, mit einer flachen zylindrischen Hohlblase in der Mitte.

§ 175. *Kleine Eisblöcke aus sehr verdünnter Salzlösung.* Der Einfluß eines geringen Salzgehaltes des Wassers auf die Beschaffenheit des Eises wurde in folgender Weise untersucht.

Vier Tröge von 10,5 × 5 × 4 cm wurden gleichzeitig mit ausgekochtem destillierten Wasser gefüllt, einige Tropfen $^1/_{10}$ Normallösung verschiedener Salze zugesetzt, die verdünnte Salzlösung in den Trögen ausgekocht und noch heiß in die Kältemischung eingehängt. Nach 4—6 Stunden wurden die Eisblöcke herausgenommen und nebeneinander auf einen 6 cm breiten Streifen Leinwand gesetzt, der auf einer horizontalen Glasplatte lag. Von dem spitz zugeschnittenen Ende des Leinwandstreifens, der am Rande der Glasplatte herabhing, tropfte das Schmelzwasser in ein untergestelltes Gefäß.

Der Eisblock aus salzhaltigem Wasser wurde wie ein Eisblock aus salzfreiem Wasser allmählich unten breiter, floß zu einer abgestumpften Pyramide mit breiter Basis auseinander, wie eine flüssige Leimgallerte. Gleichzeitig schmolz das Eis an der Leinwand fest. Der untere Teil schmolz am Rande schneller ab, als in der Mitte, wurde dadurch konvex und der Eisblock kippte um.

Die nachstehende Zusammenstellung p. 28 gibt die Konzentration der Salzlösung in Milliontel der Wassermenge. Ein *W* oder *M* gibt an, ob das Eis in Trögen aus Weißblech oder aus Messing gefroren war.

Im allgemeinen waren die gleichzeitig gefrorenen Eisblöcke einer Horizontalreihe um so trüber, enthielten um so mehr Luftblasen, mit Luft gefüllte Röhrchen und weißliche Schaummassen, je größer der Salzgehalt des Wassers war.

Ein Gehalt von 1 Milliontel NaCl oder KCl hat schon merklichen Einfluß. Der Eisblock mit 855×10^{-6} SiO_2 war stark trübe; die Eisblöcke mit 500×10^{-6} Gips, Gelatine oder Eiweiß erschienen milchig weiß; die Eisblöcke mit noch größerem

Salzlösungen in Kältemischung schnell gefroren.

Nr.		Konzentration in Millliontel				
1	Natriumchlorid	0	1	10	100	*W*
2	„	0	3	30	300	*W*
3	Kaliumchlorid	0	1	12	120	*M*
4	Kaliumkarbonat	0	1,4	14	140	*M*
5	Calciumsulfat	0	10	100	500	*M*
6	„	0	10	122		*M*
7	Eisenchlorid		16	27	80	*W*
8	Eisenoxydhydrat		14	29		*M*
9	Kieselsäure	0	17	170		*M*
10	„		17	51	250	*M*
11	„	0		171	855	*M*
12	Gelatine	0	50	500	5000	*M*
13	β-Eiweiß	0	50	500	2500	*M*
14	„	17	35	50	83	*M*

Gehalt an Gelatine und Eiweiß noch stärker milchig weiß. Ein Zusatz von Kieselsäure, Gelatine oder Eiweiß zum Wasser ändert nur wenig dessen Gefrierpunkt und dadurch auch verhältnismäßig nur wenig das Aussehen des Eisblocks, zu dem das Wasser erstarrt.

Die trüben Stellen treten besonders da auf, wo sich beim Auskristallisieren des reinen Eises die Mutterlauge anreichert, also in der Mittelfläche und den Diagonalflächen.

Vier kleine Tröge aus Messingblech wurden mit kochendem destillierten Wasser gefüllt, in drei Tröge je 10 Tropfen einer $^1/_{10}$ Normallösung von NaCl, K_2CO_3, $CaCl_2$ gebracht und die vier Tröge gleichzeitig in dieselbe Kältemischung eingesenkt. Die Lösungen enthielten 10 milliontel NaCl oder äquivalente Mengen der anderen Salze. Ebenso wurde mit vier kleinen Trögen aus Weißblech verfahren nach Zusatz von je 10 Tropfen $^1/_{10}$ Normallösung von $MgCl_2$, $FeCl_3$, $Al_2(SO_4)_3$.

Je nach der Art des zugesetzten Salzes zeigten die Eisblöcke verschiedenes Ansehen, verschiedene Gestalt der Röhren und Schaummassen und verschiedene Trübung der Mittelfläche und der Diagonalflächen. Die Trübung war bei reinstem Wasser am kleinsten, bei $CaCl_2$ bez. $Al_2(SO_4)_3$ am größten.

Nach der Trübung geordnet folgten die Eisblöcke in der Reihenfolge

$$\text{Wasser} < NaCl < K_2CO_3 < CaCl_2$$
$$\text{Wasser} < MgCl_2 < FeCl_3 < Al_2(SO_4)_3.$$

Ob der obere oder untere Teil des Eisblocks in der Mittelschicht trüber erscheint, hängt von der Geschwindigkeit des Gefrierens und dem spezifischen Gewicht und der Klebrigkeit der angereicherten Mutterlauge ab. Geschieht das Gefrieren so langsam, daß die spezifisch schwerere Salzlösung noch Zeit hat, in der noch flüssigen Mittelschicht nach unten zu sinken, so erscheint der untere Teil der Mittelschicht trüber, als der obere Teil. Gefriert die Flüssigkeit so schnell, daß dies nicht möglich ist, so gefriert die durch Auskristallisieren des reinen Eises angereicherte Mutterlauge an der Stelle, wo sie entstanden ist, und Mittelfläche und Diagonalflächen erscheinen im oberen Teile des Eisblocks trüber. So beobachtete ich den unteren Teil des Eisblocks klarer

bei $NaCl$, KCl, $MgCl_2$, $FeCl_3$, $CaSO_4$,

den oberen Teil klarer

bei $NaCl$, KCl, K_2CO_3, $CaCl_2$, $Al_2(SO_4)_3$.

Bei 1 und 10 Milliontel NaCl oder bei 1 und 12 milliontel KCl war die Trübung im oberen Teile, bei 100 milliontel NaCl oder 120 milliontel KCl im unteren Teile des Eisblocks größer. Das größere spezifische Gewicht der Mutterlauge begünstigt die Bildung von Schaumkammern und Trübung im unteren Teile des Eisblocks. Bei langsamem Frieren war immer der untere Teil des Eisblocks trüber als der obere (vgl. unten § 177).

Bei Belichtung mit Auerlicht entstanden auf den Diagonalflächen der Eisblöcke mit Kieselsäure gewundene Flächen mit Eisblumen, ähnlich den Tyndallschen Schmelzungsfiguren, oder trübe Lamellen mit vielen eingelagerten Linsen von 0,06 bis 0,003 mm.

Während des Frierens nimmt die luftfreie Flüssigkeit wieder Luft auf. Diese Luft scheidet sich beim Frieren des Wassers gleichzeitig mit der Mutterlauge aus. Die Grenzfläche von Luft und beinahe erstarrter sehr klebriger Flüssigkeit will möglichst klein werden, rollt sich zu Hohlzylindern zusammen von um so kleinerem Radius, je schneller das Wasser gefriert

(vgl. unten § 177). Das Wasser friert um so langsamer, je weiter es von der abgekühlten Trogwand entfernt ist, die dünnen Lamellen oder Röhrenwände aus ölartiger Salzlösung liegen normal zur festen Oberfläche der Trogwand oder des schon gebildeten Eises. Die Röhren sind in der Nähe der Trogwand horizontal, in der Nähe des mit Mutterlauge gefüllten Hohlraumes gekrümmt, teils zylindrisch, teils kegelförmig. Die Spitze des Kegels weist nach der Stelle der schnellsten Abkühlung. Wegen der Oberflächenspannung zerfallen die Röhren von 0,15—0,3 mm in kürzere Stücke von 0,8—1 mm Länge und mehr, mit runden Enden, oder zeigen Anschwellungen und Einschnürungen, oder sind in Schnüre nebeneinander liegender Blasen zerfallen.

In seltenen Fällen, in Wasser mit 10 Milliontel NaCl, bildeten die Röhren hohle, sechsseitige Säulen von 0,2 mm Durchmesser mit parallelen oder schwach gegeneinander geneigten Flächen. Die Enden der hohlen Säulen waren von einer sechsseitigen Pyramide oder einer Kugelfläche begrenzt, ähnlich den massiven Kristallen von Serumalbumin (Fig. 209, § 163, Ann. d. Phys. **15**. p. 17. 1904).

Auch ohne Luft entstehen ähnliche Gebilde, sobald sich beim Erkalten der verdünnten Salzlösung ölartige konzentrierte Salzlösung abscheidet in dünnen Lamellen. Die Gebilde sind dann statt mit Luft mit Wasser oder mit verdünnter Salzlösung oder mit derselben ölartigen konzentrierten Salzlösung gefüllt. Bei weiterem Erkalten erstarren auch diese Salzlösungen zu salzhaltigem Eis unter Volumenvermehrung, oft ohne wesentliche Änderung der Formen, die dann beim Erwärmen und Auftauen wieder hervortreten.

Die entstandene Flüssigkeit nimmt weniger Raum ein als das salzfreie oder salzhaltige Eis, aus dem sie entstanden ist. Dadurch entstehen dann die kugelförmigen Hohlräume in den mit Flüssigkeit gefüllten Röhren, Blasen und Schaumkammern. In diesen kugelförmigen Hohlräumen sammelt sich die vom Schmelzwasser absorbierte Luft. Dadurch wächst das Volumen der Hohlräume und kann größer werden, als das Volumen der benachbarten Flüssigkeit. Die luftleeren oder lufterfüllten Hohlräume lassen die Eismasse trübe erscheinen.

Beim Frieren der angereicherten Mutterlauge in der Mittel-

schicht oder den Diagonalschichten des Eisblocks scheidet sich das Salz, wie alle Niederschläge, in kurzen Zwischenräumen oder periodisch aus. Die salzreicheren Stellen bilden beim Frieren und Wiederauftauen auch mehr Schaumwände und Schaummassen, erscheinen als trübe oder weiße vertikale oder horizontale Streifen oder als parabolische Kurven auf den Mittel- oder Diagonalschichten, deren Gestalt und Lage mit der Konzentration und Klebrigkeit der Salzlösung, der Natur des Salzes, der Dauer der Belichtung und der Geschwindigkeit des Erkaltens und des Auftauens wechselt.

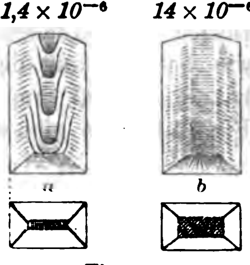


Fig. 219.
Eis mit K_2CO_3.

Solche parabolische Kurven beobachtete ich in ausgezeichneter Weise bei Eisblöcken aus destilliertem ausgekochten Wasser mit 1,4 und 14×10^{-6} K_2CO_3 (Fig. 219, *a*, *b*), das in Messingtrögen und derselben Kältemischung in 5 Stunden gefroren war. Die parabolischen Streifen entsprechen in Form und Entstehung den parabolischen Abscheidungen von Leimgallerte, die in Glasröhrchen eingeschrumpft ist (Fig. 203, § 156, Ann. d. Phys. 14. p. 880. 1904).

Die gefrorene Salzlösung wird eher schmelzen als das reine Eis und kann abfließen, sobald die festen Scheidewände zwischen den einzelnen flüssigen Stellen auch flüssig werden oder schmelzen. Die benachbarten zähflüssigen doppeltbrechenden Eismassen können die entstandenen Hohlräume zusammenquetschen oder aus dem Eisblock herausquetschen. In letzterem Falle können die Eismassen wieder zusammenfließen. Je nachdem Hohlräume im Eis neu entstehen oder vorhandene Hohlräume verschwinden, erscheint die Eismasse trüber oder klarer.

Das Eis ist um so weicher, je mehr Schaumwände aus ölartiger Salzlösung darin enthalten sind. Durch Schlag oder Druck mit dem Spitzbohrer spalten die Eisblöcke nach den Diagonal- oder Mittelflächen um so leichter, je größer der Salzgehalt ist. Die Spaltfläche zeigt häufig faserigen Bruch mit Fasern parallel den luftgefüllten oder mit verdünnter Salzlösung gefüllten Röhren. Oft scheinen die Fasern aus um-

einander geschlungenen schraubenförmigen Röhren mit langen Windungen entstanden zu sein, deren Wände an einzelnen Stellen zusammengeflossen sind, wie bei eingetrockneter Kieselsäurelösung (vgl. Fig. 6, § 9, Ann. d. Phys. 7. p. 75; Fig. 95, *a*, *b*, § 70, Ann. d. Phys. 9. p. 820. 1902).

Beim Untersuchen der abgespaltenen Eisbrocken in der flachen Glasschale unter dem Polarisationsmikroskop kann man weit stärkere Vergrößerungen anwenden, als bei den großen Eisblöcken von 20 Kilo. Man findet Schaumkammern, Kugeln, Blasen und Linsen von ähnlicher Form und Anordnung, wie bei Eis aus destilliertem Wasser. Röhren und Kugeln haben 0,3—0,1 mm Durchmesser, bis herab zu 0,0005 mm. Fig. 221, *a*—*h* gibt eine Reihe der Formen, welche beim Abschmelzen gipshaltigen Eises beobachtet wurden. Dieselben Formen kommen aber auch in Eis mit anderen Salzen vor. Die Formen Fig. 221, *b*, *d* gleichen der Fig. 173, *b*, *d* bei Leimchromat (§ 130, Ann. d. Phys. 13. p. 68. 1904); Fig. 221, *h*, *i* der Figg. 138 u. 137 (§ 100, Ann. d. Phys. 11. p. 75. 1903) bei Leimtannat. Die Anschwellungen Fig. 221, *f*, *g*, *h* nähern sich um so mehr der Kugelform, je gipsreicher das Eis ist.

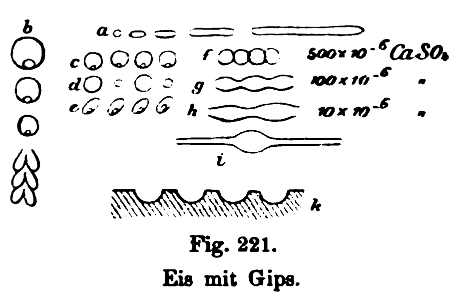


Fig. 221.
Eis mit Gips.

Im allgemeinen erscheinen um so mehr Schaumwände, parallele zylindrische oder kegelförmige Röhren mit Anschwellungen oder Schraubenwindungen, und parallele Schnüre von Kugeln oder Linsen mit Luftblasen, die Röhren sind um so dünner und die Schaumkammern um so kleiner, je größer der Salzgehalt der benutzten Salzlösung ist.

In den Eisbrocken aus Wasser mit 120 milliontel KCl oder 140 milliontel K_2CO_3 oder 142 milliontel Na_2SO_4 habe ich auch spiralförmig gewundene Bänder beobachtet von 0,2 bis 0,6 mm Durchmesser und denselben Formen, die ich bei eingetrockneten Kolloidlösungen von Kieselsäure, Eisenoxydhydrat oder Eiweiß (Fig. 99, § 70, Ann. d. Phys. 9. p. 828; Fig. 103, *c*, *d*, § 97, 9. p. 971; Fig. 125, § 90, 10. p. 501)

beobachtet und durch größere Oberflächenspannung auf der konkaven Seite erklärt habe.

Nach längerem, 6 stündigem Abtauen erscheinen weniger Schaumwände und größere Schaumkammern. Die Flüssigkeitskugeln sind größer, die Erscheinungen werden regelmäßiger und übersichtlicher. Man erkennt die großen verschieden orientierten Eiskristalle oder Gletscherkörner, die durch flüssige ebene oder kugelförmige oder bandförmig gewundene Schaumwände voneinander getrennt sind. Diese Eiskristalle oder Gletscherkörner sind von vielen parallelen Reihen flüssiger Kugeln und Linsen mit kleinen luftleeren oder luftverdünnten Hohlkugeln durchzogen, die parallel den luftgefüllten Röhren liegen, normal zur ursprünglichen Oberfläche des Eisblocks. Die Flüssigkeitskugeln der Schnüre sind nach längerem Abtauen größer geworden und enthalten größere Luftblasen als nach kürzerem Abtauen, indem die kleinen Flüssigkeitskugeln in der doppeltbrechenden Eismasse zu größeren Kugeln zusammengeflossen sind. Größerer Salzgehalt befördert das Zusammenfließen. Die Röhren oder Schnüre von Kugeln lassen sich oft durch mehrere Gletscherkörner stetig verfolgen. Auf den Scheidewänden der Gletscherkörner erscheinen bei Belichtung oft Hunderte von kleinen Linsen (Fig. 220).

Fig. 220.

§ 176. *Eis aus verdünnter Salzlösung, langsam gefroren.* Läßt man verdünnte Salzlösungen in den kleinen Trögen aus Messing oder Weißblech in freier Luft bei einer Temperatur von -2 bis -5^0 gefrieren, so schreitet die Kristallisation des reinen Eises langsam von außen nach innen fort, Luft und Mutterlauge werden von den langsam wachsenden Kristallen zurückgedrängt. Die Luft hat Zeit in der Mutterlauge aufzusteigen und zu entweichen. Ein dicker Mantel aus reinem Eise umschließt die angereicherte Mutterlauge im Innern. Das klare Eis dieses Eismantels läßt sich um so schwerer mit dem Messer schneiden, ist um so härter und reiner, je langsamer die Salzlösung gefroren ist, je höher die Temperatur der Luft war. Das Eis enthält um so mehr luft- und salzhaltige Röhren und Schaummassen, je schneller es gefroren ist. Die Gestalt der Röhren und Schaumkammern hängt von der Zeit ab,

während welcher die Oberflächenspannung der klebrigen ölartigen Flüssigkeit wirken konnte, oder von der Geschwindigkeit, mit der die Flüssigkeit erstarrt ist. Und da die Abkühlung bei konstanter Lufttemperatur um so langsamer erfolgt, je weiter die Flüssigkeit von der kalten Trogwand entfernt ist, so wechseln bei gleichem Luft- und Salzgehalt des Wassers die Formen der Röhren und Schaumwände mit dem Abstand von der Trogwand.

Die Mutterlauge reichert sich in den Diagonal- und Mittelflächen an, erstarrt hier zuletzt zu verhältnismäßig salzreichen Schichten, die bei Belichtung oder genügend langsamem Auftauen eher schmelzen, als der Mantel aus reinem Eis und die als erstes Schmelzwasser abfließen können.

Die folgende Zusammenstellung gibt in jeder Horizontalreihe die Konzentrationen der Salzlösungen, welche gleichzeitig in vier Trögen aus Messing oder Weißblech in freier Luft in 18—60 Stunden gefroren sind.

Salzlösungen in freier Luft langsam gefroren.

Nr.		Konzentration in Milliontel				
1	Gips	0	0	10	122	*M*
2	Natriumsilikat		21	42	126	*W*
3	„	0	213	2130	10500	*W*
4	Natriumsulfat	0	1,3	14,2	142	*M*
5	Kochsalz	0	1,2	3,5	11,7	*W*

Die Lösungen von Gips und Natriumsilikat waren vollständig gefroren. Bei den Lösungen von Natriumsulfat und Kochsalz umhüllte ein Eismantel von 1—2 cm Dicke die angereicherte Mutterlauge. Für die gleichzeitig gefrorenen Eisblöcke einer Horizontalreihe waren Mittelschicht und Diagonalschichten im unteren Teile des langsam gefrorenen Eisblocks im allgemeinen um so trüber, enthielten um so mehr Schaumwände und um so kleinere Schaumkammern, je größer die Konzentration der Salzlösung war. Die Salzlösung war in der Mittelschicht angereichert worden und als spezifisch schwerere Flüssigkeit in der noch flüssigen Mittelschicht nach unten gesunken.

Mit kurzem Schlag oder Druck mit einem Spitzbohrer

spalteten die Eisblöcke stets nach den basalen oder vertikalen Diagonalflächen oder der Mittelfläche, auch in der Außenschicht von klarem Eise. Die Spaltflächen zeigten faserigen Bruch mit Fasern parallel den luftgefüllten Röhren, die in den Diagonalflächen lagen, normal zur Oberfläche des Eisblocks. Die Fasern waren gewöhnlich um so schmaler, je größer die Konzentration der Salzlösung war.

Das Wasser mit 10 und 122 milliontel *Gips* war vollständig gefroren. In den Diagonalflächen sah man schraubenförmig gewundene weiße Flächen mit unzähligen nebeneinander liegenden Luftbläschen von 0,005 mm. Beim Belichten mit Tageslicht erscheinen nach 10 Min. in den Diagonalflächen neue Eisblumen, ähnlich den Tyndallschen Schmelzungsfiguren. Sonnenlicht entwickelte auf der vertikalen Diagonalfläche des gipsreichsten Eises viele flüssige flache Linsen von 0,3—0,6 mm Durchmesser.

Ähnliche Eisblumen oder trübe vertikale Streifen mit vielen flüssigen Linsen entstanden durch Tageslicht auf den Diagonalflächen des Eisblocks aus Wasser mit 21—213 milliontel *Natriumsilikat*, auch in der vorher klaren äußeren Eisschicht. Die salzhaltige Mutterlauge war in kurzen Zwischenräumen mit periodisch wechselndem Salzgehalt gefroren.

Im oberen Teile des klaren Eises lagen Schnüre von Flüssigkeitskugeln mit luftleeren Blasen im oberen Teile jeder Kugel. Ferner gewundene zylindrische und kegelförmige Röhren mit kugelförmigen Querwänden und mit klarer Flüssigkeit gefüllt. In jeder Abteilung der Röhre lag oben eine luftleere Blase (Fig. 222, *a*—*d*). In der Mitte der Mittelschicht lag ein gewundenes Rohr mit Querwänden und Anschwellungen, wie ich es früher Fig. 145, *a* (§ 101, Ann. d. Phys. 11. p. 80. 1903) bei aufgequollenem Leimtannat beschrieben habe.

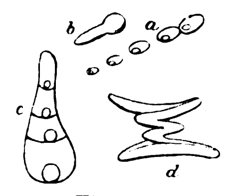


Fig. 222.
Eis mit Na_2SiO_3.

Der elektrische Strom einer Akkumulatorenbatterie von 69 Volt wurde mit zwei großen Stecknadeln durch die Eisblöcke mit Natriumsilikat geleitet. Ein gleichzeitig eingeschaltetes Galvanometer zeigte um so stärkeren Strom — bis $^1/_{600}$ Amp. — je näher die Nadeln den salzreicheren Stellen in der Mittel-

fläche und in den Diagonalflächen des langsam auftauenden Eisblocks kamen.

Sonnenlicht entwickelte trübe oder milchweiße Stellen mit vielen nebeneinander liegenden flüssigen Linsen in den vertikalen Diagonalflächen der Eisstücke mit 1,2—11,7 milliontel Kochsalz.

Bei dem Wasser mit 1,4 und 14 milliontel *Natriumsulfat* war in 18 Stunden nur die Außenschicht zu klarem Eise gefroren. Ein kolbenförmiger Hohlraum, der bis zu den basalen Diagonalflächen herabreichte (Fig. 223, *a*) enthielt die Mutterlauge mit vielen ebenen Kristallblättchen von reinem Eis, die durch Lage, Neigungswinkel und Gestalt deutlich erkennen ließen, daß sie aus ölartigen dünnen Schaumwänden von reinem Wasser entstanden waren, die sich beim Erkalten der wässerigen Salzlösung ausgeschieden hatten und dann gefroren waren. Die flachen Kristallblätter lagen vielfach normal zur Oberfläche des von festem Eis umgebenen Hohlraumes. In dem Eisblock mit $1{,}4 \times 10^{-6}$ Natriumsulfat waren diese flachen Kristallblättchen besonders deutlich.

Ähnliche flache Eiskristalle aus erstarrten Schaumwänden von ölartigem Wasser habe ich in der Mutterlauge eines Eisblocks aus Wasser mit 30 milliontel *Kochsalz* beobachtet.

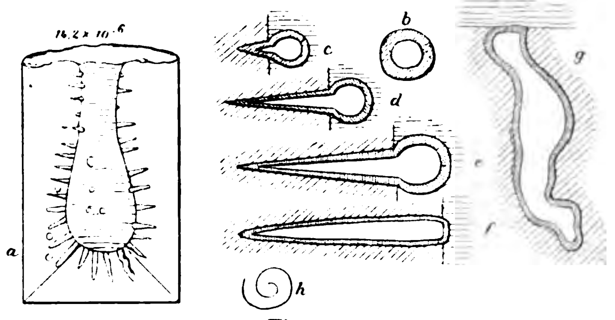


Fig. 223.
Eis mit Na_2SO_4.

In dem Eisblock aus Wasser mit 14,2 milliontel *Natriumsulfat* lagen in dem klaren Eismantel, der den Hohlraum mit Mutterlauge umgab, viele kugelförmige mit Luft gefüllte Röhrchen, mit der Längsrichtung normal zur gemeinsamen Grenzfläche von Eis und Mutterlauge (Fig. 223, *a*). Die kegelförmigen

Röhrchen wiesen mit der Spitze nach der Außenseite des klaren Eisblocks, hatten 6—12 mm Länge an der Basis, in der Grenzfläche von Eis und Mutterlauge 1—2 mm Durchmesser, und waren im Innern mit einer 0,3 mm dicken Haut von weißem Eis bekleidet. Ein Teil der kegelförmigen Röhrchen endete im Innern der Mutterlauge in eine Hohlkugel von weißem Eise von gleicher Dicke (Fig. 223, *b—e*). Ein anderer Teil der Röhrchen hatte mehr zylindrische Form mit Anschwellungen oder Schraubenwindungen (Fig. 223, *f, g*). Im Innern der Mutterlauge lagen zwischen den erstarrten Schaumwänden auch einzelne kugelförmige Luftblasen von 3 mm Durchmesser mit einer weißen Hülle von 0,5 mm Dicke (Fig. 222, *b*). Einzelne Eisbrocken zeigten spiralförmige Zylinderflächen von 0,2 bis 0,6 mm Durchmesser wie bei Kieselsäure, Eiweiß oder sogenanntem Réaumurschen Porzellan (Fig. 223, *h*).

Eis und Mutterlauge der Eisblöcke mit 1,4, 14,2 und 142 milliontel *Natriumsilikat* enthielten ähnliche luftgefüllte Röhrchen oder zu Eiskristallen erstarrte Schaumwände mit ähnlichen mehr oder weniger charakteristischen Formen.

Form und Lage der kegelförmigen Röhren beweisen, daß sehr klebrige ölartige Lamellen von verdünnter Salzlösung normal zur Grenzfläche von erstarrendem Wasser und flüssiger Mutterlauge entstanden und durch Oberflächenspannung zu um so dünneren Röhren zusammengerollt sind, je schneller die Erkaltung von außen nach innen fortschritt.

Die langsam und unregelmäßig in rostigem Weißblech gefrorenen Eisblöcke mit 0, 1,2, 3,5, 11,7 milliontel *Kochsalz* enthielten ebenfalls von klarem Eis umschlossene Hohlräume mit braungelber Mutterlauge. In dem klaren Eismantel lagen in den basalen und vertikalen Diagonalflächen ebenfalls 6 bis 10 mm lange kegelförmige, mit Luft gefüllte Röhren von 0,6 mm Durchmesser normal zur inneren Eisoberfläche. Der untere Teil der Mittelfläche enthielt von Eisenoxyd braun gefärbte Schaumkammern.

Auf der Innenseite des Eismantels lagen tiefe Furchen und dicke Schaumwände, auf der Außenseite feine Furchen und feine Schaumwände, normal zur Oberfläche mit Neigungswinkeln von 120°, seltener von anderer Größe. Furchen und Schaumwände an der Außenseite treten oft erst bei Belichtung

hervor, entsprechen den Forelschen Streifen und Haarspalten des Gletschereises oder den sechsseitigen Säulen der großen Eisblöcke aus destilliertem Wasser (§ 172, 173). Ihre Breite wechselt mit der Erkaltungsgeschwindigkeit des Wassers und kann auf der beim Gefrieren dem Fenster zugekehrten Seite desselben Eisblocks kleiner sein, als auf der gegenüberliegenden Seite.

Mit dem Spitzbohrer abgespaltene Stücke der langsam gefrorenen Eisblöcke zeigen bei langsamem Schmelzen in einer flachen Glasschale unter dem Polarisationsmikroskop ähnliche Erscheinungen, wie die in Kältemischungen schnell gefrorenen Eisbrocken: zylindrische und kegelförmige Röhren mit Anschwellungen, normal zur Oberfläche und parallel den etwa vorhandenen mit Luft gefüllten Röhrchen, daraus entstandene parallele Schnüre von kurzen Röhrchen, Kugeln, Linsen oder flachen Scheiben mit weißem Eise oder klarer Flüssigkeit gefüllt, mit klaren oder weißlichen Wänden, ohne und mit luftleeren oder lufterfüllten Blasen im Innern der Flüssigkeit.

Sehr verdünnte Lösungen verschiedener Salze müssen, unter ähnlichen Bedingungen langsam gefroren, ölartige Lamellen mit verschiedener Klebrigkeit und verschiedener Oberflächenspannung, oder Kugeln, Blasen, Röhren und Schaumwände von verschiedener Gestalt geben. Der Versuch bestätigte diese Vermutung.

Ich habe in acht Tröge Wasser mit 11,7 milliontel NaCl oder äquivalenten Mengen KCl, K_2CO_3, Na_2SO_4, $CaCl_2$, $MgCl_2$, Na_2SO_4, $Al_2(SO_4)_3$ gefüllt, die verdünnten Salzlösungen ausgegossen und die nassen Tröge mit reinem, frisch ausgekochtem destillierten Wasser gefüllt. Das Wasser, das also nur Spuren dieser acht Salze enthielt, ließ ich wieder langsam vor dem Fenster in freier Luft frieren, in den acht Trögen nebeneinander. Die Mutterlauge von Salz und wieder absorbierter Luft reicherte sich in Diagonal- und Mittelflächen an, und bildete hier Röhren, Blasen und Schaumkammern mit Wänden aus ölartiger Flüssigkeit. Fig. 224, *a* u. *b*, Taf. I [Photographie] zeigen das verschiedene Aussehen der Eisblöcke aus diesen höchst verdünnten Salzlösungen.

§ 177. *Eis, verschieden schnell gefroren.* Je schneller Wasser mit sehr geringem Salzgehalt friert, um salzhaltiger, trüber

und weicher ist das Eis, um so mehr Schaumwände enthält es. Je langsamer das Wasser friert, um so reiner, klarer und härter ist das Eis.

Eis in einigen Tagen gefroren.

Ich ließ 20 Kilo Wasser der Heidelberger Wasserleitung[1]) in dem großen Messingtrog auf einem Rasenplatz bei einer Temperatur wenig unter 0° langsam frieren. Fig. 225, *a* u. *b*, Taf. I [Photographie] zeigen die Vorder- und Seitenansicht des umgekehrten Eisblocks nach vierstündigem Tauen, von Sonnenlicht beleuchtet. Man erkennt gut die horizontalen Röhrchen der Diagonalflächen, die weißen Schaumkammern der Mittelfläche und das Auseinanderfließen der Eismasse nahe den Bindfäden und gegenüber dem oberen Querstück des Arbeitsbocks.

Ein anderer Eisblock gleicher Größe aus demselben Leitungswasser war langsamer gefroren. In einigen Tagen hatte sich ein Eismantel gebildet von etwa 5 cm Dicke, der die noch flüssige Mutterlauge umhüllte. In dem klaren und sehr harten Eise lagen trübe Schaumwände (Fig. 225, *c*, Taf. I) [Photographie] mit vielen parallelen Reihen oder Schnüren von Kugeln und Linsen von 0,01—0,2 mm oder von Luftblasen von 0,1 mm Durchmesser. Die Reihen hatten 0,06 mm Abstand voneinander. Nach starker Beleuchtung zeigten sich viele Schnüre von flüssigen Kugeln oder Linsen mit luftleeren oder luftverdünnten Blasen von 0,002—0,003 mm Durchmesser, die zu Tausenden in Kreisbogen oder radial nebeneinander lagen in gekrümmten Lamellen. Die dadurch getrübten Lamellen bildeten

1) M. Dittrich fand in dem Wasser der Heidelberger Wasserleitung (Habilitationsschrift, Heidelberg 1897. 8°. p. 23):

	In Milliontel		
	Quellen	Pumpwerk I	Pumpwerk II
Kieselsäure	8,492	14,575	12,175
Eisenoxyd und Tonerde	0,328	0,30	0,40
Kalk	7,532	21,375	37,50
Magnesia	1,497	4,673	4,79
Kali	1,358	2,50	1,83
Natron	2,281	3,40	3,16
Schwefelsäure	0,954		

beim Auftauen an der Oberfläche des Eisblocks Furchen, waren also salzhaltiger, als das benachbarte klare Eis.

Nach 12 stündigem weiteren Auftauen bei niederer Temperatur in einem Nickelgefäß zeigten sich auf trüben Flächen Tausende vieler flacher Linsen von abnehmender Größe nebeneinander (0,68 × 0,28 mm; 0,28 × 0,2 mm; 0,36 × 0,17 mm; 0,36 × 0,1 mm) mit kleinen luftleeren oder luftverdünnten Blasen von 0,08—0,002 mm oder mit flachen zylindrischen Scheiben von 0,64 mm Durchmesser und 0,03 mm Dicke und einer zentralen Blase von 0,2 mm.

Ich ließ das klare Eis in einem Nickelgefäß schmelzen, das Schmelzwasser in Messingtrögen von 10 × 5 × 4 cm langsam zu einem Eismantel erstarren. Die Mutterlauge wurde fortgegossen, der klare Eismantel wieder geschmolzen, in dem Schmelzwasser durch langsames Gefrieren im Messingtrog wieder ein neuer Eismantel erzeugt etc. Durch Wiederholen dieser Operation erhielt ich immer klareres und festeres Eis, mit immer weniger Röhren und weniger Schaumwänden in den Diagonal- und Mittelflächen. Ich habe auf diese Weise reineres Eis erhalten, als aus dem reinsten ausgekochten destillierten Wasser.

In dem klaren Eise lagen hohle, mit Luft gefüllte Röhrchen normal zur Oberfläche. Auf der Innenseite des Eismantels lagen tiefe Furchen von 0,2 mm mit Neigungswinkeln von 120°, auf der Außenseite feine Furchen, an welche sich feine Schaumwände normal zur Oberfläche anschlossen, ebenfalls mit Neigungswinkeln von 120°. Die Schaumkammern an der Oberfläche waren 1—2 mm breit.

Der Eisblock spaltete durch Druck mit dem Spitzbohrer immer noch nach Diagonal- und Mittelfläche, besonders leicht nach den basalen Diagonalflächen und dem unteren Teil der Mittelfläche, wo sich die konzentrierteste Salzlösung angesammelt hatte. Die Bruchflächen zeigten faserigen Bruch, mit Fasern normal zur Oberfläche des Eisblocks und von um so größerer Dicke, je reiner das Eis war. Die abgespaltenen Eisbrocken zeigten beim Abschmelzen in einer Glasschale unter dem Polarisationsmikroskop um so dickere parallele Röhren, um so weniger und um so größere Kugeln und Linsen, um so größere Schaumkammern und Gletscherkörner, je öfter das Eis umgeschmolzen war. Dabei traten beim Abtauen die Kugeln und

Linsen und die kleinen luftleeren Blasen in den flüssigen Kugeln und Linsen um so später hervor, je reiner das Eis war, je weniger Salz die Salzlösung der Kugeln und Linsen enthielt, je näher der Schmelzpunkt der Salzlösung dem Schmelzpunkt des reinen Eises lag. Die nebeneinander liegenden Gletscherkörner waren verschieden oder gleich orientierte Eiskristalle, aber nur in sehr seltenen Fällen lag die optische Achse des Eiskristalles parallel der Oberflächennormalen des Eisblocks.

Vor dem vollständigen Abschmelzen erscheinen einzelne Gletscherkörner am Rande der Eisbrocken einfach brechend.

Ausgekochtes Wasser der Heidelberger Wasserleitung war in dem großen Messingtrog nach zehn Tagen im Freien gefroren zu einem klaren harten Eisblock von 110 cm Länge, 18×10 cm am oberen, 14×7 cm am unteren Ende. Die eine Seite war langsamer gefroren als die andere. Die eine Seite der Mittelfläche erschien daher weniger trübe, als die andere. Fig. 226, *a, b,* Taf. I [Photographie] gibt den oberen Teil des umgekehrten Eisblocks von der breiten und von der schmalen Seite gesehen.

Im obersten breiteren Teile des Eisblocks lagen auf einer Strecke von 10 cm Höhe 16 horizontale Schichten mit Luftblasen von 0,3—5 mm Durchmesser, deren Abstand oben am größten, unten am kleinsten war und kontinuierlich von 4 bis 1,5 mm abnahm. Im allgemeinen waren oben die größeren Luftblasen eingefroren.

In den Diagonalflächen lagen viele horizontale, mit Luft gefüllte Röhrchen (Fig. 227, *a*—*m*). Eine Reihe derselben Formen kann man bei der Bildung von Ölsäureschäumen oder Myelin beobachten. Fig. 227, *a* gleicht der ersten Form von Myelin (Fig. 15, Taf. VIII, Wied. Ann. **53**. p. 607. 1894). An einer Stelle 25 cm über der Basis sah man zwölf horizontale Schnüre dicht aneinander gereihter runder Blasen von 0,2 mm Durchmesser vertikal übereinander liegen (Fig. 227, *n*). An anderen Stellen der vertikalen Diagonalschicht lagen viele horizontale Röhrchen von 20—30 mm Länge und 1,1 mm Durchmesser, die nach außen spitz zuliefen, mit weißen Wänden und mit Luft oder klarer Flüssigkeit, oft auch mit weißem Eise gefüllt.

Im unteren Teil des umgekehrten Eisblocks (wie in Fig. 215, *a*) floß klare Flüssigkeit wellenförmig in dünnen gewundenen Schraubenflächen ab.

Nach 20 Stunden lagen auf der oberen scharfen Kante des stark abgeschmolzenen und in sich zusammengesunkenen Eisblocks graue Schlammteilchen, in welchen das Mikroskop einzelne winzige Kristalle von Kalkspat und Gips erkennen ließ.

Zuweilen habe ich auf der Mittelfläche dieser großen im Freien gefrorenen Eisblöcke aus Leitungswasser auch vier trübe

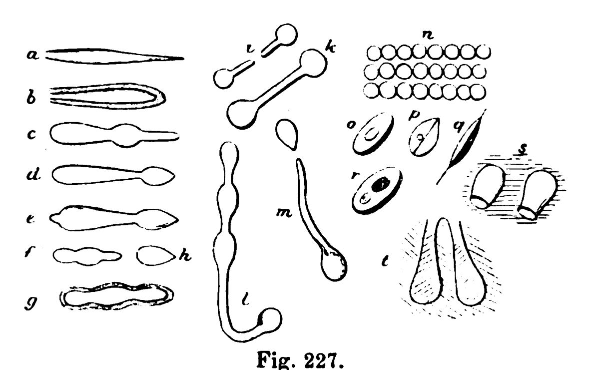


Fig. 227.
Eis langsam gefroren.

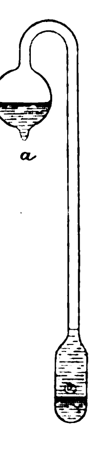
nach unten parabolisch begrenzte Streifen gesehen, ähnlich wie bei dem kleinen Eisblock Fig. 219, *a*. Beim Belichten mit elektrischem Bogenlicht schmolz das Eis im Innern des Eisblocks an diesen Stellen, die Flüssigkeit floß nach unten ab und neue trübe Lamellen mit Tausenden von Luftbläschen von 0,003 bis 0,002 mm Durchmesser traten an anderen Stellen hervor.

Nach langsamem Auftauen über Nacht bei einer Temperatur über 0° sah man auf den trüben Flächen Linsen und flache Scheiben von 0,8—0,3 mm mit hohlen zentralen Blasen (Fig. 227, *o*—*r*). Beim Abschmelzen der Eisbrocken in einer flachen Glasschale unter dem Polarisationsmikroskop erschienen an einigen Stellen kolbenartige Gebilde, mit Flüssigkeit oder festem Eise gefüllt (Fig. 227, *s*, *t*).

Eis in einigen Minuten gefroren.

Ein sogenanntes Kryophor (Fig. 228, *a*) besteht aus einer vertikalen Glasröhre mit einer Glasbirne am unteren und einer

Glaskugel am oberen abwärts gebogenen Ende. Der Apparat ist halb mit ausgekochtem Wasser gefüllt und luftleer zugeschmolzen. Setzt man die Glasbirne in eine Kältemischung von — 20° bis — 15°, so geht der Wasserdampf von der wärmeren Glaskugel mit hohem Dampfdruck zu der erkalteten Glasbirne mit niederem Dampfdruck. Das Wasser der oberen Glaskugel erstarrt durch die zur Dampfbildung abgegebene Wärme in wenigen Minuten zu einer milchweißen Eismasse. Der Wasserdampf kondensiert sich in der erkalteten Glasbirne zu einer trüben Eismasse. Das Wasser der Glaskugel hat im Laufe vieler Jahre Salze aus dem Glas aufgenommen, ist salzreicher und gibt weißeres Eis mit mehr Schaumwänden, als das frisch destillierte Wasser der Birne. An der Eisoberfläche der Glasbirne habe ich mehrfach spitze Eisnadeln gesehen, die radial um eine kleine Blase angeordnet waren, im Innern des Eises und im luftleeren Raum über dem Eise lagen, 10—12 mm lang, an der Basis 1 mm breit, mit Anschwellungen oder mehreren Schraubenwindungen (Fig. 228, *b*). Das Gebilde radialer Röhren gleicht sehr der Form Fig. 87, *h* (§ 64, Ann. d. Phys. 9. p. 64. 1902), welche ich in kolloidaler Kieselsäurelösung beobachtet habe.





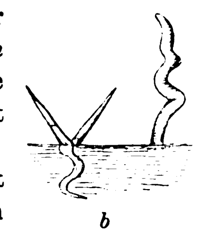


Fig. 228.

Ich habe diesen Versuch wiederholt mit einem Kryophor aus Jenaer Geräteglas gleich nach der Füllung mit reinstem destillierten Wasser. Diese Glassorte wird sehr wenig von Wasser angegriffen. In der Tat war das Eis in der Kugel und in der Birne weniger trübe, als in dem alten Apparate aus gewöhnlichem Thüringer Glas. Das Eis in der Birne war unten klar, oben von einer mehrere Millimeter dicken trüben Eisschicht bedeckt. Nach Bestrahlung mit elektrischem Bogenlicht zeigte der klare Teil, der also aus eben frisch bei niedriger Temperatur destilliertem Wasser entstanden war, drei konzentrische kugelförmige Schichten von trübem und

weniger trübem Eise mit Schaumkammern von 0,2 mm. Beim Auftauen konnte ich in der schwimmenden Eiskugel radiale Fasern normal zur Oberfläche und später Schaumkammern (Gletscherkörner) von 0,33 mm erkennen. Das trübe Eis der Glaskugel zeigte normal zur Oberfläche Röhren oder Fasern von 0,16 mm Durchmesser, enthielt im oberen Teile viele Luftblasen von 0,33 mm, die beim Auftauen oft in kurzen Kegeln mit klarer Flüssigkeit lagen, oder von einem schraubenförmig gewundenen Eisband umgeben waren (Fig. 228, *c*, *d*). Ein Teil der Luftblasen stieg beim Abschmelzen längs der Oberfläche der schwimmenden Eiskugel in die Höhe. Einzelne Blasen wurden radial nach unten in das Schmelzwasser hereingeschleudert, wohl von Ausbreitungswirbeln. Die Größe der Luftblasen erklärt sich durch den geringen Druck im Innern des Kryophors. Immerhin war das Wasser der Kugel nicht ganz frei von Luft und Salzen und auch das frisch destillierte Wasser der Glasbirne enthielt noch Salze, die sich beim Erstarren periodisch abgeschieden hatten.

Der obere Teil der Wand der Glasbirne war von einer dünnen Eisschicht bekleidet, in der Schaumkammern von 3 mm mit Schaumwänden von 140° Neigung und Spiralen zu erkennen waren. Diese Eisschicht schmolz bald.

Die sogenannten *Eisblumen an den Fensterscheiben,* in dünnen Schichten erstarrtes Wasser, zeigen sehr verschiedene Formen, die mit der Dicke der Eisschicht, der Geschwindigkeit der Eisbildung und der Reinheit des Glases wechseln. Man erkennt darin Sphärokristalle (§ 42) und Dendriten (§ 58), auch von geraden Linien und Kreisbogen begrenzte und mit Eiskristallen gefüllte Schaumkammern, mit Schaumwänden normal zur Oberfläche, welche Winkel von 120° oder anderer Größe miteinander einschließen, ähnlich wie bei dünnen und dickeren Schichten von eingetrockneter Kieselsäure und Leimchromat (Fig. 94, § 69; Fig. 175, *a*, *b*, *c*, § 130).

Die Formen der erstarrten Schaumwände von ölartigem Wasser wechseln, wie bei eingetrockneten Kolloidlösungen mit der Dicke und Entstehungsgeschwindigkeit der erstarrten Schichten.

Eis in flüssiger Luft gefroren.

Taucht man ein dünnwandiges Probierröhrchen von 18 mm Durchmesser mit 8 ccm frisch ausgekochtem kochenden Wasser in flüssige Luft von -190^0, so gefriert das Wasser sehr schnell unter Aufkochen der flüssigen Luft. Das Aufkochen ist während der Umwandlung in Eis besonders stark wegen der freiwerdenden Schmelzwärme. Das Eis im Probierröhrchen ist milchweiß, zeigt Sprünge normal zur Glasfläche und am oberen Ende eine Kuppe oder auch wohl eine Höhlung (Fig. 229, *a*).

Taucht man das auf -190^0 erkaltete Probierröhrchen mit dem Eis im Innern in destilliertes Wasser, so überzieht es sich außen mit einer dünnen klaren Eiskruste, die sich mit dem Messer ablösen und in einer Glasschale unter dem Polarisationsmikroskop untersuchen läßt. Sie besteht aus kleinen Gletscherkörnern oder Schaumkammern von 0,1 bis 0,2 mm Durchmesser, deren ebenen Schaumwände normal zur Zylinderfläche liegen und Winkel von 120^0, 110^0 etc. einschließen. Das Innere jeder Schaumkammer enthält einen Eiskristall, der in den verschiedenen Schaumkammern verschieden orientiert ist.

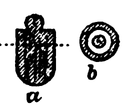


Fig. 229.

Das Eis im Innern des Probierröhrchens zeigt, mit dem Spitzbohrer zertrümmert, faserigen Bruch, mit Fasern normal zur Zylinderfläche, zuweilen im Querschnitt konzentrische Hohlzylinder von abwechselnd klarem und weißem Eise, wie bei Hagelkörnern (Fig. 229, *b*). Das Wasser und die höchst verdünnte Salzlösung, die noch im destillierten Wasser enthalten war, sind also periodisch in kurzen Zwischenräumen erstarrt. Der Wärmeverlust wird durch die latente Wärme des erstarrenden Eises verlangsamt und periodisch und damit die Erstarrungsgeschwindigkeit selbst periodisch, während die Erstarrung von außen nach innen fortschreitet. In den klaren Schichten ist das Wasser langsam, in den trüben Schichten schnell erstarrt. Die Eistrümmer zeigten in einer Glasschale unter dem Polarisationsmikroskop Gletscherkörner oder Schaumkammern mit Wänden normal zur Zylinderfläche. Die Schaumkammern sind im unteren zuerst erstarrten Teile der Eismasse kleiner als im oberen Teile. Gegen die Höhlung im oberen

Teile, welche sich bildet, sobald sich das Wasser an der erkalteten Glaswand in die Höhe zieht, erscheinen die Schaumkammern durch viele nebeneinander liegende Halbkugeln von 0,15 mm Durchmesser begrenzt (ähnlich der Schnittfläche einer Bottomleyschen Drahtschlinge § 178).

Die Eisbrocken zeigen radiale Struktur, feine Fasern und ungeheure Mengen radialer nebeneinander liegender Schnüre von kugelförmigen luftleeren Blasen von 0,0006 mm. Diese luftleeren Blasen liegen häufig (oder immer) in radialen Schnüren von Kugeln oder Linsen von 0,01—0,02 mm aus Flüssigkeit (Wasser mit sehr geringem Salzgehalt). Außerdem liegen durch die ganze Eismasse überall viele kugelförmige Luftblasen von 0,01 mm verteilt, die beim Abschmelzen in dem Schmelzwasser aufsteigen, und an dessen Oberfläche schwer beweglich erscheinen, also mit einer dünnen Haut fremder Flüssigkeit (Glaslösung, Kieselsäurelösung) überzogen sind.

Schnell gefrorenes Eis zeigt also viel kleinere Schaumkammern, Röhren, Kugeln und Zylinder als langsam gefrorenes.

§ 178. *Schnittflächen einer Bottomleyschen Drahtschlinge.* Die Schnittfläche eines klaren Eisblocks, der mit einer Bottomleyschen Drahtschlinge[1]) aus Stahldraht oder reinem, frisch geglühten Platindraht mit 2 Kilo Belastung oder mehr durchschnitten worden ist, erscheint niemals klar, sondern stets trübe von erstarrten Schaumblasen aus ölartiger Salzlösung mit anderer Lichtbrechung als die Umgebung. Denn es ist nicht anzunehmen, daß bei diesem Schmelzen und Wiedergefrieren des luftfreien klaren Eises Luft in merklicher Menge längs der unten mit flüssigem Wasser bekleideten Drahtoberfläche von außen in das Innere des Eisblocks diffundiert.

Mit dem Mikroskop erkennt man auf der trüben ebenen Schnittfläche viele kugelförmige Köpfe von 0,06—0,3 mm, wie Pflastersteine nebeneinanderliegend. Diese kugelförmigen Linsenflächen oder Schaumwände der Schnittfläche reflektieren vielfach weißliches Licht, bestehen also wieder aus kleineren Schaumkammern. Von der Seite gesehen, erscheint die

---

1) J. T. Bottomley, Nature 1872; Pogg. Ann. 148. p. 494. 1873.

Schnittfläche als eine 0,4 mm dicke trübe Schicht von gleicher Dicke, wie der Platindraht, aus dem die Drahtschlinge bestand.

Klares Eis aus Wasser mit 10 milliontel Eisenchlorid in einer Kältemischung gefroren zeigte nach dem Durchschneiden mit einer Schlinge aus Platindraht auf der Schnittfläche kleinere und regelmäßigere Schaumlinsen, als reines Eis aus destilliertem Wasser. Die Linsen hatten 0,06 mm Durchmesser. Bei Eis aus Wasser mit 10 milliontel Magnesiumchlorid waren die Schaumlinsen der Schnittfläche unregelmäßiger wie bei Eis aus destilliertem Wasser.

§ 179. *Oberflächenspannung von Salzlösungen in Eis an der Grenze mit Luft.* Alle meine Versuche bestätigen die Tatsache, daß die salzreichsten Stellen der Eisblöcke auch die meiste Luft enthalten. Für die klebrigen ölartigen Salzlösungen, welche mit sehr großer Konzentration in der Nähe von 0° auftreten, fehlen Messungen der Oberflächenspannung an der Grenze mit Luft. Während die gewöhnlichen Salzlösungen bei 0° meist eine größere Oberflächenspannung an der Grenze mit Luft haben, als reines Wasser[1]) und also durch Wasser von der Oberfläche der Luftblasen verdrängt werden, könnten die sehr klebrigen ölartigen Salzlösungen im Eise eine kleinere Oberflächenspannung haben und dadurch an den Luftblasen adhärieren.

Es wäre aber auch möglich, daß bei der außerordentlichen Verdünnung der im frierenden Wasser enthaltenen Salzlösungen die Salze dissoziiert sind und bei der niedrigen Temperatur, trotz der Konzentrationserhöhung durch Auskristallisieren des Eises, dissoziiert bleiben. Dann würde auch die durch Dissoziation verkleinerte Oberflächenspannung verkleinert bleiben.

Für eine Dissoziation der Salze, die aus dem Glase im Wasser gelöst werden, spricht auch die von mir beobachtete zeitliche Abnahme der Höhe flacher Luftblasen in Wasser, die ich „Elastische Nachwirkung an Flüssigkeitsoberflächen" genannt habe.

Die Ausbreitungswirbel, welche man beim Abschmelzen der Eisblöcke an der Oberfläche und im Innern des Eises

---

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **160**. p. 563, 568, 575. 1877.

wahrnimmt und welche auch Tyndall in den durch Belichtung entstandenen Hohlräumen im Innern des Eises wahrgenommen hat, sprechen ebenfalls für eine kleinere Oberflächenspannung an der Grenze von ölartiger Salzlösung und Luft als an der Grenze von reinem Wasser und Luft. Dabei kann außer dem durch Dissoziation entstandenen Chlor oder der Salzsäure auch Kieselsäure eine Rolle spielen, welche mit Luft haltbare Schaumblasen bildet (§ 64, Ann. d. Phys. 9. p. 801. 1902), sich also an der Grenze von Wasser und Luft ausbreitet.

§ 180. *Ähnlichkeit der Schaumkammern des Eises mit den Schaumkammern eingetrockneter Kolloidlösungen. Eis ist eine flüssige Gallerte.* Wasser mit sehr geringen Spuren Salz zeigt beim Erstarren durch Erkaltung dieselben Formen wie kolloidale Lösungen von Kieselsäure (Fig. 38, § 33; Fig. 87, § 64; Fig. 91—92, § 66), Schwefel (Fig. 115, § 79), Eiweiß (Figg. 121, 122, *b*, *g*, *h*, § 89; Figg. 123, *c*, 125, § 90), Leim (Fig. 120, *a*, *b*, *c*, *f*, *g*, *h*, § 87) beim Erstarren durch Wasserverlust oder wie Leimtannat beim Erstarren durch Wasseraufnahme (Fig. 133, *c*, § 98; Fig. 138, § 75). Gerade und gewundene zylindrische oder kegelförmige Röhren mit Anschwellungen bilden sich normal zur Oberfläche bei dem Festwerden von salzhaltigem Wasser oder Kieselsäure oder Eiweiß. Aber die Wände der Schaumkammern erstarren bei salzhaltigem Eis durch Erkaltung später, als der Inhalt der Schaumkammern, umgekehrt, wie bei den wasserhaltigen Kolloiden.

Das äußere Ansehen der Formen wechselt bei Eis und den Kolloiden mit Dicke und Erstarrungsgeschwindigkeit der erstarrten Schichten.

Sehr kleine Mengen Salz — 1 milliontel und weniger — können die Schaumwände im Eis flüssig machen für eine konstante Temperatur (wenig unter 0°), wie sehr kleine Mengen Gallussäure die Schaumwände von Leimtannat flüssig machen (§ 104). Bei beiden wird dadurch die Form der Schaumkammern, sowie deren Quellung und Schrumpfung wesentlich modifiziert.

Die Oberflächenspannung und die Neigungswinkel der ölartigen Schaumwände wechseln bei dem salzhaltigen Eis mit der Konzentration, wie bei wässerigen Lösungen von Kieselsäure, Eiweiß, Leim.

Bei einer bestimmten Temperatur und einer bestimmten Konzentration bilden salzhaltiges Eis oder Kolloide — Kieselsäure, Eiweiß, Leim, Leimtannat — flüssige Gallerte mit Schaumkammern, deren Wände und Inhalt aus zwei Flüssigkeiten A und B mit denselben Bestandteilen, aber mit verschiedener Zusammensetzung bestehen. Zwei Schaumbrocken dieser flüssigen Gallerte können langsam zusammenfließen und die Schaumkammern durch Platzen einzelner Schaumwände größer werden. Die Substanz der Schaumwände und die Substanz des Inhalts der Schaumkammern können ihre Rollen tauschen.

Belichtung, sogar sehr schwache Belichtung, kann in Eis oder in Lösungen und Gallerten von Kieselsäure, Eiweiß, Leimchromat neue Schaumwände ausscheiden oder sichtbar machen in Form von Blasen, Kugeln, Röhren oder faltenreichen Lamellen oder Sphärokristallen.

Eis mit Spuren Salz oder Luft ist eine flüssige Gallerte, ein Kolloid. Die vorstehend in §§ 171—177 beschriebenen Erscheinungen sind ganz analog denjenigen, welche ich früher bei periodischer Bildung chemischer Niederschläge, den Metallsalzvegetationen, dem Kristallisieren von Salzen aus wässerigen Lösungen durch Wasserentziehung mit Alkohol, beim Eintrocknen von Kolloidlösungen, beim Schrumpfen und Aufquellen von Gallerten, ohne und bei Gegenwart von Salzen beobachtet habe.

Aber die Erscheinungen lassen sich beim Eis deshalb besser verfolgen, weil einesteils die Versuchsbedingungen einfacher sind, wegen der für längere Zeit und längere Strecken nahezu konstanten Temperatur, und weil andererseits flüssige und feste Substanz durch die Volumenänderung und die Wirkung auf polarisiertes Licht schneller, leichter und sicherer unterschieden werden können. Außerdem ist die Gefrierpunktsänderung des Wassers bei Zusatz von Salzen für viele Salze untersucht, dagegen bei den Kolloiden unbekannt. Die Gesetze der Diathermansie und Absorption für Licht- und Wärmewellen sind für Eis nur oberflächlich, für die Kolloide so gut wie gar nicht untersucht. Ebenso kennen wir den Einfluß des Druckes auf salzhaltiges Eis, aber nicht auf salzhaltige Kolloide.

Die Bildung der Zellen der organischen Natur erfolgt nach denselben Gesetzen und unter Einfluß derselben physikalischen Kräfte, wie die Bildung der Zellen oder Schaumkammern der unorganischen Natur während eines Übergangszustandes zwischen zwei Gleichgewichtszuständen. Form, Größe und Eigenschaften beider Arten Zellen hängen von der Geschwindigkeit ab, mit der der Übergangszustand durchlaufen wird, von der Zeit, während welcher Oberflächenspannung und Viskosität der Schaumwände die Form und Größe der Zellen beeinflussen können. Die Anwendung der gewöhnlich benutzten Prinzipien der Thermodynamik oder der Erhaltung der Energie auf diese Zellenbildung wird dadurch erschwert und oft sogar unmöglich.

Die Schwierigkeit ist um so größer, als ungemein kleine Mengen fremder Substanz, die selbst mit dem bewaffneten Auge nicht mehr wahrgenommen werden können, die Eigenschaften der sichtbaren und unsichtbaren Schaumwände oder Form und Größe der Zellen beeinflussen. Und mit der Quantität dieser nicht mehr direkt wahrnehmbaren Mengen steigt in vielen Fällen (oder immer?) die Anzahl und Oberfläche der Schaumwände, oder sinkt die Größe der Schaumkammern.

B. Natürliches Eis.

§ 181. *Gletscherkorn.* Homogenes Gletschereis, welches an warmer Luft auftaut, zeigt eine Menge feiner Haarspalten, welche allmählich immer deutlicher werden, und das Eis in ein Konglomerat unregelmäßig geformter Brocken zerteilen. Diese Brocken nennt man das Gletscherkorn.

Nach Heim[1]) nimmt das Gletscherkorn im Verlaufe eines Gletschers von oben nach unten an Größe zu, bis 7, 8, sogar 10 cm Durchmesser. Da, wo das Eis unter dem Firn zuerst erscheint, ist es oft noch undeutlich, und wenn sichtbar, von der Größe einer Haselnuß. Die Grenzflächen der frisch auseinandergelösten Körner zeigen sich bedeckt mit einer Menge wellenförmiger Furchen von Sandkorngröße. Verdunstet das Schmelzwasser in trockener warmer Luft, so erscheint eine

1) A. Heim, Gletscherkunde p. 120, 123. Stuttgart 1885. 8°.

andere geradlinige feine Furchung parallel einer bestimmten Ebene. Hagenbach nennt sie die Forelschen Streifen.

Die Ebenen der Forelschen Streifen und der Tyndallschen Schmelzungsfiguren fallen zusammen. Heim nennt sie „Das Ausgehende“ der letzteren. Beide rühren von dem Salz her, daß in dünnen Schichten im Eis eingelagert ist.

Nach Hagenbach[1]) verlaufen diese Streifen auf jedem Gletscherkorn nach einer besonderen Richtung und stoßen an den Grenzen des Korns in scharfen Winkeln aufeinander. Die Schichten und Schaumwände, welche sich durch periodische Abscheidung von reinem und salzhaltigem Eis gebildet haben, werden beim Herabfließen des Gletschereises und dem Durcheinanderrollen der Eisbrocken und Gletscherkörner verschoben.

Die wellenförmigen Furchen rühren meiner Meinung nach von der ölartigen Salzlösung in den Haarspalten her, ebenso wie die von Heim[2]) beobachteten Streifen an den Grenzen des blauen und weißen Gletschereises. Heim erklärt die letzteren durch den Weg, den die Luftblasen genommen haben. Die wellenförmigen Furchen und die Streifen entsprechen aber den weißlichen Röhren im künstlichen Eise (§ 172), welche sich infolge der Oberflächenspannung aus dünnen Schichten sehr klebriger ölartiger Salzlösung zusammengerollt haben, wie die ähnlichen Formen der Niederschlagmembranen von Cu_2FeCy_6 etc. (§ 25, Figg. 12—16, Ann. d. Phys. 7. p. 652. 1902).

Nach Mc Connel und Kidd[3]) bilden sich im allgemeinen die Eiskristalle bei langsamem Gefrieren auf Landseen mit optischer Achse normal zur Oberfläche. Bei schnellem Frieren des Sees von St. Moritz im Engadin bildeten sich an der Wasseroberfläche vertikale Säulen von 1 cm Durchmesser oder kleiner und 30 cm Länge. Jede Säule war ein einziger Kristall mit scharfen und spitzen Enden und nahezu horizontaler optischer Achse. Bei Bestrahlung mit Sonnenlicht traten in wenigen Minuten die Grenzflächen zwischen den einzelnen

---

1) Ed. Hagenbach-Bischoff, Verh. Naturf. Ges. Basel 7. Heft 1. p. 4. 1881.

2) A. Heim, Pogg. Ann. Ergänzungsbd. 5. p. 63. Taf. I. Fig. 15. 1871.

3) J. C. Mc Connel and D. A. Kidd, Proc. Roy. Soc. 44. p. 333. 1888.

Säulenflächen hervor, wie bei meinen Versuchen mit künstlichem Eis (§ 172).

Ähnlich werden durch Sonnenlicht im Gletschereis die einzelnen Eiskristalle oder Gletscherkörner von 0,2—10 cm Durchmesser durch dünne Wasserschichten (äußerst verdünnte Salzlösung) mit unregelmäßigen krummen Grenzflächen getrennt.

Leydolt[1]) fand an Plättchen aus Eiszapfen die optische Achse normal zur Oberfläche.

Thomas H. Holland[2]) fand auf Seeeis von 1,2 cm Dicke sechsstrahlige Schlagfiguren, die in verschiedenen 60 cm breiten Eisbändern verschieden, in demselben Eisband gleich orientiert waren. Ein Eisband enthielt also gleich orientierte, die verschiedenen Eisbänder verschieden orientierte Eiskristalle.

Bei langsamem Gefrieren in stehendem Wasser fand Hagenbach[3]) Eiskristalle mit optischer Achse normal zur Wasseroberfläche, und beim Zerschlagen von Seeeis oder Gletschereis muschligen Bruch. Beim Auftauen kamen die optisch meist unsichtbaren Verwachsungsflächen in dem vollständig klaren Eise zum Vorschein. Die Eismasse zerfiel in die einzelnen Kristalle, beim Seeeis in parallel gerichtete Stängelchen und beim Gletschereis in unregelmäßige Körner. In beiden Fällen können die einzelnen einheitlichen Kristalle 10—20 cm Durchmesser haben. Beim Auftauen im Sonnenlicht hatten die Arme der Tyndallschen Sternblumen in jedem einzelnen Kristalle parallele, in den verschiedenen Kristallen verschiedene Lage. Die kleinen Gletscherkörner vereinigen sich zu einem größeren Gletscherkorn. Das Aggregat von Eiskristallen wird mit der Zeit grobkörniger und ähnliche Gebilde entstehen aus frisch gefallenem Schnee. Die großen Eiskristalle fressen die kleinen auf. Druck befördert, wie leicht begreiflich, das Umkristallisieren und das Wachstum des Korns.

---

1) F. Leydolt, Sitzber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. Math.-nat. Klasse **7**. p. 477. 1851.

2) Th. H. Holland, Nature **39**. p. 295. 1889.

3) Ed. Hagenbach-Bischoff, Verh. naturf. Ges. Basel **8**. p. 821, 830. Fig. 3, *n*. Taf. VII. 1889; Rapport du Congrès international de physique **3**. p. 409. 1900.

Hagenbach[1]), Klocke[2]) und Forel[3]) fanden bei Seeeis die optische Achse stets normal zur Ebene der Tyndallschen Schmelzungsfiguren, also vertikal. Nach Hagenbach, Forel und Heim[4]) sind die Tyndallschen Eisblumen oder Schmelzungsfiguren auch im Gletschereis normal zur Kristallachse und können zur Bestimmung der Achsenlage dienen.

Nach meiner Ansicht fließen bei der Vergrößerung der Gletscherkörner die Schaumwände und das Innere der Schaumkammern zusammen, wie bei den Faradayschen Versuchen über Regelation des Eises (§ 171) oder bei meinen Beobachtungen an dem oberen Ende der schmelzenden Eisblöcke (§ 172) oder bei dem Zusammenfließen zweier Schaumflocken aus Leimtannat (§ 98, Ann. d. Phys. 11. p. 66. 1903). Dabei platzen einzelne Schaumwände, oder es setzen sich Schaumwände an schon vorhandene erstarrte Schaumwände oder feste Flächen normal an.

In der von Hagenbach gegebenen Photographie erkennt man die im selben Kristall parallel orientierten und in den verschiedenen Kristallen verschieden orientierten Sternblumen; Schaumwände mit Neigungswinkeln von 120°; Röhren mit ölartigen Wänden, die in kugelförmige Blasen zerfallen; Tannenbäume mit ölartigen Schaumwänden und Astwinkeln von 120°.

Die ölartigen Schichten aus wässeriger Salzlösung bilden sich beim Abkühlen des Wassers periodisch. Ob sie sich normal zur Oberfläche oder parallel zur Oberfläche abscheiden, hängt vom Zufall ab, wie bei eintrocknender Kolloidlösung von Kieselsäure (§§ 64, 69), Schwefel (§ 79, Ann. d. Phys. 9. p. 804, 820, 994. 1902), Eiweiß (§ 90), Stärke (§ 94, Ann. d. Phys. 10. p. 500, 676. 1903). Es kommt darauf an, welche Schichten sich zuerst ausscheiden. Die optische Achse der Eiskristalle kann bald normal, bald parallel zur Eisoberfläche liegen.

Der muschlige Bruch des Eises bei niedriger Temperatur ist bedingt durch die kugelförmigen erstarrten Schaumwände,

---

1) Ed. Hagenbach-Bischoff, Verh. naturf. Ges. Basel 7. I.p. 18. 1881.

2) F. Klocke, N. Jahrb. f. Min. 1. p. 25. 1881.

3) F. A. Forel, Arch. sc. phys. 7. p. 329, 331. 1882.

4) A. Heim, Gletscherkunde p. 122. 1885.

welche sich bei der Abkühlung anders zusammengezogen haben, als das reine Eis im Innern der Schaumkammern.[1]

Die netzförmige Anordnung der feinen Haarspalten oder Schmelzflächen im Innern des Gletschereises oder tauender Eisstücke haben Agassiz[2], H. und A. Schlagintweit[3] und Hagenbach[4] auch mit gefärbtem Wasser nachgewiesen, das in die feinen Haarspalten eindringt; in den klaren blauen Bändern des Gletschereises weit leichter und tiefer, als in den weißen Bändern. Agassiz's Bohrlöcher im festen Gletschereis füllten sich mit Wasser, das bei Tage schneller als bei Nacht durch die Haarspalten zufloß.

Nach Agassiz[5] sollen die Haarspalten im blauen Eise zahlreicher sein, als im weißen Eise. Ich glaube, daß im weißen Eise die Haarspalten oder flüssigen Schaumwände geschlossene Oberflächen bilden und im blauen Eise aneinanderhängen, wie die Wände von Seifenschaum.

Das weiße Gletschereis mit vielen Luftbläschen entspricht der weißen Mittelschicht und dem weißen Eis der tauenden Eisblöcke (§ 172) und enthält nach meinen Versuchen mehr Salz als das klare Gletschereis. Huxley[6] fand mit den Luftblasen im Gletschereis stets flüssiges Wasser, d. h. salzhaltiges Wasser von niedrigerem Schmelzpunkt als das benachbarte reine Eis. Die Luft scheidet sich beim Gefrieren an der Grenze von ölartiger Salzlösung und Wasser ab. Die Haarspalten entsprechen den flüssig gebliebenen Schaumwänden aus ölartiger wässeriger Salzlösung, der Inhalt der Schaumkammern dem reineren Eis zwischen den Haarspalten. Das gefärbte Wasser verdrängt die konzentriertere Salzlösung mit größerer Klebrigkeit viel schwerer aus den etwa vorhandenen Haarspalten des weißen Eises, als die verdünntere Salzlösung mit geringerer Klebrigkeit aus den Haarspalten des klaren

1) G. Quincke, Verh. Deutsch. Phys. Ges. 5. p. 103. 1903.

2) L. Agassiz, Ann. d. chim. (3) 6. p. 466—472. 1842.

3) Hermann u. Adolph Schlagintweit, Untersuchungen über die physikalische Geographie der Alpen. Leipzig 1850. 4°. p. 15.

4) Ed. Hagenbach-Bischoff, Verh. naturf. Ges. Basel 1. p. 7. 1883.

5) L. Agassiz, Heim Gletscherkunde p. 127.

6) Th. Huxley, Heim, Gletscherkunde p. 115.

Eises. Hängen die Schaumwände des weißen Eises nicht zusammen, so kann die in ihnen enthaltene Flüssigkeit überhaupt nicht verdrängt werden.

Mit der zunehmenden Vergrößerung der Gletscherkörner soll nach Bertin und Grad auch eine Parallelstellung und Vertikalstellung der optischen Achsen der Kristallindividuen der einzelnen Gletscherkörner, eine *kristallographische Orientierung der Gletscherkörner* verbunden sein. Am unteren Gletscherende beobachteten eine vertikale Lage der optischen Achse für alle Gletscherkörner Bertin[1]) am unteren Grindelwaldgletscher, Grad und Dupré[2]) am Aletsch-, Rhone- und unteren Grindelwaldgletscher. Auch E. von Drygalski[3]) gibt an, daß bei den Eisströmen in Grönland die Größe des Korns gegen das Ende zunimmt bis zu einer bestimmten Grenze, doch seien neben großen auch kleine Körner zu finden. Außer dem Wachstum finde auch eine kristallographische Umlagerung der Gletscherkörner statt, indem die ursprünglich regellose Orientierung in den unteren geschichteten Teilen des Eises einer Ordnung weiche, in welcher die optischen Hauptachsen senkrecht zu den Schichten und unter sich parallel stehen. Die Schichtflächen lägen senkrecht zur Druckrichtung, die optischen Achsen in den geschichteten Teilen also in der Druckrichtung.

Hagenbach[4]) fand meist, aber nicht immer, die optische Achse normal zur Schichtungsebene im unteren Teile des Grindelwaldgletschers. In neuester Zeit hat derselbe[4]) aber die Ansicht ausgesprochen, daß weder Schwere noch Druck, noch Bewegung die Lage der optischen Achse bestimmen, daß die optischen Achsen der einzelnen Gletscherkörner die verschiedenste Lage haben könnten. Dasselbe habe ich bei meinen Versuchen §§ 172—177 gefunden für künstliches Eis, das in bedeckten Metalltrögen gefroren war. Wenn in vielen Fällen im Seeeis die optische Achse vertikal und normal zur Ebene der Schmelzungsfiguren gefunden wurde, so mögen Schneesterne, die auf die Oberfläche des überkalteten Wassers

---

1) A. Bertin, Compt. rend. **63.** p. 349. 1866.

2) Ch. Grad et A. Dupré, Compt. rend. **69.** p. 958. 1869.

3) E. von Drygalski, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **17.** p. 63. 1898.

4) Ed. Hagenbach-Bischoff, Verh. naturf. Ges. Basel **7.** I. p. 17. 1881; Rapports du Congrès intern. d. phys. **3.** p. 412. Paris 1900.

gefallen sind und flach auf der Oberfläche schwammen, durch Kontaktwirkung eine orientierte Kristallisation des Eises mit vertikaler optischer Achse eingeleitet haben.

Eine ganz verschiedene Lage der optischen Achse für verschiedene Gletscherkörner beobachteten J. Müller[1]) am unteren Grindelwaldgletscher, Klocke[2]) am Rhone-, Morteratsch- und unteren Grindelwaldgletscher. Ebenso Forel[3]) und Heim.[4])

Ich möchte glauben, daß, wie die Plastizität, so auch die Orientierungsgeschwindigkeit der Eiskristalle mit dem Salzgehalt des Eises im Innern der Schaumkammern wechselt. Durchbricht bei der Verschiebung der Gletscherkörner ein Eiskristall die ölartige Trennungsschicht bis zur Berührung des Nachbarkristalles, so werden durch Kontaktkraft die kleinsten Teile des weicheren oder wärmeren Kristalles (der aus Flüssigkeit mit geringerer Viskosität besteht) umgelagert werden, und sich nach denen des härteren oder kälteren Kristalles (der aus Flüssigkeit mit größerer Viskosität besteht) orientieren.

§ 182. *Große Schaumkammern des Kjendalgletschers.* Je reiner das Eis ist, um so weniger Schaumwände von ölartiger wässeriger Salzlösung können sich bilden, um so größer müssen die von den Schaumwänden eingeschlossenen Schaumkammern oder Schaumflocken sein, um so größer die Gletscherkörner.

Bei den Gletschern der Schweiz mit vielen Felsstücken, großen Moränen am Fuß der Gletscher und trüben Gletscherbächen ist der Salzgehalt des Eises verhältnismäßig groß, die Schaumwände liegen nahe beieinander und treten dadurch weniger hervor.

Anders ist es bei dem reineren Eis der Gletscher in Norwegen. Aus dem Kjendalsbrae im Kvandal (Naesdal), aus dem der Kvandalself als klarer Gletscherbach abfließt, fehlt die Moräne am Fuß des Gletschers. Die geringen Sandmassen und der Staub, die das Wasser zu Tal bringt, sammeln

1) J. Müller, Pogg. Ann. 147. p. 624. 1872.
2) F. Klocke, N. Jahrb. f. Min. 1. p. 23. 1881.
3) F. A. Forel, Arch. sc. phys. 7. p. 332. 1882.
4) A. Heim, Gletscherkunde p. 124. 1885.

sich als zentimeterdicke Streifen auf der Eisfläche am unteren Ende des Gletschers und lassen Schaumwände erkennen mit Neigungswinkeln von 90°, 120° oder auch anderer Größe. Sie begrenzen große Schaumkammern von 30 cm und mehr, größer als die größten in der Schweiz beobachteten Gletscherkörner.

Die Schaumwände aus salzhaltigem Wasser sind durch die Sonnenstrahlen eher geschmolzen, als das reine Eis der Schaumkammern und dadurch Furchen in der Gletscheroberfläche gebildet. In diesen Furchen bleibt der vom abfließenden Wasser mitgeführte Sand liegen.

Außerdem haftet der Sand an dem salzhaltigen Wasser der Schaumwände. Salzlösungen haften durch Adhäsion unter Wasser an der Oberfläche von Glas und Sand.[1]) Beim Abwärtsfließen des Gletschereises werden die im Eis eingebetteten Felsstücke gegeneinander gerieben und zu Sand zerkleinert. Der Sand speichert durch Molekularkräfte die ölartige Salzlösung an seiner Oberfläche. Die Sandkörnchen kleben dadurch unter Wasser zusammen und sammeln sich an den ölartigen Schaumwänden des Gletschereises, die dadurch sichtbar werden.

Die großen Spalten des Kjendalgletschers sind von nahezu ebenen, schwach gewölbten Flächen begrenzt, mit dem Charakter der Flächen eines Spateisensteinkristalles.

Die Struktur der Eismassen mit großen und kleinen Schaumkammern entspricht dem Bau der Kristalle, die aus unsichtbaren Schaumkammern bestehen und sich von den Sphärokristallen und den Zellen der organischen Natur nur durch die Größe der Schaumkammern unterscheiden, die bei den Zellen oft noch sichtbar sind.[2])

§ 183. *Klare Eislinsen in weißem Gletschereis.* Zuweilen liegen scharf begrenzte Linsen von klarem Eis in weißem Eis. Tyndall und Huxley[3]) haben an der Oberfläche des unteren Grindelwaldgletschers in horizontalen Schichten durchsichtige Linsen von klarem Eis beobachtet, die in undurchsichtigem Eis mit unzähligen Luftbläschen lagen. Sechs durchsichtige

---

1) G. Quincke, Wied. Ann. 2. p. 174. 1877.
2) G. Quincke, Verh. Deutsch. Phys. Ges. 5. p. 109. 1903.
3) J. Tyndall and Th. Huxley, Phil. Trans. 1857. p. 334—335. Fig. 6 u. 7.

von je zwei Kugelflächen begrenzte Linsen lagen in abnehmender Größe nebeneinander, von 60 cm Durchmesser und 5 cm Dicke bis 2,5 cm Durchmesser und 0,2 cm Dicke.

Nach meinen §§ 172—178 beschriebenen Versuchen sind die klaren Eislinsen aus reinem luftfreien Wasser entstanden, das von dünnen ölartigen Schaumwänden aus wässeriger Salzlösung umhüllt war, und bei der Abkühlung eher erstarrt ist, als das lufthaltige Wasser der Umgebung.

Durch Strahlung der Sonne war lufthaltiges weißes Eis geschmolzen und die zu größeren Blasen vereinigte Luft entwichen. Das reine luftfreie Wasser von etwas höherer Temperatur und etwas größerem spezifischen Gewicht war dann in kälteres Wasser eingeflossen und in diesem untergesunken, in welchem sich vorher dünne horizontale luft- und salzhaltige Schichten periodisch abgeschieden hatten in der von Faraday geschilderten Weise (vgl. § 171). Dadurch waren mit reinem Wasser gefüllte Schaumblasen von abnehmender Größe entstanden, die in einer dünnen horizontalen ölartigen Schicht von Salzwasser schwammen. Nach Sonnenuntergang kühlte sich die ganze Flüssigkeit ab. Zuerst erstarrte das reine Wasser in den Schaumblasen, dann das lufthaltige Wasser in der Umgebung, und zuletzt die ölartigen Schaumwände aus Salzwasser.

Die Gebrüder Schlagintweit[1]) haben im Gletschereis von Kugelflächen begrenzte Hohlräume mit klarer Flüssigkeit beobachtet, an denen eine runde Luftblase haftete. Die Flüssigkeit hatte kleineres oder größeres Volumen als die Luftblase, bestand nach meiner Ansicht aus wässeriger Salzlösung mit tieferem Schmelzpunkt als das umgebende Eis und war schon vor dem Erstarren durch Kugelflächen begrenzt. Bei Einwirkung der Sonnenstrahlen schmolz das salzhaltige Eis früher als das reine Eis der Umgebung. Die Blase war durch Kontraktion beim Schmelzen dieses salzhaltigen Eises entstanden (vgl. §§ 174—177).

§ 184. *Die Plastizität des Eises* bei Temperaturen unter 0° wird gewöhnlich dadurch erklärt, daß das Eis durch Druck schmilzt und nach Aufhören des Druckes wieder friert.

---

1) Herm. u. Adolph Schlagintweit, Physikalische Geographie der Alpen p. 17. Leipzig 1850. 4°.

Schon Graham[1]) hat das Eis als ein Kolloid oder eine Gallerte angesehen und damit die Plastizität des Eises bei der Gletscherbewegung erklärt.

Sir William Thomson[2]) zeigte zuerst, daß der Gefrierpunkt des Wassers durch allseitigen Druck von 16,8 Atm. um 0,129° C. erniedrigt wurde, in Übereinstimmung mit den theoretischen Betrachtungen von James Thomson[3]). Mousson[4]) schmolz Eis durch einseitigen Druck zwischen den Backen einer hydraulischen Presse und durch allseitigen Druck in einem geschlossenen Metallzylinder durch Anziehen einer Stahlschraube. J. T. Bottomley[5]) schmolz Eis durch einseitigen Druck unter einer mit einem Gewicht belasteten Drahtschlinge (vgl. oben § 178).

Hagenbach und Forel[6]) fanden bei ca. vier Atmosphären Druck die Temperatur des Gletschereises — 0,03°, in Übereinstimmung mit den Untersuchungen von James Thomson und Sir William Thomson.

Kleine Eisstücke können mit dem Hammer in eine Form geschlagen und zu einem größeren Eisstück vereinigt werden (Tyndall[7]). Die Eisstücke schmelzen durch einseitigen Druck und frieren nach Aufhören des Druckes wieder zusammen. Moseley[8]) fand nahezu gleiche Scheerungsfestigkeit für Eiszylinder, welche aus einem größeren Eisstück auf der Drehbank hergestellt, oder welche mit dem Hammer aus kleineren Eisstücken zusammengeschweißt waren durch Regelation. Die Gleitungsflächen der gegeneinander verschobenen Eisstücke blieben dabei unsichtbar

Felsstücke fallen auf die Oberfläche der Gletscher, schmelzen durch einseitigen Druck das darunterliegende Eis, sinken in die

1) Th. Graham, Phil. Trans. 1861. p. 183; Chem. Phys. Papers p. 598; Pogg. Ann. **114**. p. 187. 1861.

2) W. Thomson, Math. and Phys. Papers **1.** p. 168. 1882.

3) James Thomson, Trans. Roy. Soc. Edinb. **16.** p. 575. 1849; Proc. Roy. Soc. Edinb. **2.** p. 1. 1849.

4) A. Mousson, Pogg. Ann. **105.** p. 161. 1858.

5) J. T. Bottomley, Nature 1872; Pogg. Ann. **148.** p. 494. 1873.

6) Ed. Hagenbach-Bischoff u. F. A. Forel, Verh. naturf. Ges. Basel **8.** p. 646. 1888.

7) J. Tyndall, Heat p. 193. 1865.

8) H. Moseley, Phil. Mag. (4) **39.** p. 8. 1870.

Eismasse ein und das Wasser friert über ihnen nach Aufhören des Druckes wieder zusammen, wie bei dem Versuch von Bottomley.

Durch Druck schmelzen die salzhaltigen Stellen eines Eisblocks zuerst. Die einzelnen Eiskristalle können an diesen Stellen übereinandergleiten und frieren nach Aufheben des Druckes wieder zusammen. Beim Auftauen im Sonnenlicht treten diese Verwachsungsflächen hervor im Gletschereis oder bei dem künstlichen in Formen gepreßten Eis, da diese salzhaltigen Lamellen zuerst schmelzen. Solche Versuche sind von Tyndall[1]) und von Hagenbach und Heim[2]) beschrieben worden.

Tyndall brachte einen klaren Eisblock von Seeeis in eine hydraulische Presse. Durch einseitigen Druck bildeten sich flüssige Schichten mit großer Leichtigkeit parallel den Flächen, in welchen durch Sonnenstrahlen die Schmelzungsfiguren (Eisblumen) erzeugt wurden. Bei Druck normal zu den Schichten entstanden sie leichter, als bei Druck parallel den Schichten. Die durch den Druck entstandenen flüssigen Schichten zeigten am Rande eine heftige Bewegung, welche dem Rande der wachsenden Schicht folgte.

Es wurden also die salzhaltigen Stellen der Eismasse, welche sich in der von Faraday (§ 171) beschriebenen Weise in horizontalen Schichten periodisch ausgeschieden hatten, durch einseitigen Druck geschmolzen. Dabei entstand durch Kontraktion des schmelzenden Eises eine Luftlamelle oder luftleere Lamelle, an deren Oberfläche das schon geschmolzene Wasser und die entstehende Salzlösung mit verschiedener Oberflächenspannung Ausbreitungswirbel und die von Tyndall beobachteten heftigen Bewegungen erzeugten.

Nach Pfaff[3]) reicht schon der geringste Druck hin, Eisteile gegeneinander zu verschieben, sobald er anhaltend wirkt. Um so mehr, je höher die Temperatur ist. Ein Eisenzylinder

---

1) J. Tyndall, Proc. Roy. Soc. 9. p. 79; Phil. Mag. (4) 17. p. 92. 1859; Heat p. 136. Fig. 39, 40. 1865.

2) Ed. Hagenbach-Bischoff, Verh. naturf. Ges. Basel 8. p. 824. 1889.

3) Fr. Pfaff, Sitzber. Phys. med. Soc. Erlangen 1875. p. 72.

sank in Eis von -1^0, -4^0, -6^0 um so schneller ein, je höher die Temperatur war.

Bei -20^0 bis -14^0 und einem Druck von 5 kg auf 1 cm^2 beobachtete K. R. Koch[1]) eine stetige Abnahme der Höhe eines Eiszylinders von 2 mm Durchmesser und 1 cm Höhe. Die Höhenabnahme betrug in 1 Stunde

	0,007	0,017	0,126 mm
bei	$-5,7^0$	$-2,5^0$	$-0,9^0$.

Main[2]) und später Mc Connel und Kidd[3]) haben die Plastizität des Eises gemessen bei Gletschereis und bei in Formen gepreßtem Eis. Eisstücke verlängerten sich langsam, aber kontinuierlich, durch ein dehnendes Gewicht bei Temperaturen unter 0^0. Nach Main nimmt die Verlängerung kontinuierlich zu bei Zugkräften größer als 1 Kilo auf 1 cm^2 für Temperaturen zwischen -6^0 und 0^0. Die tägliche Verlängerung betrug bei nicht sehr niedrigen Temperaturen 1 Proz. Bei den Versuchen von Mc Connel und Kidd schwankte die stündliche Verlängerung sehr bedeutend zwischen 0,012—1,88 mm für 10 cm lange Stücke Gletschereis vom Morteratschgletscher; bei einer Belastung von 1,45 Kilo auf 1 cm^2 und einer mittleren Temperatur von $-10,5^0$ war die stündliche Verlängerung im Mittel 0,0065 mm; bei 3,2 Kilo Druck auf 1 cm^2 schwankte die stündliche Kontraktion um 0,00007—0,00056 der Länge. Die Gletscherkörner der Eisstücke hatten 1—100 mm Durchmesser.

Schnelle Dehnung vergrößerte, langsame Dehnung verkleinerte die Plastizität. Bei einem dehnenden Gewicht von 4,2 Kilo auf 1 cm^2 brach das Eisstück.

Seeeis aus dem See von St. Moritz zeigte sehr geringe Plastizität, eine stündliche Verlängerung von 0,000004 bei einem Zug von 2 Kilo auf 1 cm^2 parallel der Säulenfläche der Eiskristalle und eine stündliche Verlängerung von 0,00015 bei einem Zuge von 2,75 Kilo auf 1 cm^2, der unter 45^0 zur Säulen-

---

1) K. R. Koch, Wied. Ann. 25. p. 449. 1885.
2) J. F. Main, Proc. Roy. Soc. 42. p. 329. 1887.
3) J. C. Mc Connel and D. A. Kidd, Proc. Roy. Soc. 44. p. 332. 1888.

achse geneigt war. Die stündliche Verlängerung war für die zweite Richtung 80 mal größer, als für die erste Richtung.

Die Plastizität hängt also sehr wesentlich von der Struktur des Eises ab.

Später fand McConnel, daß ein Eiskristall aus einzelnen Blättern besteht, die normal zur optischen Achse liegen, durch eine klebrige Flüssigkeit zusammengeklebt sind und mit beträchtlicher Schwierigkeit übereinandergleiten können. Ein Eisprisma mit optischer Achse normal zur Längsrichtung des Prismas, auf zwei Schneiden gelegt und in der Mitte durch ein Gewicht belastet, zeigte keine Biegung bei horizontaler optischer Achse und vertikalen Blättern parallel zur Längsrichtung, dagegen dauernde Senkung in der Mitte bei vertikaler optischer Achse und horizontalen Blättern oder Gleitflächen.

Mügge[1]) und Hess[2]) haben ähnliche Messungen durchgeführt. Mügge schnitt aus einem Eiskristall Stäbe von 1 cm Dicke von quadratischem Querschnitt und optischer Achse parallel der Längsrichtung, legte die Stäbe auf zwei Schneiden, welche 2—0,5 cm voneinander entfernt waren und belastete die Mitte des Stabes mit einer Schnur und 5 kg. Zwischen den Schneiden wurde ein Stück des Eises, etwa von der Breite der Gewichtsschnur nach und nach aus dem Stabe herausgedrängt, der dabei völlig klar blieb. Mügge nennt dies *Translation ohne Biegung*.

Koch, Main, McConnel und Kidd fanden also fortdauernde Verlängerung der Eisstücke von Gletschereis, das mit einem dehnenden Gewicht belastet war, oder fortdauernde Verkürzung durch ein drückendes Gewicht. McConnel, Mügge und Hess fanden fortdauernde Verschiebung der Schichten eines Eiskristalles normal zur optischen Achse. Ein Gleichgewichtszustand wurde nicht erreicht. Die verschobenen und gleitenden Schichten bewegten sich mit wechselnder, im allgemeinen mit einer mit der Dauer der Belastung zunehmenden Geschwindigkeit, die durch eine neue Gewichtsvermehrung erheblich vergrößert wurde.

---

1) O. Mügge, Gött. Nachr. Math.-naturw. Klasse 19. 3. 1895. p. 2; N. Jahrb. f. Min. 2. p. 84. 1900.

2) H. Hess, Ann. d. Phys. 8. p. 405. 1902.

Nach den Untersuchungen von Rüdorff[1]) hat man anzunehmen, daß die dünnen salzhaltigen Flüssigkeitsschichten des Gletschereises bei weiterer Abkühlung unter 0° auf eine Temperatur — τ^0 Wasser abgeben, das sich an das benachbarte Eis in Kristallen ansetzt und daß eine bei — τ^0 gesättigte Salzlösung zurückbleibt. Je niedriger die Temperatur — τ^0 wird, um so dünner, um so konzentrierter und um so klebriger werden die unsichtbaren salzhaltigen Flüssigkeitsschichten oder Schaumwände des Gletschereises. Bei sehr niedriger Temperatur werden sie erstarren.

Die dünnen Schichten Salzlösung zwischen den einzelnen Brocken Gletschereis oder den einzelnen Scheiben eines Eiskristalles wirken wie klebrige Luft oder Schmiermaterial zwischen zwei zylindrischen oder ebenen Flächen, die übereinandergleiten. Die gleitende Bewegung zieht, wie wir durch die Untersuchungen von Osborne Reynolds[2]) wissen, die klebrige Flüssigkeit in den Raum zwischen den übereinandergleitenden Flächen, verteilt die Flüssigkeit gleichmäßig über die Flächen, und macht dadurch den Reibungswiderstand kleiner.

Je größer die Dicke und je geringer die Klebrigkeit der ölartigen Salzlösung ist, je weniger Salz in dem gefrierenden Wasser enthalten ist, je höher die Temperatur der ölartigen Salzlösung ist, um so größer ist die Verschiebung der Eisstücke gegeneinander, um so größer die „Plastizität" des Eises bei gleichen Druckkräften.

Die bald größere, bald kleinere Verschiebungsgeschwindigkeit der Eisstücke gegeneinander, die Zunahme der Verschiebungsgeschwindigkeit mit der Dauer des Druckes, die schwankenden Resultate der Messungen und die Abnahme der Plastizität mit sinkender Temperatur finden durch die in das Eis eingelagerten unsichtbaren Schichten Salzlösung ihre vollkommene und befriedigende Erklärung.

Wenn nach Hagenbach die optische Achse eines Eiskristalles normal zur Ebene der Tyndallschen Schmelzungsfiguren steht (§ 173) und diese Schmelzungsfiguren von dünnen,

1) F. Rüdorff, Pogg. Ann. 114. p. 66. 1861.

2) Osborne Reynolds, Scientific papers 1. p. 110; 2. p. 228 u. 734. 1901; Phil. Trans. 1886.

in das Eis eingelagerten Schichten herrühren (§ 171), so sind in jedem Eiskristalle dünne Schichten Salzlösung von unmerklicher Dicke normal zur optischen Achse eingelagert. Es ist also verständlich, daß die Schichten des Eiskristalles normal zur optischen Achse leicht übereinandergleiten, wie Mc Connel, Mügge und Hess gefunden haben. Die dünnen Schichten Salzlösung wirken wie das Schmiermaterial zwischen zwei übereinandergleitenden Flächen.

Wenn Mügge auf ähnliche Erscheinungen einer Translation ohne Biegung bei anderen Kristallen als Eis hinweist, so kann ich dieser Analogie nur zustimmen. Die bevorzugten Gleitflächen sind dann auch durch eingelagerte unsichtbare Schichten klebriger Flüssigkeit erzeugt, die besonders reichlich parallel diesen Flächen in den Kristall eingelagert sind. Ich werde auf diese Fragen, welche mit der Schaumstruktur der Kristalle zusammenhängen, später an anderer Stelle zurückkommen.

Übrigens muß der Einfluß des Druckes auf solche unsichtbaren, in einen festen Körper eingelagerte Schichten ölartiger wässeriger Salzlösung von der Klebrigkeit dieser Flüssigkeit abhängen.

In einem festen Körper ist mit einem Druck p in vertikaler Richtung, der von einem aufgelegten Gewicht herrührt, eine positive Dilatation oder ein Zug in horizontaler Richtung auf dünne eingelagerte Schichten verbunden. In einer eingelagerten Flüssigkeitsschicht würde dies eine Gestaltsänderung hervorrufen. Eine Verkürzung in vertikaler, und eine Verbreiterung in horizontaler Richtung. In klebrigen Flüssigkeiten wird die Gestaltsänderung aber erst allmählich eintreten. Dünne vertikale klebrige Flüssigkeitsschichten werden bei Beginn des Druckes vorübergehend gedehnt werden, oder vertikale salzhaltige Wasserschichten vorübergehend frieren. Analog werden durch dehnende Zugkräfte vertikale eingelagerte salzhaltige Eisschichten vorübergehend komprimiert oder geschmolzen werden.

Bei Beginn des Druckes werden durch ein aufgelegtes Gewicht die im Eis eingelagerten unsichtbaren Schichten wässeriger Salzlösung wegen Abnahme des Druckes vorübergehend frieren, wenn sie vertikal liegen, und flüssig bleiben, wenn sie horizontal liegen.

Vielleicht erklärt sich dadurch die Beobachtung von Tyndall, daß die in Seeeis eingelagerten salzhaltigen Schichten bei Druck normal zu den Schichten leichter schmelzen, als bei Druck parallel den Schichten.

Umgekehrt werden bei einem Eisprisma, das durch ein angehängtes Gewicht gedehnt ist, wie bei den Versuchen von McConnel und Kidd zu Beginn der Belastung eingelagerte horizontale Schichten Salzlösung frieren oder dicker werden, vertikale Schichten schmelzen oder dünner werden. Anfänglich werden aufgelegte oder angehängte Gewichte ein Eisprisma anders deformieren und die einzelnen Eisstücke anders aneinander vorbeigleiten lassen, als später bei länger dauernder Druck- und Zugkraft — in Übereinstimmung mit den Versuchen von McConnel, Mügge und Hess.

Übrigens ist, auch abgesehen von den eingelagerten Schichten ölartiger Salzlösung, sowohl das Eis im Innern der Schaumkammern als das Eis der Schaumwände eine sehr klebrige Flüssigkeit (vgl. oben §§ 172—176), deren Klebrigkeit mit zunehmender Temperatur sehr bedeutend abnimmt und ein Ineinanderfließen der Schaummassen gestattet, aus denen der Kristall besteht.

Übrigens hat schon Forbes[1]) nachgewiesen, daß das Eis eine sehr klebrige Flüssigkeit ist. Derselbe hat die am Gletschereis beobachteten Erscheinungen nachgeahmt mit halbflüssigen Massen aus Gipsbrei und Leim, welche im Innern verschieden gefärbt oder mit farbigem Pulver bestreut waren und in unregelmäßigen Kanälen langsam zu Tal flossen. Die zähe Masse floß in der Mitte schneller als an den Rändern.

Das Eis steht meiner Meinung nach in der Mitte zwischen den gewöhnlichen Kristallen, wie Quarz oder Feldspat und den halbflüssigen Kristallen, wie Serumalbumin (vgl. § 59, Ann. d. Phys. **9**. p. 40. 1902; § 163, l. c. **15**. p. 16. 1904).

Die langsam zu Tal fließenden klebrigen Massen der Gletscher werden, wie die Lavaströme des Vesuvs, Risse bekommen oder zu Schnecken aufgerollt werden bei bestimmten Geschwindigkeiten, die von der Klebrigkeit und den ein-

1) J. D. Forbes, Reisen in den Savoyer Alpen p. 366—381. 1845; Phil. Trans. 1846. p. 143.

gelagerten unsichtbaren Schichten ölartiger Salzlösung abhängen. Forbes[1]) hat auch solche Wirbel im Eis des Morteratschgletschers beobachtet.

Daß in der Tat sich einzelne Teile der Gletscher bald zu Berg, bald zu Tal, bald aufwärts, bald abwärts bewegen, folgt auch aus den Messungen von K. R. Koch und Klocke[2]) am Morteratschgletscher.

§ 185. *Blaue und weiße Bänder im Gletschereis. Furchen der Gletscheroberfläche. Schmutzbänder und Forelsche Streifen.*

Guyot[3]) hat 1838 auf dem oberen Teile des Griesgletschers regelmäßige Furchen von 2,5—5 cm Breite beobachtet, die durch kristallinische glasige und harte Eisschichten voneinander getrennt waren, während die Furchen in schneeartigem leichter schmelzbaren Eise lagen. Diese *Bänderstruktur* der Gletscher ist auch später vielfach beobachtet worden von Forbes,[4]) Agassiz,[5]) Tyndall und Huxley,[6]) Forel und Hagenbach.[7])

Schichten von klarem harten bläulichen Eis wechseln mit Schichten von weißem weichen porösen Eis mit vielen Luftblasen. Die vertikalen parallelen Bänder oder Schichten laufen nach Agassiz quer über die Gletscherspalten fort, auch noch in Tiefen von 30 m und mehr. Forbes beobachtete am oberen Teile des Unteraargletschers vertikale, am unteren Teile desselben Gletschers horizontale Bänder. In der Nähe der Moräne traten diese Bänder besonders deutlich hervor. Die Schichten liefen oben viele hundert Meter parallel miteinander und parallel der Längsrichtung des Gletschers. Am

---

1) J. D. Forbes, Edinb. N. Philos. Jorn. **32.** p. 88. 1842.

2) K. R. Koch u. Fr. Klocke, Wied. Ann. **8.** p. 662. 1879; **14.** p. 509. 1881; **51.** p. 213. 1894; Verh. naturf. Ges. Freiburg i. B. **8.** p. 17. 1881.

3) A. Guyot, Geol. Ges. zu Pruntrut 1838: Edinb. N. Phil. Journ. **34.** p. 145. 1843; vgl. J. D. Forbes, Reisen in den Savoyer Alpen, bearb. von G. Leonhardt, p. 28. Stuttgart 1845.

4) J. D. Forbes, Edinb. N. Philos. Journ. **32.** p. 87, 90. 1842; **34.** p. 135. 1843; **47.** p. 149. 1847; Reisen p. 157, 278, 291, 338, 379. 1845.

5) L. Agassiz, Edinb. N. Philos. Journ. **32.** p. 265. 1842.

6) J. Tyndall and Th. Huxley, Phil. Trans. 1857. p. 342.

7) Ed. Hagenbach-Bischoff, Verh. naturf. Ges. Basel. **1.** Heft **1.** p. 4. 1882.

Rhonegletscher fand Forbes[1]) die Sprünge (crevasses) immer normal zu den konischen Flächen der Bänderstruktur. Derselbe bemerkte schon, daß sich die blauen Bänder an den Stellen größten Druckes bilden, wo die Differentialbewegung der einzelnen Teile am größten ist, nahe der Gletscherwandung. Sie bilden sich in bewegtem, nicht im ruhenden Eis.

Heim[2]) vergleicht die Bänder am unteren Teile des Gletschers mit einem Büschel von ineinander liegenden Schalen, deren talwärts liegender Teil mit dem Vorderteile eines Löffels oder eines Kahnes verglichen werden kann.

Ich möchte sagen, die Bänder lagen oben parallel den Strömungslinien des langsam zu Tal fließenden Gletschereises, unten normal zu den Strömungslinien.

Agassiz[3]) hält die blauen Bänder für Eis aus Wasser, das in vertikalen Schichten gefroren ist in dem Firnschnee, wenn er klarer wird (dans le névé lorsqu'il s'épure).

Die Eisoberfläche schmilzt, wie in § 172 gezeigt wurde, in den trüben salzhaltigen porösen Schichten eher, als in den klaren Schichten, und bildet Furchen, in denen sich die kleinen Schmutzteilchen oder Sand ansammeln aus den in § 182 angegebenen Gründen. Forbes[4]) nennt sie daher *Schmutzbänder* und hält sie für Jahresringe[5]) der Gletscher.

Heim[6]) bestätigt die Beobachtung von Forbes, daß die Struktur in dem oberen Teil des Gletschers fehlt und erst im weiteren Verlaufe besonders da entsteht, wo das Eis eine sehr starke Kompression durch Talverengerung, Abnahme der Böschung des Untergrundes, Eindrängen eines seitlichen Nebengletschers etc. erleidet; die Blaublätterstruktur eines unteren Gletscherteiles sei nicht notwendig eine Modifikation der oben entstandenen Struktur. Innerhalb einer Distanz von nur 100 m könne das fast strukturfreie Eis eine ausgeprägte Blaublätterstruktur erhalten. Vollständig damit übereinstimmend seien die Beobachtungen von Tyndall, wonach die Struktur stets

1) J. D. Forbes, Reisen p. 27, 28. Fig. 3, 4. p. 374. Fig. 2, 3. 1845.
2) A. Heim, Gletscherkunde p. 135. 1885.
3) L. Agassiz, Ann. d. chim. (3) 6. p. 468. 1842.
4) J. D. Forbes, Reisen p. 157, 278, 379. 1845.
5) J. D. Forbes, Edinb. N. Phil. Journ. 32. 1842.
6) A. Heim, Gletscherkunde p. 137.

senkrecht auf die Richtung des Maximaldruckes entsteht, wo derselbe einen besonders hohen Betrag erreicht. Die Struktur bilde sich bei Gletschern mit Sturzen, Talverengerungen etc. am stärksten aus, sei nicht Schichtung, sondern Schieferung. Die von den sukzessiven Schneefällen herzuleitende Schichtung trat im Firn deutlich hervor.

Meiner Ansicht nach entsprechen die blauen und weißen Bänder des Gletschereises den klaren und den weißen lufthaltigen Schichten, die sich unter dem Einfluß der Wärmestrahlung im ruhenden künstlichen Eis an den salzhaltigen Stellen bilden (vgl. §§ 172—174).

Die periodisch wechselnde Strahlung der Sonne muß solche Schichten auch im ruhenden Gletschereis erzeugen, welches Salz aus den zerriebenen Felsstücken aufgenommen hat, die auf den Gletscher gefallen sind. In der Tat bildet sich nach Forbes die Blätterstruktur in der Nähe der Moränen aus.

Ebenso kann der wechselnde Druck der Talwände auf das abwärts fließende Gletschereis die salzhaltigen Stellen im Eis schmelzen, die Schaumwände aus ölartiger Salzlösung können zusammenfließen und klares und weißes Eis nebeneinander entstehen lassen.

Aus den klaren Schichten ist die Salzlösung durch die Haarspalten abgeflossen. In den trüben Schichten ist sie zurückgehalten worden, in denen sie nicht zusammenhängende Schaumwände bildete und die Haarspalten mit sehr klebriger Flüssigkeit erfüllte. Die Luftblasen, von klebriger ölartiger Flüssigkeit umgeben, wurden ebenfalls zurückgehalten. Das Eis ist trübe geblieben.

Lage und Form der einmal entstandenen Schichten kann durch das Fließen des Gletscherstromes geändert werden, wie die Versuche von Forbes und v. Obermayer mit zähflüssigen Massen beweisen.

Mit einem Stempel preßte v. Obermayer[1]) horizontale Schichten von schwarzem und weißem Ton aus einem Zylinder durch ein Loch im Boden des Zylinders. Der ausfließende Tonstrahl bestand aus konzentrischen Zylindern von schwarzem

1) A. v. Obermayer, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 58. II. p. 738. 1869. Taf. 1. 2.

und weißem Ton mit konischen Erweiterungen am unteren Ende.

Die älteren Versuche von Forbes[1]) mit halbflüssigen Massen aus Gipsbrei und Leim in einem engen Kanalbett mit wechselndem Querschnitt und verschiedenem Gefälle habe ich schon oben erwähnt.

Das weiße Eis mit Salz und Luftblasen schmilzt bei einer niedrigeren Temperatur und geringerem Druck, ist weicher und weniger klebrig, als das klare blaue Eis. Bei dem Abwärtsfließen von dem breiten Firn durch ein enges Felsental werden weiches und hartes Eis übereinander geschoben und zu dünnen parallelen Schichten ausgewalzt, wie Butter und Mehlteig bei einem Blätterteigkuchen, oder wie glühendes Eisen und Schlacke zwischen den Walzen eines Walzwerkes.

Außer durch die Strömung des Gletschereises talabwärts werden die Luftblasen durch ihr geringeres spezifisches Gewicht in dem zähflüssigen Gletschereise in die Höhe getrieben und dadurch dem lufthaltigen Eis die Form der konischen Flächen von Forbes oder die Löffelform von Heim gegeben.

Schließlich möchte ich noch auf eine andere Ursache hinweisen, welche meiner Meinung nach die Bildung von Eisschichten mit verschiedenem Salzgehalt herbeiführen kann, welche sowohl die schmalen Furchen der Forelschen Streifen und die diesen entsprechende feine Schichtung der Gletscherkörner erklärt, als auch die größeren Furchen der Forbesschen Schmutzbänder und die Bänderstruktur der Gletscher.

Wie der Schnee in unseren Straßen fließen allmählich die Schneeflocken des Hochschnees zu den kleinen Körnern des Firnschnees, und diese zu den größeren Gletscherkörnern zusammen. Die im Schnee enthaltene Luft steigt als Bläschen in der zähen Flüssigkeit des Gletschereises in die Höhe und die Luftbläschen ordnen sich in horizontalen Schichten, wie die Luftbläschen in dem künstlichen Eise (§ 172).

Die Salze und Sandteilchen, welche von den Kondensationskernen der Schneeflocken und den zerriebenen Felsstücken herrühren, die auf den Gletscher gefallen sind, ordnen sich

1) J. D. Forbes, Phil. Trans. 1846. 1. p. 143.

ebenfalls beim Herabsinken in der zähen Flüssigkeit des Gletschereises in horizontalen Schichten an.

Wie man in Kieselsäuretrübungen Jahre lang neben den feinen Schichten mit kleinem Abstand und geringem Konzentrationsunterschied gleichzeitig dickere Schichten mit größerem Abstand und größerem Konzentrationsunterschied wahrnehmen kann[1]) (§§ 20 u. 31), so zeigt auch das Gletschereis gleichzeitig die feine Schichtung der Forelschen Streifen und die grobe Schichtung der Bänderstruktur oder Forbesschen Schmutzstreifen. Feste Teilchen und Luft sammeln sich in den einzelnen horizontalen Schichten, sowohl bei Kieselsäuretrübung (§ 31) als in den weißen Bändern des Gletschereises. Sind die festen Teilchen Salze und in Wasser löslich, so bilden sie mit dem benachbarten reinen Eis unter Einfluß von Druck und Sonnenlicht ölartige Flüssigkeit, und aus dieser entstehen Blasen oder zusammenhängende Schaumwände, die bei Abnahme von Druck, Sonnenstrahlung und Temperatur wieder gefrieren können, ohne wesentlich ihre Gestalt zu ändern.

§ 186. *Resultate.*

1. Unter einer *ölartigen* Flüssigkeit verstehe ich eine solche, welche an der Grenze mit einer anderen Flüssigkeit eine Oberflächenspannung zeigt. Die gemeinsame Grenze beider Flüssigkeiten hat das Bestreben, möglichst klein zu werden. Eine konzentrierte wässerige Salzlösung kann an der Grenze mit reinem Wasser oder schwächerer Salzlösung eine Oberflächenspannung zeigen, ölartig sein.

Läßt man reines oder salzhaltiges Wasser verschieden schnell frieren und langsam im Dunkeln, in freier Luft oder im Sonnenlicht abschmelzen, so zeigen die verschiedenen Schichten der 1—1000 mm dicken Eisprismen dieselben Erscheinungen in ähnlicher Reihenfolge, wie Lösungen von Kieselsäure, Leim und anderen Kolloiden, wenn diese zu Gallerten oder dünnen Lamellen eintrocknen und Sprünge bilden. Die Eisblöcke wurden dabei tagelang mit bloßem Auge, mit dem Mikroskop und polarisiertem Lichte untersucht.

Dünne klebrige ölartige Lamellen von einer Lösung großer

1) G. Quincke, Verhandl. d. Deutsch. Naturf. Ges. zu Düsseldorf 1898. p. 27; Ann. d. Phys. 7. p. 93 u. 673. 1902.

Konzentration in einer Lösung derselben Substanz von kleiner Konzentration bilden Falten, gerade und gewundene Röhren, Zylinder oder Kegel, Kugeln oder Blasen, offene und geschlossene Schaumkammern mit sichtbaren und unsichtbaren Schaumwänden.

Dünne feste Lamellen verhalten sich wie dünne Lamellen von sehr klebriger Flüssigkeit.

Ob die ölartigen Lamellen Röhren, oder ob sie Blasen und aneinanderhängende Schaumkammern bilden, hängt von der Klebrigkeit der ölartigen Flüssigkeit ab.

Neigungswinkel und Oberflächenspannung der Schaumwände ändern sich stetig mit der Konzentration der ölartigen Flüssigkeit und können bei unsichtbaren Schaumwänden von der Dicke der Lamelle abhängen. Die Oberflächenspannung nimmt bei sehr geringer Dicke mit der Dicke der ölartigen Lamelle ab.

An feste Oberflächen setzen sich die ölartigen Schaumwände normal an. Stoßen in einer Schaumkante drei ölartige Schaumwände unter gleichen Winkeln von 120° zusammen, so haben sie gleiche Oberflächenspannung.

Jede Gallerte besteht aus nebeneinanderliegenden offenen oder geschlossenen Schaumkammern mit dünnen Schaumwänden. Die Gallerte ist flüssige Gallerte oder flüssiger Schaum, wenn Inhalt und Wände der Schaumkammern aus Flüssigkeit bestehen, wenn zwei Gallertbrocken oder zwei Schaummassen zusammenfließen können. Die Gallerte ist steif, der Schaum steif oder fest, wenn die Wände oder der Inhalt der Schaumkammern oder beide fest geworden sind. Zwei Brocken von steifer Gallerte oder festem Schaum können nicht zusammenfließen.

Die Schaumkammern einer flüssigen Gallerte, die von Wasser umgeben ist, können ihr Volumen vergrößern oder verkleinern, indem Wasser mit Diffusion durch die Schaumwände nach innen oder nach außen geht, d. h. die flüssige Gallerte kann aufquellen oder schrumpfen.

Flüssige Gallerte wird vorübergehend positiv oder negativ doppeltbrechend, wenn die zähflüssigen Wände oder der zähflüssige Inhalt der Schaumkammern gedehnt oder comprimiert werden. Gallerte bleibt dauernd doppeltbrechend, wenn Wände

oder Inhalt der Schaumkammern in dilatiertem Zustande erstarren.

2. Eis ist eine flüssige Gallerte mit Schaumwänden aus flüssiger ölartiger wasserarmer Salzlösung, welche Schaumkammern mit zähflüssigem doppeltbrechendem reinem oder salzarmem Wasser umschließen.

3. Je mehr die Temperatur unter 0° sinkt, um so größer ist die Klebrigkeit der beiden Flüssigkeiten in den Wänden und im Innern der Schaumkammern, um so geringer die Plastizität des Eises.

4. Bei sehr niedriger Temperatur bricht das Eis mit muschligem Bruch an den kugelförmigen unsichtbaren Schaumwänden, die sich bei der Abkühlung anders zusammengezogen haben, als der Inhalt der Schaumkammern.

5. Die Gletscherkörner sind Schaumkammern mit reinem oder salzarmem Eis gefüllt, und durch sichtbare oder unsichtbare Schaumwände aus ölartiger Salzlösung voneinander getrennt.

6. Das Zusammenfließen zweier Eisstücke unter Wasser, die „Regelation" und die Vergrößerung des Gletscherkornes mit Annäherung an das untere Gletscherende entspricht dem Zusammenfließen zweier Gallertbrocken von Kieselsäure oder Leim oder Leimtannat mit flüssigen Schaumwänden und flüssigem Inhalt der Schaumkammern und dem Platzen einzelner Schaumwände.

Dabei werden die ölartigen Schaumwände zwischen den Gletscherkörnern durch die Flüssigkeit der geplatzten Wände dicker und durch Abfließen der flüssigen Salzlösung am Fuße des Gletschers wieder dünner.

7. Alles Wasser, auch das reinste Wasser, enthält noch Spuren Salz. Beim Abkühlen des Wassers scheiden sich Eiskristalle und ölartige Mutterlauge in kurzen Zwischenräumen oder periodisch ab.

Unter dem Einfluß der Oberflächenspannung bildet die ölartige Salzlösung unsichtbare Schaumwände, deren Oberflächenspannung mit der Dicke der Schaumwand und der Konzentration der Salzlösung abnimmt. Bei weiterer Abkühlung wird die Salzlösung immer konzentrierter, die Schaumwand dünner. Schließlich erstarrt auch die konzentrierte Salzlösung zu Eis und festem Salz.

Die Größe der Oberflächenspannung bestimmt die Winkel, unter welchen drei Schaumwände in einer Kante zusammenstoßen. Ist der Neigungswinkel zweier Schaumwände 120°, so haben die drei Schaumwände gleiche Oberflächenspannung; ist er 90°, so haben sich flüssige Schaumwände an alte, schon erstarrte Schaumwände angesetzt.

8. Beim Gefrieren von lufthaltigem Wasser scheidet sich die Luft, wie die im Wasser gelösten Salze, in kurzen Zwischenräumen oder periodisch aus. Die weißen Stellen des Eises mit Luftblasen sind auch die salzreichsten.

9. Bei der Abkühlung von luftfreiem salzhaltigen Wasser entstehen durch periodische Abscheidung von Eis und Salz Eisschichten mit verschiedenem Salzgehalt im Seeeis, im künstlichen Eis, im Gletschereis.

Durch Druck oder durch Wärmestrahlung der Sonne, des elektrischen Lichtes oder des Tageslichtes schmelzen die salzhaltigen Stellen des Eises eher, als das reine Eis.

10. Es entstehen im Sonnenlicht oder elektrischen Licht Furchen an den salzreichen Stellen der Oberfläche im Seeeis, im künstlichen Eis oder im Gletschereis. (Forelsche Streifen, Schmutzbänder von Forbes, Schaumwände der großen Schaumkammern des Kjendalgletschers.)

11. Die durch Druck oder Sonnenstrahlung gebildete Salzlösung läßt an den von ihr erfüllten Hohlräumen im Seeeis, künstlichen Eis oder Gletschereis die Formen erkennen, welche die Grenze der ölartigen Salzlösung und des Wassers kurz vor dem Gefrieren des Wassers unter dem Einfluß der Oberflächenspannung angenommen hatte. Beim Schmelzen kontrahiert sich das Eis. So entstehen im Seeeis durch Druck oder Wärmestrahlung in horizontalen Schichten parallel der erkalteten Wasseroberfläche die Tyndallschen Schmelzungsfiguren, luftleere Blasen, Eisblumen und Tannenbäume mit Astwinkeln von 120° und 90°, wie man sie beim Eintrocknen von Kolloidlösungen oder bei der Kristallisation wässeriger Salzlösungen erhält.

Bei künstlichem Eise, das in prismatischen hohen Trögen gefroren ist, entstehen diese Schmelzungsfiguren in den Diagonalflächen und Mittelschichten der Eisprismen, welche zuletzt erstarren und wo sich die Mutterlauge angesammelt hatte.

12. Seeeis und künstliches Eis zerfallen im Sonnenlicht in sechsseitige Säulchen von klarem Eis, welche sich um so schwerer gegeneinander verschieben, je dünner die feinen wieder geschmolzenen Schaumwände sind, welche sich beim Gefrieren aus ölartiger Salzlösung normal zur Oberfläche gebildet hatten, je geringer der Salzgehalt des Wasser vor dem Gefrieren war.

Die sechsseitigen Säulchen oder Schaumkammern sind um so größer, je reineres Wasser gefroren ist.

13. Die Haarspalten im klaren Gletschereis sind diese feinen Schaumwände aus ölartiger Salzlösung.

14. Gefriert Wasser mit schwachem Salzgehalt in hohen Blechtrögen, welche von abgekühlter Salzlake umgeben sind, so scheidet sich die ölartige Salzlösung in dünnen Schichten normal zur Oberfläche aus und bildet Blasen, aneinanderhängende Schaumkammern oder — wenn die ölartige Flüssigkeit bei niedriger Temperatur sehr klebrig ist — Falten oder hohle Schläuche, die mit reinem oder salzarmem Eis, bei lufthaltigem Wasser auch mit Luft gefüllt sind. Das künstliche Eis erscheint von vielen horizontalen Röhren durchzogen, normal zur Oberfläche, die in den Diagonalflächen und der Mittelfläche des Eisprismas besonders zahlreich sind, wo sich die Mutterlauge angesammelt hatte.

Diagonalflächen und Mittelfläche des künstlichen Eisblockes sind um so klarer, je weniger Salz im Eis enthalten ist.

Durch Belichtung mit trübem Tageslicht oder Sonnenlicht erscheinen neue Röhrchen. Das Eis wird trüber und später wieder klarer.

15. Friert lufthaltiges Wasser in hohen Blechtrögen, so zeigt der obere Teil des Eisblockes abwechselnd horizontale klare Schichten mit reinem Eise und trübe salzhaltige Schichten mit vielen Luftbläschen. Die trüben Schichten sind um so zahlreicher und liegen um so näher aneinander, je mehr Salz im Wasser enthalten ist.

Im Sonnenlicht schmelzen die trüben Schichten leichter, als die klaren Schichten. Auf der Oberfläche des trüben Eises entstehen Furchen.

16. Beim Wiederauftauen des Eises im warmen Zimmer und bei der Wärmestrahlung des Tageslichtes schmelzen die salzhaltigen Stellen des Eises eher, als die salzarmen. Die

Röhren von ölartiger Salzlösung bilden Anschwellungen und Schraubenwindungen, zerfallen unter Volumenverkleinerung in kugelförmige Blasen mit luftleeren oder lufterfüllten Hohlräumen. Das Eis erscheint trübe oder weiß. Die Schaumkammern zeigen dieselben Formen, wie die flüssigen Niederschläge der Metallsalzvegetationen oder der Kolloide und Gallerte beim Aufquellen und Einschrumpfen.

Sind die Haarspalten in diesem trüben Eis mit sehr klebriger Salzlösung gefüllt oder bildet die ölartige Salzlösung keine aneinanderhängenden Schaumwände, so kann die ölartige Salzlösung nicht abfließen. Das Eis bleibt trübe, wie das weiße Eis der Gletscher.

17. Beim Auftauen unter längerer Einwirkung des Tageslichtes erscheinen in den Diagonalflächen und der Mittelschicht des Eisblocks helle und trübe Streifen, welche mit Dauer und Intensität der Wärmestrahlung Form und Lage ändern, indem neue Schaumwände aus ölartiger Salzlösung entstehen und alte Schaumwände verschwinden. Man sieht die Neigungswinkel der Schaumwände sich ändern, d. h. die Oberflächenspannung der Schaumwände ändert sich. Da nach dem Innern des Eises der Salzgehalt der Diagonalflächen zunimmt und die Wärmestrahlung abnimmt, da ferner Oberflächenspannung und Viskosität mit Salzgehalt und Temperatur der Salzlösung wechseln, so wechseln auch die Formen, welche unter Einfluß der Oberflächenspannung von den ölartigen Lamellen im Innern des Eisblocks gebildet werden.

18. Nach 30—36 Stunden war der 1 m hohe künstliche Eisblock im warmen Zimmer auf halbe Höhe abgeschmolzen, am Fuße und an den wärmeren Stellen auseinandergeflossen. Im oberen Teile hatten sich Schaumwände von reinem Eis mit Neigungswinkeln von 120° gebildet, zwischen denen ebenso wie in der fortgeschmolzenen Mittelfläche stundenlang geschmolzene Salzlösung niederfloß. An den wärmeren Stellen und am obersten dünnen Rande entstanden Gletscherkörner, 5—10 mm breite Schaumkammern mit doppeltbrechendem Eise gefüllt, und durch einfachbrechende Schaumwände von klarer Salzlösung voneinander getrennt, in deren Knotenpunkten häufig Tetraeder lagen, von Kugelflächen begrenzt und mit klarer Flüssigkeit gefüllt.

19. Bei bestimmtem sehr kleinem Salzgehalt und bestimmter Intensität der Wärmestrahlung können sich in den Diagonalflächen oder der Mittelschicht des künstlichen Eisblocks von 1 m Höhe horizontale geschlossene Röhren aus reinem oder salzarmem Eise bilden, mit runden Köpfen und Anschwellungen und mit flüssiger Salzlösung gefüllt, die langsam aufquellen, langsam in einzelne Blasen zerfallen und dann langsam vergehen. Sie bildeten sich zuerst an tief gelegenen Stellen mit großem Druck und später an den höher gelegenen Stellen mit kleinem Druck.

20. War das destillierte luftfreie Wasser in Eisentrögen gefroren, so waren die Wände und der Inhalt der geschlossenen Röhren im unteren Teile der Mittelfläche gelb gefärbt während einiger Zeit für eine bestimmte Temperatur oder bestimmte Konzentration der Salzlösung und der ölartigen Schaumwand. Später verschwand die Färbung wieder. Sie fehlte, wenn das Wasser in einem Messingtrog gefroren war. Ich glaube, daß sie von Eisenoxyd herrührte, das in den Wänden und der Flüssigkeit im Innern der Schaumkammern verschieden löslich war und bei höherer Temperatur unlöslich zu Boden sank.

21. Die Erscheinungen im schmelzenden Eise hängen ab von der Geschwindigkeit, mit der das Wasser gefroren ist und von der Geschwindigkeit, mit der das Eis auftaut.

Die ölartigen Schaumwände sind um so zahlreicher und die Schaumkammern um so kleiner, je schneller das Wasser gefroren ist.

22. Sehr verdünnte Lösungen verschiedener Salze geben, unter ähnlichen Bedingungen langsam gefroren, ölartige Lamellen mit verschiedener Viskosität und verschiedener Oberflächenspannung oder Kugeln, Blasen, Röhren und Schaumwände von verschiedener Gestalt. Ich habe dies an frisch ausgekochtem Wasser mit 3 Milliontel Prozent Kochsalz oder äquivalenten Mengen von KCl, K_2CO_3, Na_2SO_4, $CaCl_2$, $MgCl_2$, $Al_2(SO_4)_3$ beobachtet. Das Wasser war in prismatischen Trögen aus Messing oder Weißblech gefroren.

23. Während des Frierens von lufthaltigem Wasser mit 15 Milliontel Natriumsulfat schied sich die Luft gleichzeitig mit der Mutterlauge aus. Die Grenzfläche von Luft und beinahe erstarrter sehr klebriger Flüssigkeit will möglichst klein

werden und rollt sich zu Hohlzylindern zusammen, von um so kleinerem Radius, je schneller das Wasser gefriert. Das Wasser friert um so langsamer, je weiter es von der unter 0° abgekühlten Trogwand entfernt ist. Die dünnen Lamellen oder Röhrenwände liegen normal zur festen Oberfläche der Trogwand oder des klaren Eismantels, welcher die Mutterlauge umhüllt. Sie bilden häufig mit weißlicher Haut bekleidete und mit Luft gefüllte zylindrische oder kegelförmige Röhren von 6—12 mm Länge, deren Achse normal zur Oberfläche liegt und deren Spitze nach der Außenseite des Eismantels weist. An der 0,5—2 mm breiten Basis dieser Röhren hing eine weißliche Hohlkugel im Innern der Mutterlauge.

24. Beim langsamen Gefrieren von Wasser mit 30 Milliontel NaCl enthält die von dem klaren Eismantel umgebene Mutterlauge zuweilen viele ebene Kristallblättchen von reinem Eise, welche durch Lage, Neigungswinkel und Gestalt deutlich erkennen lassen, daß sie aus ölartigen dünnen Schaumwänden von reinem Wasser entstanden sind, welche sich beim Erkalten aus der wässerigen Salzlösung ausgeschieden haben und dann erstarrt sind.

25. Taucht man ein Probierröhrchen mit kochendem destillierten Wasser in flüssige Luft, so gefriert das Wasser sehr schnell zu einer milchweißen Eismasse mit Sprüngen normal zur Glasfläche. Taucht man das auf —190° erkaltete Probierröhrchen mit dem weißen Eise in destilliertes Wasser, so überzieht es sich außen mit einer dünnen Eiskruste. Die Eiskruste läßt sich mit dem Messer ablösen und in einer Glasschale unter dem Polarisationsmikroskop untersuchen. Sie besteht aus kleinen Gletscherkörnern oder Schaumkammern von 0,1—0,2 mm Durchmesser, deren ebenen Schaumwände normal zur Zylinderfläche liegen und Winkel von 120°, 110° etc. miteinander einschließen. Das Innere jeder Schaumkammer enthält einen Eiskristall, der in den verschiedenen Schaumkammern verschieden orientiert ist. Das Eis im Innern des Probierröhrchens zeigt, durch Druck mit einer Stahlspitze zertrümmert, faserigen Bruch mit feinen Fasern normal zur Zylinderfläche, zuweilen im Querschnitt konzentrische Hohlzylinder mit abwechselnd klarem und weißem Eise. Durch die latente Wärme des periodisch gefrierenden Wassers wird der Wärmeverlust

verringert. Die Erkaltungsgeschwindigkeit wechselt. In den klaren Schichten ist das Eis langsam, in den trüben Schichten schnell gefroren.

Beim Auftauen in einer Glasschale unter dem Polarisationsmikroskop zeigen die Brocken des schnell gefrorenen weißen Eises ungeheure Mengen radialer nebeneinander liegender Schnüre von 0,01—0,02 mm breiten Kugeln oder Linsen aus Flüssigkeit (Wasser mit sehr geringem Salzgehalt). In jeder Kugel lag eine luftleere Blase von 0,0006 mm Durchmesser.

26. Langsam gefrorenes Wasser zeigte beim Auftauen ähnliche Schnüre flüssiger Kugeln und Linsen von größerem Durchmesser (0,04—0,12 mm) normal zur Oberfläche des Eisblocks, die sich aus massiven oder hohlen Zylindern oder langgestreckten Kegeln mit Anschwellungen gebildet hatten. Häufig lagen von zwei kugelförmigen Schaumwänden begrenzte Linsen in einer dünnen ebenen, gewundenen oder windschiefen Schaumwand.

27. Die Fasern und die zylinderförmigen und kegelförmigen Röhren sind, wie die mit Luft gefüllten Röhren aus dünnen Lamellen ölartiger, sehr klebriger Flüssigkeit entstanden, die sich beim Erkalten normal zur Oberfläche abgeschieden und unter dem Einfluß der Oberflächenspannung aufgerollt haben, da sie wegen zu großer Viskosität nicht Kugeln oder Blasen bilden konnten.

28. Nach längerem Auftauen erscheinen weniger Schaumwände und größere Schaumkammern oder Gletscherkörner in den Eisbrocken. Die Flüssigkeitskugeln in den Schnüren normal zur Oberfläche sind größer geworden, indem die kleinen Flüssigkeitskugeln in der doppeltbrechenden Eismasse zu größeren Kugeln zusammengeflossen sind. Größerer Salzgehalt des Eises befördert das Zusammenfließen. Die Röhren oder die Schnüre von Kugeln ließen sich oft durch mehrere Gletscherkörner stetig verfolgen. Auf den Scheidewänden der Gletscherkörner erschienen bei Belichtung oft Hunderte von kleinen Linsen von gleicher oder allmählich abnehmender Größe.

29. Durch wiederholtes fraktioniertes Gefrieren und Schmelzen der gebildeten Eiskristalle erhält man immer reineres Eis mit immer größeren Schaumkammern oder Gletscherkörnern. Es ist mir aber auch bei langsamem wieder-

holtem Gefrieren bisher nicht gelungen, Eis ohne Schaumwände oder ohne Gletscherkörner zu erhalten.

30. Die Schnittfläche eines klaren Eisblocks, der mit einer Bottomleyschen Drahtschlinge aus Stahldraht oder aus reinem frisch geglühtem Platindraht mit 2 kg Belastung oder mehr durchschnitten worden ist, erscheint niemals klar, sondern stets trübe von erstarrten Schaumblasen aus ölartiger Salzlösung von anderer Lichtbrechung als die Umgebung.

31. Jedes einzelne Gletscherkorn im künstlichen Eis enthält einen verschieden orientierten Eiskristall, dessen optische Achse sehr selten normal zur Oberfläche des Eises liegt. Wenn bei natürlichem Seeeis die optische Achse der einzelnen Kristalle in den verschiedenen Gletscherkörnern normal oder parallel zur freien Wasseroberfläche gefunden worden ist, so mögen Eiskristalle oder Schneeflocken, die auf die Oberfläche des überkälteten Wassers aufgefallen waren und in flacher Lage schwammen, durch Kontaktwirkung die Ausscheidung orientierter Eiskristalle eingeleitet haben.

32. Das künstliche Eis ist um so klarer und fester, läßt sich um so schwerer mit dem Messer schneiden, je langsamer es gefroren ist, je weniger Salz es enthält.

33. Jeder künstliche Eisblock spaltet bei Druck mit einer Stahlspitze nach den Diagonal- und Mittelflächen, in denen sich beim Ausfrieren der Eiskristalle die Mutterlauge der Spuren Salz angereichert hat.

34. Die bevorzugten Gleitflächen der natürlichen Eiskristalle (Blätterstruktur, Translation ohne Biegung) rühren von unsichtbaren Schichten flüssiger Salzlösung her, die in den Kristall eingelagert sind, normal zur optischen Achse oder oft auch in anderer Lage.

35. Die Eiskristalle bestehen bei Temperaturen unter 0° aus doppeltbrechender klebriger Flüssigkeit und stehen in der Mitte zwischen den weichen Kristallen von Serumalbumin und den gewöhnlichen Kristallen von Quarz, Feldspat etc.

36. Am Rande der Tyndallschen Schmelzungsfiguren, die sich verbreitern, oder beim Platzen der Schaumwände des abschmelzenden künstlichen Eises sieht man oft periodische Wirbelbewegungen, herrührend von periodischer Ausbreitung

der Salzlösung der Schaumwände an der Grenze von reine Wasser und luftleerem Raum oder Luft.

37. Tyndall und Huxley haben klare, von Kugelfläche begrenzte Linsen in weißem Gletschereise beobachtet. I waren Schaumblasen aus luftfreiem Wasser, die von ein dünnen Haut ölartiger Salzlösung umhüllt und in einer dünne Haut von ölartiger Salzlösung eingelagert, erstarrt waren.

38. Die blauen Bänder des Gletschereises bestehen aus fa reinem Eis, die weißen Bänder aus salzhaltigem Eis mit Luf bläschen. Sie entstehen durch periodische Wärmestrahlu der Sonne und wechselnden Druck oder bei langsamem Au steigen der Luftbläschen in der klebrigen Flüssigkeit d Gletschereises.

39. Das Eis der Schneeflocken, welche auf das obe Ende des Gletschers fallen, wird von den anorganischen Salz zertrümmerter Gesteine befruchtet und von den Sonnenstrahl ausgebrütet zu Firnschnee und Gletscherkörnern oder ei gefüllten Schaumkammern in dem eigentlichen Gletscher. D Gletschereis wandert und wälzt sich langsam zu Tal a lebendiger Eisstrom. Sein Knochengerüst aus flüssiger Sal lösung ändert sich dabei und bildet neue größere Schaumzelle die am unteren Gletscherrand absterben, vergehen und a Gletscherbach abfließen.

Die Resultate dieser Untersuchung wurden der Roy Society in London am 19. Juni 1905 mitgeteilt.

Hrn. Dr. Rudolf Weber habe ich für die Aufnahme d Photographien, sowie der Brauerei-Gesellschaft zum Eng vormals Chr. Hofmann in Heidelberg und Hrn. Braumeist Claessner für die Mitwirkung bei Herstellung der künstlich Eisblöcke zu danken.

Heidelberg, den 20. Mai 1905.

(Eingegangen 26. Juni 1905.)

---

2. *Über die innere Reibung des Eises;*
von Boris Weinberg.

---

1. Während meiner Untersuchungen über die Relaxation und die innere Reibung der festen Körper im allgemeinen[1]) wandte ich mich auch an kristallinische Körper und wählte als erstes Objekt das Eis. Ich erlaube mir, die Ergebnisse meiner Versuche, trotzdem sie wegen des milden Wetters leider nicht weit vorgeschritten sind, hier mitzuteilen, weil dieselben durch die Verschiedenheit der Methoden die vorliegenden Beobachtungen von Mc Connel[2]) und die ausführliche Arbeit von Hess[3]) in einigen Richtungen ergänzen.

Die von mir angewandte Methode — Torsion von Eiszylindern und Eisprismen — hat gewisse Vorteile gegenüber der Methode von Hess — Durchbiegung von Eisstäben.[4]) Während bei der Anwendung der letzten Methode die Dauer des Versuches durch die allmählich vorschreitende Krümmung des Stabes begrenzt ist, kann bei der Torsion der Versuch beliebig lange fortdauern, die geometrischen Bedingungen bleiben fortwährend dieselben, und der Zustand der stationären Bewegung kann — wenn andere Einflüsse ausgeschlossen sind — sicher erreicht werden. Die Durchbiegung wird außerdem von lokalem Drucke begleitet, während bei der Torsion kein Druck vorhanden ist und deswegen die Frage von der Regelation wegfällt.

2. Ich befestigte das eine Ende eines Eiszylinders (oder eines Eisprismas) an ein vertikales Brett *GH* (Fig. 1) und vereinigte das andere Ende mit einem Kästchen *CD*, welches an

---

1) Über die angewandte Methode vgl. B. Weinberg, Proc. Phys. Soc. Lond. 19. p. 472. 1904.

2) Mc Connel, Proc. Roy. Soc. 49. p. 323. 1891.

3) H. Hess, Ann. d. Phys. 8. p. 405. 1902.

4) Frühere Forscher auf dem Gebiete der Plastizität des Eises wandten Zug oder Druck an, bei welchen viel kompliziertere Deformationen eintreten als bei der Torsion. Diese, als eine bloße Formänderung, ist deswegen zur Erzeugung der Gesetze solcher Erscheinungen viel geeigneter.

der Achse einer vertikalen Torsionsscheibe *AB* angebracht war. In diesem Kästchen und einer Öffnung *EF* in dem Brette *GH* befanden sich gut passende Eisstücke und in den letzteren wurden mit einem stark erhitzten Metallstabe entsprechende Vertiefungen gemacht. In diese legte ich die Enden des Eis-

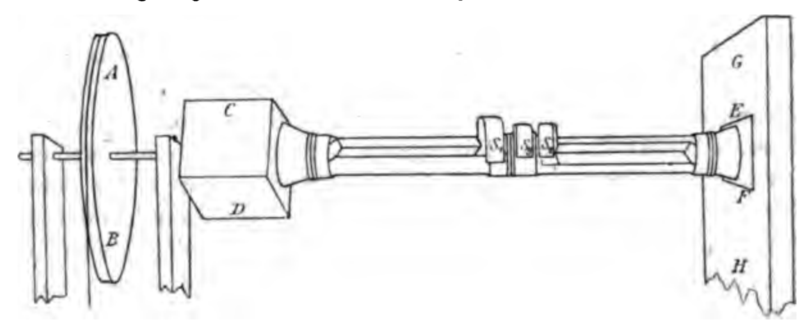


Fig. 1.

zylinders hinein und verkittete die Verbindungsstellen mit einer Mischung von weichem Schnee und Wasser.

Die Anfertigung der Eiszylinder ist etwas mühsam und gelingt nicht immer. Ein mit einer Säge ausgeschnittenes prismatisches Eisstück wird mit einem schweren Messer erst grob abgehauen und darauf feiner abgeschabt. Um dem so erhaltenen Zylinder eine regelrechte Oberfläche zu geben, wird derselbe auf einer erhitzten Herdplatte[1]) einige Male rasch hin und her gerollt. Den Eisprismen ist durch Bewegungen auf der Herdplatte leicht die erforderliche Form zu geben.

Alle Zylinder und Prismen wurden aus dem Flußeise der Newa so hergestellt, daß ihre Achse mit der Normalen zur Gefrierungsoberfläche, d. h. mit der optischen Achse zusammenfiel.

3. Um die relative Winkelverschiebung verschiedener zu der Achse senkrechten Schichten verfolgen zu können, habe ich an einigen Stellen der Eiszylinder (bez. Prismen) besondere Aluminiumfassungen (Fig. 2) mit einer Schnur festgebunden und mit etwas nassem Schnee verkittet. Diese Fassungen ermöglichen, in das Gesichtsfeld eines Fernrohres zwei oder

---

1) Noch besser auf einem metallischen Teebrett, welches mit siedendem Wasser gleichförmig erhitzt worden ist.

drei Spiegelchen s anzubringen, welche dieselben Winkelverschiebungen wie die entsprechenden Normalschnitte des Zylinders erleiden. (Auf Fig. 1 sieht man drei solche Fassungen, welche mittels der Spiegelchen s_1, s_2 und s_3 die Verschiebungen der beiden Enden und der Mitte des Zylinders ergaben.)

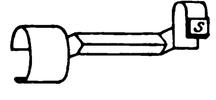


Fig. 2.

Das Spiegelchen (s_2 auf Fig. 1) der Fassung, welches dem unbeweglichen Ende des Zylinders entsprach, spielte nur eine Kontrollrolle, und gab fast unveränderliche Ablesungen einer Skala in dem Fernrohr. Deswegen habe ich mich meistens mit einer Fassung, welche am anderen Ende des Zylinders angebracht war, begnügt (entsprechender Spiegel s_1 auf Fig. 1).

Der ganze Apparat war außen an der Fensterbrüstung befestigt und die Beobachtung geschah durch das offene Fenster vom Zimmer aus.

4. Der Vorgang ist, wie auch bei den anderen untersuchten Körpern (Blei, Kupfer, Messing, Stahl, Eisen) folgender: In den ersten Momenten nach der Anwendung der Kraft tritt eine — verhältnismäßig — große „elastische“ Deformation ein, welche darauf allmählich wächst, mit einer Geschwindigkeit, die asymptotisch bis zu einem konstanten Werte abnimmt. Nach der Ausschaltung der angewandten Kraft beobachtet man einen analogen sich asymptotisch verzögernden Rückgang.

Ich untersuchte hauptsächlich den zeitlichen Verlauf der Winkelverschiebung nach dem Anhängen des Gewichtes und nach dem Aufheben desselben. Trotzdem näherte ich mich in fünf Beobachtungsreihen (aus zehn), wie es mir scheint, in genügendem Maße einem stationären Zustande, um den Versuch der Bestimmung des „Koeffizienten“ der inneren Reibung des Eises zu machen.

Der beträchtliche Einfluß der Temperaturschwankungen, die geometrischen Unregelmäßigkeiten der Zylinder und das mit der Zeit eintretende Abschmelzen oder Verdunsten[1]) der-

1) Um diesen Einfluß zu berücksichtigen, nahm ich an, daß die Verminderung der Querdimensionen proportional der Zeit zwischen den Messungsmomenten hervorging.

Tabelle I.

Torsion eines Eiszylinders. $l = 36$ cm; $2\pi r = 8{,}3$, 9,2, 9,8 cm am 23./II. $12^h 20^m$ Nachm.; $2\pi r = 8{,}2$, 9,8 am 24./II. $1^h 0^m$ Nachm.; $2\pi r = 8{,}0$, 9,3 am 25./II. $12^h 7^m$ Nachm.[1]) $D = 181{,}5$ cm. $P = 1487$ g.

t	n (cm)	$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\left(\frac{10^{-7}}{\text{sec}}\right)$	$\mu\left(\frac{10^{18}\,\text{g}}{\text{cm . sec}}\right)$	$\mu_{\text{ber.}}$	$\mu - \mu_{\text{ber.}}$	T^0 C.	
23./II. $12^h 33^m$ Nachm.	49,90						Gewicht angehängt
		3307	0,03			− 4,0	
12 34 „	56,93						
		523	0,21			− 4,1	
12 40 „	63,77						
		154	0,72			− 3,6	
1 25 „	78,83						
		49	2,26			− 3,9	
4 35 „	98,91						Spiegel und Skala umgestellt. Erste Ablesungen nach der Berührung der Fassung wurden, wie immer, weggelassen wegen der möglichen elastischen Nachwirkungen in derselben
5 3 „	66,78						
		27,3	4,06			− 5,3	
6 0 „	70,17						
		24,3	4,56			− 5,6	
7 0 „	73,35						
		21,7	5,10	5,08	+0,02	− 5,5	
8 0 „	76,19						
		22,6	4,90	5,17	−0,27	− 5,6	
9 0 „	79,14						
		19,8	5,59	5,44	+0,15	− 5,9	
9 38 „	80,78						
		18,0	6,15	5,62	+0,53	− 6,1	
10 34 „	82,98						
		17,5	6,33	6,00	+0,33	− 6,5	
10 56 „	83,82						Spiegel und Skala umgestellt
11 15 „	58,08						
		12,2	9,08	9,10	−0,02	− 9,4	
24./II. $4^h 35^m$ Vorm.	66,61						
		11,8	9,39	9,22	+0,17	− 9,5	

			11,0	10,07	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
8 52	„	73,00						Skala etwas verschoben
8 52	„	72,90						
			8,9	12,45	10,48	+2,02	−10,5	
9 57	„	74,16						
			10,9	10,18	8,75	+1,43	− 9,1	
10 55	„	75,54						
			15,9	6,97	7,21	−0,24	− 7,7	
12 10	Nachm.	78,14						Von 12^h bis 4^h beleuchtete die Sonne stark den Zylinder. Im folgenden wurde ein Schutz gegen Sonnenschein gemacht
			23,8	4,65	(7,11)	(−2,46)	− 7,6	
12 43	„	79,85						
			29,0	3,82	(6,40)	(−2,58)	− 6,9	
12 59	„	80,86						
			39,4	2,81	(6,31)	(−3,50)	− 6,8	
1 25	„	83,09						
			57,5	1,93	(6,00)	(−4,07)	− 6,5	
3 25	„	98,12						
			19,8	5,59	(7,33)	(−1,74)	− 7,8	
3 41	„	98,81						
			22,6	4,90	(7,53)	(−2,63)	− 8,0	
5 0	„	102,70						Skala umgestellt
5 7	„	85,20						
			17,1	6,47	7,00	−0,63	− 7,5	
5 39	„	86,39						Skala etwas verschoben
5 40	„	86,58						
			22,3	4,97	6,31	−1,34	− 6,8	
6 25	„	88,77						
			21,1	5,25	5,72	−0,47	− 6,2	
6 58	„	90,29						
			22,8	4,86	5,44	−0,58	− 5,9	
7 47	„	92,68						

1) Die Verschiedenheit der ersten Zahlen ist zu betrachten als verursacht durch eine beträchtliche Konizität des entsprechenden Ende des Zylinders; darum wurde hier der Einfluß der Verdunstung nicht berücksichtigt.

Tabelle I (Fortsetzung).

t		n (cm)	$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \left(\frac{10^{-7}}{sec}\right)$	$\mu \left(\frac{10^{13} g}{cm . sec}\right)$	$\mu_{ber.}$	$\mu - \mu_{ber.}$	T^0 C.	
24./II.	7h 47m Nachm.	92,68	22,7	4,89	5,26	−0,37	−5,7	
	8 19 „	94,26	22,0	5,04	5,26	−0,22	−5,7	
	8 57 „	96,08						Spiegel umgestellt
	9 18 „	61,70	24,2	4,17	5,26	−1,09	−5,7	
	10 7 „	64,28	23,7	4,68	5,53	−0,85	−6,0	
	10 33 „	65,62	20,3	5,46	5,53	−0,07	−6,0	
	10 52 „	66,46	20,7	5,35	5,44	−0,09	−5,9	
	11 18 „	67,63	20,5	5,40	5,44	−0,04	−5,9	
25./II.	2h 36m Vorm.	76,55	17,7	6,26	6,76	−0,50	−7,2	
	7 43 „	88,41						Skala etwas verschoben
	7 44 „	88,58	20,8	5,33	5,53	−0,20	−6,0	
	9 15 „	92,70	23,6	4,69	4,39	+0,30	−4,7	
	9 53 „	94,65	30,6	3,62	3,61	+0,01	−3,7	
	11 33 „	101,32						Skala umgestellt
	11 36 „	77,06	37,3	2,97	2,67	+0,30	−2,4	
	12h 7m Nachm.	79,58	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

[illegible]	„	[illegible]						
			50,5	2,19	1,79	+0,40	−1,0	
1 45	„	90,03						
			58,1	1,91	1,85	+0,06	−1,1	
2 5	„	92,56						
			50,8	2,18	1,85	+0,83	−1,1	
2 25	„	94,82						
			51,9	2,18	1,91	+0,22	−1,2	
2 45	„	97,21						Spiegel und Skala umgestellt
3 0	„	51,80						
			45,9	2,41	2,09	+0,32	−1,5	
3 12	„	53,00						
			51,9	2,13	2,09	+0,04	−1,5	
3 28	„	54,81						
			55,1	2,01	2,09	−0,08	−1,5	
3 48	„	57,21						
			57,8	1,92	2,09	−0,17	−1,5	
4 3	„	59,10						
			55,1	2,01	2,03	−0,02	−1,4	
4 15	„	60,54						
			55,6	1,99	2,03	−0,04	−1,4	
4 25	„	61,75						
			61,2	1,81	1,91	−0,10	−1,2	
5 13	„	68,15						
			67,5	1,64	1,74	−0,10	−0,9	
6 5	„	75,80						
			76,7	1,44	1,46	−0,02	−0,4	
6 33	„	80,48						
			96,3	1,15	1,24	−0,09	+0,0	
7 38	„	94,11						
			117	0,95			+0,2	
7 58	„	99,21						Skala umgestellt
8 2	„	77,21						
			212	0,52			+0,3	
8 10	„	80,90						
8 15	„							Zylinder zerbrochen gefunden

selben sind auch als Hindernisse zu einer genauen Ermittelung des „Koeffizienten" der inneren Reibung zu betrachten, so daß nur die Ordnung der weiter unten angeführten Werte als richtig angesehen werden kann.

5. Ich führe in der vorstehenden Tabelle die Angaben der längsten Versuchsreihe an, in welcher ich einen stationären Zustand erreicht zu haben mit Sicherheit behaupten kann. Für diese stationäre Periode gebe ich sämtliche Ablesungen an, für das Anfangsstadium aber nur 8 aus 98.

Die Werte des Koeffizienten μ der inneren Reibung sind — unter der Annahme, daß diese Größe von der relativen Verschiebungsgeschwindigkeit der parallelen Schichten unabhängig ist — berechnet nach der Formel

(1)[1] $$P g R = \mu \frac{\pi r^4}{2 l} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t},$$

wo $P g$ die angewandte Torsionskraft (in Dynen), R (12,6 cm) den Halbmesser der Torsionsscheibe, r den Halbmesser des Eiszylinders, l den Abstand der Fassung des beobachteten Spiegels von dem unbeweglichen Ende und $\Delta \varphi / \Delta t$ die mittlere Winkelgeschwindigkeit dieses Spiegels bedeuten. In der Tab. I bezeichnen außerdem t den Moment der Ablesung, n die entsprechende Ablesung der Skala im Fernrohr, D den Abstand zwischen Spiegel und Skala, $\mu_{\text{ber.}}$ die Werte von μ, berechnet nach der Formel (2) (vgl. weiter unten) und T (^{0} C.) die mittlere Lufttemperatur. Der Gang der Temperatur zwischen den Beobachtungsmomenten wurde, weil am Beobachtungsorte jeden Tag nur einigemal das Thermometer abgelesen wurde, nach den Angaben des Hauptphysikalischen Observatoriums in St. Petersburg beurteilt.

Der Betrag des Fehlers von l ist im Durchschnitt wahrscheinlich gleich 2—4 Proz., von r 1—2 Proz. und von $\Delta \varphi / \Delta t$ 1—3 Proz., so daß die Werte von μ im allgemeinen als mit einem Fehler von 5—10 Proz. behaftet angesehen werden müssen (vgl. Tab. I, p. 84—87).

---

1) Für Eisprismen ist hier $\frac{a b (a^2 + b^2)}{12 l}$, wo a und b die Seiten sind, anstatt $\frac{\pi r^4}{2 l}$ zu setzen.

Die Ergebnisse anderer Reihen sind folgende (nur für stationäre Perioden):

Tabelle II.

Eiszylinder. $l = 30$ cm. $2\pi r =$ ca. 9 cm. $P = 689$ g.

$\mu \cdot 10^{-13} =$	10,2	9,0	12,0	13,7	12,4	14,3
$T^0 =$	−1,8	−2,4	−3,6	−4,4	−4,8	−4,2

Tabelle III.

Derselbe Zylinder. $P = 1487$ g.

$\mu \cdot 10^{-13} =$	3,2	3,6	3,3	3,5	3,1	3,0	2,7	2,3	1,9	1,9	2,0
$T^0 =$	−2,9	−3,0	−2,9	−2,8	−2,6	−2,2	−1,5	−0,6	−0,4	−0,1	+0,0

Tabelle IV.

Eisprisma, quadratischer Querschnitt. $l = 40$ cm. $a = 3,5$ cm. $P = 1600$ g.

$\mu \cdot 10^{-13} =$	6,7	7,7	6,5	5,1
$T^0 =$	−4,0	−3,7	−2,9	−1,9

Tabelle V.

Dasselbe Prisma nach einer Abschmelzung. $a = 2,8$ cm. $P = 882$ g.

$\mu \cdot 10^{-13} =$	4,4	6,2	5,7
$T^0 =$	−2,1	−1,8	−1,5

6. Um den Einfluß der Temperatur zu veranschaulichen, ist in der Fig. 3 der gemeinsame Gang der mittleren Torsionsgeschwindigkeit und der mittleren Lufttemperatur den Daten der Tab. I gemäß abgebildet und in der Fig. 4 sind die entsprechenden Werte von μ als Funktion der Temperatur dargestellt. Aus der Fig. 3 sieht man deutlich, daß die Veränderungen der Geschwindigkeit den Veränderungen der Temperatur folgen, obgleich mit einiger Verspätung. Der Umstand, daß ich nicht die Eistemperatur, sondern nur die Lufttemperatur — und noch nach einer indirekten Methode — verwertete, schließt die Möglichkeit einen Temperaturkoeffizienten zu bestimmen aus. Doch um den beträchtlichen Einfluß der Temperatur zu zeigen, habe ich die Werte von μ in der Tab. I durch eine Formel

$$\mu_{\text{ber.}} = (1,244 - 0,502\,T + 0,0355\,T^2)\,\frac{10^{13}\,\text{g}}{\text{cm}\,.\,\text{sec}} \tag{2}$$

darzustellen versucht, welche sich den Beobachtungen ziemlich genau anpaßt, wie man aus der fünften und sechsten Kolumne der Tab. I und aus Fig. 4 schließen kann.

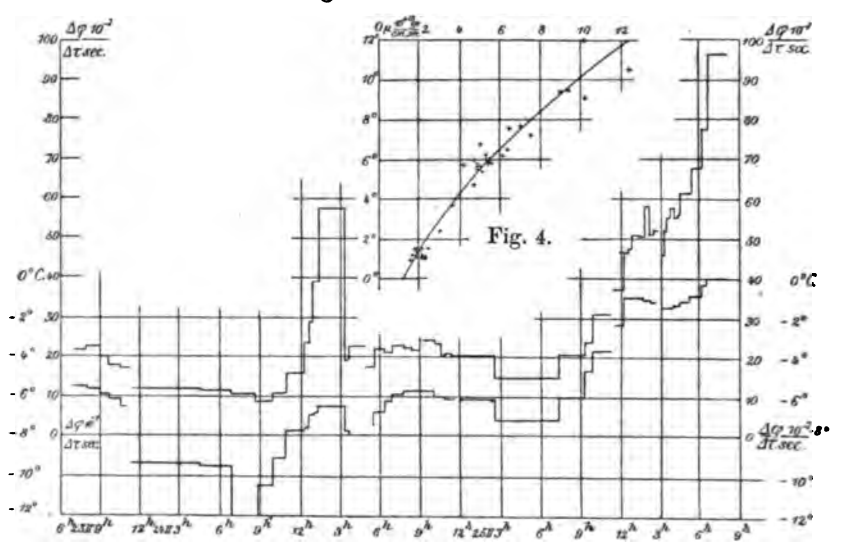


Fig. 3. Obere Linie = mittlere Torsionsgeschwindigkeit.
Untere Linie = mittlere Lufttemperatur.

Von 12h bis 4h Uhr Nachm. 24. II. war der Eiszylinder von der Sonne beleuchtet.

7. Die schnelle und fortwährende Zunahme der „elastischen“ Deformation macht eine Bestimmung des Torsionsmoduls noch mehr illusorisch, als die Verwertung von μ. Wenn man jedoch bedingungsweise als „elastische“ Torsion diejenige annimmt, welche 1 Min. nach dem Anhängen des Gewichtes eintritt, so bekam ich für den Torsionsmodul N („modulus of rigidity“) folgende Werte:

$N \cdot \frac{10^9 \text{ g}}{\text{cm . sec}^2}$ =	2,8,	5,3	4,8,	5,6	8,9	5,7	2,8,	6,8
T^0 C. =	+1,1,	−4,0	−3,0,	−0,1	−2,9	−4,0	−1,5,	+1,0

$N \cdot \frac{10^9 \text{ g}}{\text{cm . sec}^2}$ =	3,7,	4,7,	5,1,	5,8	3,0,	7,7
T^0 C. =	+0,2,	−0,7,	−2,2,	−1,4	+0,2,	−1,2

Die Werte, welche sich auf verschiedene Zylinder und Prismen beziehen, sind durch dicke vertikale Linien abgesondert; die feinen Linien sondern die Werte ab, welche bei Anhängen und Aufheben verschiedener Gewichte erhalten wurden.

8. Die erwähnten Versuche führen zu folgenden Schlüssen:

1. Der Koeffizient der inneren Reibung des Newaeises für die Verschiebungen senkrecht zu der optischen Achse, welche mit einer mittleren Winkelgeschwindigkeit von der Ordnung $10^{-8}\frac{1}{\text{sec}}$ hervorgehen, ist von der Ordnung $10^{13}\frac{\text{g}}{\text{cm}\,.\,\text{sec}}$ (ca. $5\,.\,10^{13}$ bei -5^0 C.).

2. Die Temperatur hat einen merklichen Einfluß auf den Koeffizienten der inneren Reibung des Eises, welcher etwa um $1\,.\,10^{13}$, bei einer Erniedrigung der Temperatur um 1^0 zunimmt.

3. Der Torsionsmodul des Newaeises für die Verschiebungen senkrecht zu der optischen Achse ist von der Ordnung $10^9\frac{g}{\text{cm}\,.\,\text{sec}^2}$ (ca. $5\,.\,10^9$ bei -1^0 C.).

Es wäre wünschenswert, derartige Bestimmungen, welche nur sehr bescheidene Hilfsmittel erfordern, für verschiedene Arten des Eises und für verschiedene Lagen der kristallographischen Achse des Eises unter günstigen Temperaturbedingungen zu wiederholen.

Odessa, 27. April 1905.

(Eingegangen 20. Mai 1905.)

3. *Elektrische Schwingungen in ringförmigen Metallröhren; von A. Kalähne.*

(Theoretisch.)

---

§ 1. Die elektromagnetischen Schwingungen in Metallröhren sind auf Grund der Maxwellschen Gleichungen mehrfach theoretisch behandelt worden; so von J. Larmor[1]), von J. J. Thomson[2]), zuletzt und am allgemeinsten von R. H. Weber.[3]) Experimentelle Untersuchungen[4]) hatten gezeigt, daß ein Metallrohr Schwingungen *einer* bestimmten Periode, die in Beziehung steht zu seinen Dimensionen, am besten hindurchläßt, so daß man hieraus auf das Vorhandensein gewisser Eigenschwingungen des Rohres schließen kann.

Weber hat das Problem allgemein gelöst für ein unendlich langes, gerades Metallrohr mit kreisförmigem Querschnitt durch Einführung von Zylinderkoordinaten z, r, φ, die auch bei dem Problem der Fortpflanzung elektrischer Wellen längs eines geraden Drahtes von H. Hertz[5]), A. Sommerfeld[6]) und J. J. Thomson[2]) benutzt worden sind. Während aber bei dem zuletzt genannten Problem, das Sommerfeld ganz streng gelöst hat, symmetrische Verteilung der elektrischen und magnetischen Kräfte rings um die Zylinderachse angenommen wird, wodurch der Einfluß des Azimuts φ herausfällt, hat Weber allgemeiner auch den axial-unsymmetrischen Fall be-

1) J. Larmor, Electric Vibrations in Condensing Systems. Proc. Lond. Math. Soc. **26**. p. 119. 1894.

2) J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism. Oxford 1893. Art. 259—274. Art. 300—307.

3) R. H. Weber, Elektromagnetische Schwingungen in Metallröhren. Habilitationsschrift, Heidelberg 1902; Ann. d. Phys. **8**. p. 721. 1902.

4) V. v. Lang, Wied. Ann. **57**. p. 430. 1896; P. Drude, Wied. Ann. **65**. p. 481. 1898; A. Becker, Dissert. Heidelberg 1901; Ann. d. Phys. **8**. p. 22. 1902 (zusammengestellt bei R. H. Weber, l. c.).

5) H. Hertz, Ges. Werke II, Abh. **9**; Wied. Ann. **36**. p. 1. 1889.

6) A. Sommerfeld, Wied. Ann. **67**. p. 233. 1899.

handelt, der bei Schwingungen in Röhren allein experimentell zu verwirklichen ist. Dafür wird freilich bei der weiteren Diskussion und Anwendung des gefundenen Systems der elektrischen und magnetischen Kräfte die Abhängigkeit von z vernachlässigt, d. h. längs des ganzen Rohres gleiche Schwingungsphase angenommen. Die so erhaltenen Gleichungen stellen daher keine fortschreitenden Wellen dar, sondern einen speziellen Zustand stehender Schwingungen; sie sind erst mittels einer aus der allgemeinen Wellenlehre hergenommenen Betrachtung auf den Fall der fortschreitenden Wellen übertragen und daraufhin experimentell geprüft worden. Hierbei hat sich in der Tat befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ergeben.

Ich werde nun zeigen, daß sich die Webersche Lösung des Maxwellschen Gleichungssystems unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen auch zur Darstellung der elektrischen Schwingungen eines zum Kreisring gebogenen Metallrohres von rechteckigem Querschnitt eignet. Durch Vergrößerung des Ringdurchmessers bei ungeänderter Größe des Rohrquerschnittes erhält man als Grenzfall des Ringes ein unendlich langes gerades Rohr mit rechteckigem Querschnitt; durch Verkleinerung des Durchmessers der inneren zylindrischen Ringwand bis auf Null erhält man als anderen Grenzfall einen zylindrischen Raum mit dünnem Mittelpfeiler.

Bei der allgemeinsten Behandlung des Problems müßten wir eine endliche Leitfähigkeit des die Ringwände bildenden Metalles annehmen, womit dann eine örtliche Dämpfung der Schwingungen verbunden sein würde. Wir werden jedoch nur den Grenzfall unendlich großer Leitfähigkeit betrachten, in dem sich die Bedingungen, welche die elektrischen und magnetischen Kräfte an der Grenze zwischen Dielektrikum und Metall zu erfüllen haben, wesentlich vereinfachen. Unser elektromagnetisches Problem bekommt dadurch große Ähnlichkeit mit den Schwingungsproblemen der Mechanik und Akustik, die sämtlich auf die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ führen, und die man in einer Schrift von F. Pockels[1]) aus-

1) F. Pockels, Über die partielle Differentialgl. $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathem. Physik (Leipzig 1891, B. G. Teubner).

führlich im Zusammenhang dargestellt findet. In der Bezeichnungsweise werden wir uns im wesentlichen an R. H. Weber anschließen.

Integration der Maxwellschen Gleichungen für Zylinderkoordinaten.

§ 2. Es soll bedeuten

(1)
- $\mathfrak{E}$ den elektrischen Kraftvektor,
- $\mathfrak{M}$ den magnetischen Kraftvektor,
- ε die Dielektrizitätskonstante,
- $\varkappa$ die elektrische Leitfähigkeit,
- μ die magnetische Permeabilität,
- C die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,
- $V = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ die Lichtgeschwindigkeit im Dielektrikum;

k, n, p, h, σ stellen gewisse durchgängig benutzte Größen dar, die wir später definieren werden.

Wir benutzen Zylinderkoordinaten z, r, φ:

z = Richtung der Zylinderachse,
r = senkrechter Abstand von der Zylinderachse,
φ = Azimut, von der durch die z- und x-Achse gelegten Meridianebene an gerechnet, wachsend in derjenigen Drehungsrichtung, in welcher die positive x-Achse durch Drehung um 90^0 mit der positiven y-Achse zur Deckung kommt.

Das Koordinatensystem ist dann in dieser Reihenfolge rechtshändig, wenn x, y, z ein rechtshändiges System ist.

Die Maxwellschen Gleichungen lauten

$$(2)\quad \begin{cases} C \operatorname{rot} \mathfrak{M} = \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\varkappa\mathfrak{E}, \\ C \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\mu \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \end{cases}$$

wobei z. B. in Cartesischen Koordinaten $x y z$ die x-Komponente von $\operatorname{rot}\mathfrak{M}$ definiert ist durch

$$(\operatorname{rot}\mathfrak{M})_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x}.$$

Diese liefern bei der Transformation in rechtshändige Zylinderkoordinaten ein System von sechs Gleichungen, aus dem man

durch Isolierung der einzelnen Komponenten für jede derselbeneine partielle Differentialgleichung erhält, die mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen zu integrieren sind. Allerdings brauchen nicht alle besonders integriert zu werden, da drei der Komponenten (etwa die magnetischen Kräfte) jedesmal aus den Maxwellschen Gleichungen selbst durch einfache Quadratur hergeleitet werden können, wenn die drei anderen bestimmt sind. Dabei geht freilich die Symmetrie im allgemeinen verloren, und es ist daher wertvoll, daß man durch ein einfaches Verfahren die elektrischen und magnetischen Größen in symmetrischer Form erhalten kann, wobei weiterhin auch die Integration der verbleibenden drei Gleichungen auf die Integration einer einzigen sich zurückführen läßt. Die Grenzbedingungen, welchen die abhängige Variable dieser Gleichung genügen muß, werden allerdings etwas komplizierter.

In dem von Hertz, Sommerfeld und von Thomson behandelten axialsymmetrischen Fall reduzieren sich die sechs Maxwellschen Gleichungen von vornherein auf drei, da drei der Kraftkomponenten wegfallen, wodurch die Integration sehr erleichtert und das soeben angedeutete Verfahren unnötig gemacht wird. Thomson[1]) betrachtet übrigens in Art. 300 auch einen axialunsymmetrischen Fall, der sich bei Weber wiederfindet, nämlich die Grundschwingung eines unendlich langen zylindrischen Hohlraumes innerhalb einer Metallmasse, wenn längs des ganzen Zylinders die gleiche Phase herrscht. Beide finden natürlich denselben Wert für die Periode der Eigenschwingung.

§ 3. Das Verfahren, durch welches die Zurückführung der getrennten Differentialgleichungen auf eine einzige ermöglicht wird, besteht in der von H. Weber angegebenen Zusammenziehung der beiden Maxwellschen Gleichungen (2) in eine einzige durch Einführung komplexer Größen. Die in den unten zitierten „Partiellen Differentialgleichungen" von H. Weber[2]) angewandte Bezeichnungsweise ist von R. H. Weber etwas modifiziert worden, indem statt des dort auftretenden Faktors h das

---

1) J. J. Thomson, l. c. Art. 300.

2) H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathem. Physik II. p. 348.

Produkt $h\sigma$ gesetzt wird, wodurch h eine etwas andere Bedeutung bekommt. Wir halten uns hier an die modifizierte Bezeichnung von R. H. Weber.

Man setzt zunächst den elektrischen und den magnetischen Vektor proportional einer periodischen Funktion der Zeit t

$$\mathfrak{E} = e^{ikt}\mathfrak{E}_1\,; \quad \mathfrak{M} = e^{ikt}\mathfrak{M}_1\,, \tag{3}$$

wo $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{M}_1$ die von t unabhängigen Vektoren, k eine komplexe Konstante ist. Dadurch werden die Gleichungen (2)

$$\left\{\begin{aligned} C\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{M}_1 &= (\varepsilon i k + 4\pi\varkappa)\mathfrak{E}_1\,, \\ C\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}_1 &= -\mu i k \mathfrak{M}_1\,. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Man multipliziert die erste dieser Gleichungen mit einem unbestimmten Koeffizienten σ, addiert sie zur zweiten und erhält

$$C\,\mathrm{rot}(\mathfrak{E}_1 + \sigma\mathfrak{M}_1) = (\varepsilon i k + 4\pi\varkappa)\sigma\mathfrak{E}_1 - \mu i k \mathfrak{M}_1\,.$$

Man bestimmt nun σ folgendermaßen

$$\sigma = \sqrt{\frac{-\mu i k}{\varepsilon i k + 4\pi\varkappa}}\,, \tag{5}$$

führt eine neue Größe h ein durch die Gleichung

$$C h = \varepsilon i k + 4\pi\varkappa \tag{6}$$

und bezeichnet den Vektor $\mathfrak{E}_1 + \sigma\mathfrak{M}_1$ mit dem Buchstaben $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{E}_1 + \sigma\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{A}\,. \tag{7}$$

Die Maxwellschen Gleichungen (2) gehen dann über in die zusammengezogene Form

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = h\sigma\mathfrak{A}\,. \tag{8}$$

Durch Einführung der Polarkoordinaten $z\,r\,\varphi$ erhält man aus (8) die drei expliziten Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} h\sigma r A_z &= \frac{\partial\, r A_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\,, \\ h\sigma r A_r &= \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial\, r A_\varphi}{\partial z}\,, \\ h\sigma A_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\,. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Weber setzt nun $\mathfrak{A}$ proportional einer periodischen Funktion des Azimuts φ

$$\mathfrak{A} = e^{in\varphi}\mathfrak{B}\,, \tag{10}$$

wo der neue Vektor $\mathfrak{B}$ nicht mehr von t und φ abhängt, und n als ganze reelle Zahl angenommen wird, damit $\mathfrak{A}$ für die Periode 2π (bei einem vollen Umlauf) ungedämpft periodisch wird. Die Beschränkung auf ganze reelle Zahlen ist für die Auflösung der Maxwellschen Gleichungen belanglos; wir müssen später auch gebrochene Zahlen einführen und wollen deshalb n vorläufig ganz beliebige, auch komplexe Werte annehmen lassen.

Die Gleichungen (9) gehen dadurch über in

$$(11)\quad \begin{cases} \text{a)} & h\sigma r B_z + i n B_r = \dfrac{\partial r B_\varphi}{\partial r}, \\ \text{b)} & h\sigma r B_r - i n B_z = -\dfrac{\partial r B_\varphi}{\partial z}, \\ \text{c)} & h\sigma B_\varphi = \dfrac{\partial B_r}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial r}, \end{cases}$$

aus denen durch Elimination von B_r bez. B_z folgt

$$(12)\quad \begin{cases} (h^2\sigma^2 r^2 - n^2) B_r = i n \dfrac{\partial r B_\varphi}{\partial r} - h\sigma r \dfrac{\partial r B_\varphi}{\partial z}, \\ (h^2\sigma^2 r^2 - n^2) B_z = h\sigma r \dfrac{\partial r B_\varphi}{\partial r} + i n \dfrac{\partial r B_\varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

Durch geeignete Operationen[1] lassen sich B_φ und B_r ganz eliminieren und man erhält für B_z die partielle Differentialgleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial B_z}{\partial r}\right) + (h^2\sigma^2 r^2 - n^2) B_z = 0,$$

oder anders geschrieben

$$(13)\quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r} + \left(h^2\sigma^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) B_z = 0.$$

Diese Gleichung wird durch den Ansatz

$$(14)\quad B_z = Z R,$$

wo Z nur von z, R nur von r abhängt, zerspalten in zwei gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung für Z und R, die sich mit Exponentialfunktionen bez. Besselschen Funktionen integrieren lassen. Nämlich

$$(15)\quad Z = e^{\pm i p z},$$

$$(16)\quad R = a_1 J_n(\varrho) + a_2 K_n(\varrho),$$

wo p, a_1, a_2 willkürliche komplexe Konstanten sind, d. h.

1) Vgl. R. H. Weber, l. c. p. 5.

Größen, die nicht von z, r, φ, t, wohl aber von σ und h abhängen, und

(17) $$r\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2} = \varrho$$

gesetzt ist.

$J_n(\varrho)$ und $K_n(\varrho)$ sind zwei beliebige, voneinander nicht linear abhängige, partikuläre Integrale der Besselschen Differentialgleichung

(18) $$\frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho} + \left(1 - \frac{n^2}{\varrho^2}\right) R = 0,$$

die man aus (13) bei der Zerspaltung erhält. Im allgemeinen wird man daher für diese Integrale die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art von der n^{ten} Ordnung nehmen, von denen allerdings die Funktion zweiter Art verschieden definiert wird, während für die Funktion erster Art die Besselsche Definition allgemein angenommen ist.

Z könnte noch wie bei Weber eine willkürliche Konstante c als Faktor enthalten, die wir aber gleich 1 setzen, da sie doch in dem Produkt ZR mit a_1 und a_2 vereinigt werden kann.

§ 4. Aus dem so gefundenen speziellen Werte von B_z leitet Weber in eigenartiger Weise ohne neue Integration die Werte von rB_r und rB_φ ab. Aus dem Verfahren geht allerdings nicht hervor, daß die von ihm bestimmten Werte die einzig möglichen sind; und tatsächlich läßt sich zeigen, daß die unter der Annahme $B_z = ZR$ aus den Gleichungen (11) zu berechnenden Werte von rB_r und rB_φ, wenn man für Z und R die Werte (15) und (16) einsetzt, im allgemeinen noch Glieder enthalten, welche zu den von Weber gegebenen additiv hinzutreten. Diese Glieder haben jedoch für die Behandlung unseres physikalischen Problems keine Bedeutung und können daher wegbleiben.

Aus den Gleichungen (11) lassen sich nämlich sehr einfach Differentialgleichungen für die Komponenten rB_φ bez. rB_r bilden, die außer der zu bestimmenden Variabeln noch B_z enthalten. Man bekommt z. B., wenn man aus (11c) den Wert $\partial rB_r/\partial z$ in (11b) einsetzt:

$$\frac{\partial^2 rB_\varphi}{\partial z^2} + h^2\sigma^2 rB_\varphi + h\sigma r\frac{\partial B_z}{\partial r} - in\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Dies ist, da B_z eine bekannte Funktion von z und r ist, eine gewöhnliche nicht homogene Differentialgleichung für $r B_\varphi$ als Funktion von z. In diese Funktion kann außerdem noch r als Parameter bez. als Konstante eingehen.

Wegen (14) und (15) geht diese Gleichung über in

$$(19) \qquad \frac{\partial^2 r B_\varphi}{\partial z^2} + h^2 \sigma^2 r B_\varphi = - e^{ipz} \left(h \sigma r \frac{dR}{dr} + p n R \right).$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung besteht aus einem partikulären Integral ohne willkürliche Konstante und dem vollständigen Integral der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, die man durch Nullsetzen der rechten Seite von (19) erhält. Letzteres enthält die beiden notwendigen willkürlichen Konstanten.

Das erste partikuläre Integral erhält man durch den Ansatz

$$r B_\varphi = Z_1 . \bar{R}$$

und

$$Z_1 = e^{ipz},$$

wo $\bar{R}$ nur von r allein abhängen soll.

Man erhält auf diese Weise

$$(20) \qquad (r B_\varphi)_{\text{part.}} = - \frac{e^{ipz}}{h^2 \sigma^2 - p^2} \left(n p R + h \sigma r \frac{dR}{dr} \right),$$

also gerade den von Weber angegebenen Wert.

Die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2 (r B_\varphi)}{d z^2} + h^2 \sigma^2 r B_\varphi = 0$$

liefert die partikulären Integrale $e^{ih\sigma z}$ und $e^{-ih\sigma z}$, also das vollständige Integral

$$R_1 e^{ih\sigma z} + R_2 e^{-ih\sigma z},$$

wobei R_1 und R_2 als Integrationskonstanten irgend welche Funktionen von r, sowie von h und σ, aber nicht von z und φ sein können.

Der vollständige Ausdruck von $r B_\varphi$ wäre also

$$(21) \quad r B_\varphi = - \frac{e^{ipz}}{h^2 \sigma^2 - p^2} \left(npR + h\sigma r \frac{dR}{dr} \right) + R_1 e^{ih\sigma z} + R_2 e^{-ih\sigma z}.$$

B_r ist nunmehr ohne neue Integration eindeutig aus (11a) bez. (11b) oder auch aus der ersten der daraus abgeleiteten Gleichungen (12) bestimmt. Für die Größen R_1 und R_2 folgt jedoch aus der zweiten der Gleichungen (12) eine Beschränkung

auf eine ganz bestimmte Form, da die Gleichung durch Einsetzen der Werte von B_z und B_φ identisch erfüllt sein muß. Es ergibt sich nämlich

$$(22)\qquad \begin{cases} R_1 = c_1 r^n, \\ R_2 = c_2 r^{-n}, \end{cases}$$

wo c_1 und c_2 nicht von z, r, φ, sondern nur von σ und h abhängen können.

Die Gleichungen (22) zeigen uns, daß die Zusatzglieder in $r B_\varphi$ für uns unbrauchbar sind, da sie sich den Grenzbedingungen des Problems nicht wohl anpassen lassen.

§ 5. Mit Weglassung der Zusatzglieder in (21) erhalten wir also übereinstimmend mit dem Weberschen System

$$(23)\qquad \begin{cases} B_z = Z.R = e^{ipz} R, \\ r B_r = \dfrac{Z}{h^2\sigma^2 - p^2}\left(i n h \sigma R + i p r \dfrac{dR}{dr}\right) \\ \quad = \dfrac{e^{ipz}}{h^2\sigma^2 - p^2}\left(i n h \sigma R + i p r \dfrac{dR}{dr}\right), \\ r B_\varphi = \dfrac{Z}{h^2\sigma^2 - p^2}\left(- n p R - h \sigma r \dfrac{dR}{dr}\right) \\ \quad = - \dfrac{e^{ipz}}{h^2\sigma^2 - p^2}\left(n p R + h \sigma r \dfrac{dR}{dr}\right), \end{cases}$$

wobei Z und R die Werte (15) und (16) haben.

Aus diesen Werten von B_z, B_r, B_φ ergeben sich durch Multiplikation mit $e^{in\varphi}$ die Vektoren $\mathfrak{A}$ und durch nochmalige Multiplikation mit e^{ikt} die Vektoren

$$(24)\qquad \begin{cases} E_z + \sigma M_z = e^{ikt} A_z = R . e^{ikt + ipz + in\varphi}, \\ E_r + \sigma M_r = e^{ikt} A_r \\ \quad = \dfrac{i}{r(h^2\sigma^2 - p^2)}\left(n h \sigma R + p r \dfrac{dR}{dr}\right) e^{ikt + ipz + in\varphi}, \\ E_\varphi + \sigma M_\varphi = e^{ikt} A_\varphi \\ \quad = - \dfrac{1}{r(h^2\sigma^2 - p^2)}\left(n p R + h \sigma r \dfrac{dR}{dr}\right) e^{ikt + ipz + in\varphi}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen können p, n, σ sowohl positiv wie negativ sein, wodurch eine große Mannigfaltigkeit von Kombinationen entsteht. Der Umstand, daß die Gleichungen sowohl für $+\sigma$ wie für $-\sigma$ gelten müssen, liefert das Mittel zur Trennung der elektrischen und magnetischen Vektoren.

Bezeichnet man die rechten Seiten von (24) als Funktionen von σ durch die Symbole $\mathfrak{F}(+\sigma)$ und $\mathfrak{F}(-\sigma)$, so erhält man

$$\mathfrak{E} + \sigma\mathfrak{M} = \mathfrak{F}(+\sigma),$$
$$\mathfrak{E} - \sigma\mathfrak{M} = \mathfrak{F}(-\sigma),$$

woraus sofort durch Addition oder Subtraktion folgt

$$(25)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = \dfrac{1}{2}[\mathfrak{F}(+\sigma) + \mathfrak{F}(-\sigma)], \\ \mathfrak{M} = \dfrac{1}{2\sigma}[\mathfrak{F}(+\sigma) - \mathfrak{F}(-\sigma)]. \end{cases}$$

Bei der Zerlegung ist aber zu bedenken, daß die in R steckenden Konstanten a_1 und a_2 von σ abhängen. Wir setzen analog R. H. Weber (l. c. p. 8), wo statt dieser Größen die Konstante c steht

$$(26)\qquad \begin{cases} a_1 = A_1 + B_1\sigma, \\ a_2 = A_2 + B_2\sigma, \end{cases}$$

wo die A_1, B_1, A_2, B_2 gerade Funktionen von σ sein sollen, die also bei einem Vorzeichenwechsel der Größe σ ihr Vorzeichen nicht ändern; übrigens sind sie wie die anderen Größen im allgemeinen komplex.

Die Zerlegung liefert Ausdrücke, die dem Weberschen System (13) ganz analog sind, nur tritt statt AR und BR jedesmal eine Summe zweier Glieder auf. Man erhält

$$(27)\qquad \begin{cases} E_z = [A_1 J_n(\varrho) + A_2 K_n(\varrho)]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}, \\ M_z = [B_1 J_n(\varrho) + B_2 K_n(\varrho)]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}, \\ E_r = \dfrac{i}{r(h^2\sigma^2 - p^2)}\Big[n h \sigma^2 (B_1 J_n(\varrho) + B_2 K_n(\varrho)) \\ \qquad + p r\Big(A_1 \dfrac{d J_n(\varrho)}{d r} + A_2 \dfrac{d K_n(\varrho)}{d r}\Big)\Big]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}, \\ M_r = \dfrac{i}{r(h^2\sigma^2 - p^2)}\Big[n h (A_1 J_n(\varrho) + A_2 K_n(\varrho)) \\ \qquad + p r\Big(B_1 \dfrac{d J_n(\varrho)}{d r} + B_2 \dfrac{d K_n(\varrho)}{d r}\Big)\Big]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}, \\ E_\varphi = -\dfrac{1}{r(h^2\sigma^2 - p^2)}\Big[n p (A_1 J_n(\varrho) + A_2 K_n(\varrho)) \\ \qquad + h\sigma^2 r\Big(B_1 \dfrac{d J_n(\varrho)}{d r} + B_2 \dfrac{d K_n(\varrho)}{d r}\Big)\Big]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}, \\ M_\varphi = -\dfrac{1}{r(h^2\sigma^2 - p^2)}\Big[n p (B_1 J_n(\varrho) + B_2 K_n(\varrho)) \\ \qquad + h r\Big(A_1 \dfrac{d J_n(\varrho)}{d r} + A_2 \dfrac{d K_n(\varrho)}{d r}\Big)\Big]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}, \end{cases}$$

p und n können positiv oder negativ sein; nur da wo n als Index steht, in $J_n(\varrho)$ und $K_n(\varrho)$, können wir es stets positiv nehmen, da in der Besselschen Differentialgleichung nur n^2 vorkommt, das Vorzeichen von n also gleichgültig ist. Eine Vertauschung von $+n$ mit $-n$ bewirkt lediglich eine Vertauschung der partikulären Integrale J_n und K_n in der Summe $A_1 J_n + A_2 K_n$. Die Konstante k ist jedoch immer nur mit *einem* Vorzeichen brauchbar, nämlich so, daß ihr rein imaginärer Teil positiv ist, weil andernfalls ein Faktor in allen Gleichungen auftreten würde, der mit wachsendem t über alle Grenzen hinauswächst, statt abzunehmen.

Definition der Besselschen Funktionen.

§ 6. Die Besselschen Funktionen $J_n(\varrho)$ und $K_n(\varrho)$, die in unseren Gleichungen auftreten, sind folgendermaßen definiert.

Die Besselsche Funktion erster Art, n^{ter} Ordnung ist für jeden beliebigen, auch komplexen Wert von ϱ und n gegeben durch die unendliche Reihe[1])

$$(28) \qquad J_n(\varrho) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{n+2s}}{s!\,\Gamma(n+s+1)} \qquad (s = 0, 1, 2 \ldots),$$

wo Γ die Gausssche Gammafunktion bedeutet

$$\Gamma(x) = \lim_{m=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)\, m^x}{x(x+1) \ldots (x+m-1)},$$

die für ein positives ganzzahliges Argument übergeht in

$$29) \qquad \Gamma(x) = (x-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1).$$

Für einen reellen positiven ganzzahligen Index $n = \nu$ geht also Gleichung (28) über in

$$(28\text{a}) \qquad J_\nu(\varrho) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,(\nu+s)!} \qquad \left(\begin{matrix} s = 0, 1, 2 \ldots \\ \nu \text{ eine ganze Zahl} \end{matrix}\right).$$

Ist n *keine ganze* reelle Zahl, so erhält man ein zweites partikuläres Integral der Besselschen Gleichung durch Vertauschung von $+n$ mit $-n$ in der Formel (28)

1) Vgl. z. B. N. Nielsen, Handbuch d. Zylinderfunktionen, Leipzig 1904. p. 5; Graf u. Gubler, Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen, Bern 1898 u. 1900. Heft I. p. 25.

(28b) $$J_{-n}(\varrho) = \sum (-1)^s \frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{-n+2s}}{s!\,\Gamma(-n+s+1)},$$

das man statt $K_n(\varrho)$ in unsere Gleichungen (27) einführen kann.

Ist aber n eine reelle positive *ganze* Zahl, so wird $J_{-n}(\varrho)$ linear ausdrückbar durch $J_n(\varrho)$, stellt also kein unabhänges partikuläres Integral mehr dar, und es muß die Besselsche Funktion zweiter Art in anderer Weise definiert werden. Am häufigsten wird wohl die von Schläfli[1]) zuerst eingeführte, von C. Neumann eingehend behandelte Form benutzt

(30) $$K_n(\varrho) = \frac{1}{\sin n\pi}\left(\cos n\pi\, J_n(\varrho) - J_{-n}(\varrho)\right),$$

welche für alle beliebigen, auch komplexen Werte von n und ϱ gilt und für ein positives ganzzahliges $n = \nu$ als Grenzwert von Neumann in der Form dargestellt worden ist

(30a) $$\left\{\begin{aligned} K_\nu(\varrho) &= \frac{2}{\pi} J_\nu(\varrho)\log\frac{\varrho}{2} \\ &- \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,(\nu+s)!}\left[\psi(s+1) + \psi(\nu+s+1)\right] \\ &- \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{s=\nu-1} \frac{(\nu-s-1)!}{s!}\left(\frac{2}{\varrho}\right)^{\nu-2s}, \end{aligned}\right.$$

wo $\psi(x)$ die ebenfalls von Gauss eingeführte, mit der Gammafunktion zusammenhängende Funktion ist

$$\psi(x) = \frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = -C - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left(\frac{1}{\lambda+x} - \frac{1}{\lambda+1}\right) \quad \lambda = 0, 1, 2 \ldots$$

C bedeutet die Eulersche Konstante des Integrallogarithmus 0,577216.

Die durch (30) bez. (30a) definierte Funktion $K_n(\varrho)$ hat Schläfli als „zu $J_n(\varrho)$ *komplementäre Funktion*" bezeichnet. Nielsen[2]) nennt sie „*Neumannsche Zylinderfunktion*" und bezeichnet sie als $Y_n(\varrho)$.

---

1) Vgl. Graf u. Gubler, l. c. I. p. 34; II. p. 67.

2) N. Nielsen, l. c. p. 10ff. Vgl. auch H. Weber (Crelles Journ. 76. p. 1ff. 1873), wo unabhängig von Schläfli eine mit der Schläflischen übereinstimmende Funktion K definiert wird.

Wir werden in der vorliegenden Arbeit zunächst für gewisse gebrochene reelle Werte von n die Rechnung durchführen. Die Kenntnis der Funktionen $J_n(\varrho)$ und $K_n(\varrho)$ für diese Spezialfälle vermitteln uns am besten gewisse Reihendarstellungen nach fallenden Potenzen von ϱ, die im allgemeinen semikonvergent sind, für die zu betrachtenden speziellen Werte von n aber Reihen mit einer endlichen Anzahl von Gliedern geben.

Es ist für beliebige Werte von n und ϱ mit Ausnahme von $\varrho = 0$[1])

$$(31)\quad \begin{cases} J_n(\varrho) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\left[\cos\left(\varrho - \dfrac{2n+1}{4}\pi\right)\cdot P_m(\varrho) \right. \\ \qquad\qquad \left. - \sin\left(\varrho - \dfrac{2n+1}{4}\pi\right)\cdot Q_m(\varrho)\right], \\ K_n(\varrho) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\left[\sin\left(\varrho - \dfrac{2n+1}{4}\pi\right)\cdot P_m(\varrho) \right. \\ \qquad\qquad \left. + \cos\left(\varrho - \dfrac{2n+1}{4}\pi\right)\cdot Q_m(\varrho)\right], \end{cases}$$

wobei $P_m(\varrho)$ und $Q_m(\varrho)$ definiert sind durch

$$(32)\quad \begin{cases} P_m(\varrho) = 1 \\ \quad + \displaystyle\sum_{s=1}^{s \leq \frac{m}{2}} \frac{(-1)^s}{(2s)!} \frac{\left(n^2 - \frac{1^2}{2}\right)\left(n^2 - \frac{3^2}{4}\right)\left(n^2 - \frac{5^2}{4}\right)\left(n^2 - \frac{7^2}{4}\right)\cdots\left(n^2 - \frac{(4s-1)^2}{4}\right)}{(2\varrho)^{2s}}, \\ Q_m(\varrho) = \displaystyle\sum_{s=0}^{s \leq \frac{m-1}{2}} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} \frac{\left(n^2 - \frac{1^2}{4}\right)\left(n^2 - \frac{3^2}{4}\right)\left(n^2 - \frac{5^2}{4}\right)\cdots\left(n^2 - \frac{(4s+1)^2}{4}\right)}{(2\varrho)^{2s+1}}. \end{cases}$$

Der Index m bei P und Q bedeutet, daß die (halbkonvergenten) Reihen beim m^{ten} Gliede abzubrechen sind, wobei m so gewählt werden muß, daß das letzte in Rechnung gesetzte Glied kleiner bleibt als der zulässige Fehler. Das Restglied dieser Reihen ist jedesmal kleiner als das letzte in Rechnung gezogene Glied.[1])

Die gebrochenen Werte von n, die wir später brauchen, sind $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots$, allgemein also

$$n = \nu + \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots).$$

1) Vgl. N. Nielsen, l. c. p. 153 u. 156; E. Lommel, Studien über die Besselschen Funktionen. Leipzig 1868, § 17. p. 57 ff.

Man erhält damit die sogenannten Poissonschen Zylinderfunktionen[1]), die sich in endlicher Form durch trigonometrische Funktionen darstellen lassen, als Spezialfall der Besselschen Funktionen.

$$(33)\quad \begin{cases} J_{\frac{1}{2}}(\varrho) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\sin\varrho, \\ K_{\frac{1}{2}}(\varrho) = -\sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\cos\varrho = -J_{-\frac{1}{2}}(\varrho), \\ J_{\frac{3}{2}}(\varrho) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\left(-\cos\varrho + \dfrac{\sin\varrho}{\varrho}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\left(\dfrac{\sin\varrho}{\varrho} - \cos\varrho\right), \\ K_{\frac{3}{2}}(\varrho) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\left(-\sin\varrho - \dfrac{\cos\varrho}{\varrho}\right) \\ \qquad = -\sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\left(\dfrac{\cos\varrho}{\varrho} + \sin\varrho\right) = +J_{-\frac{3}{2}}(\varrho), \\ J_{\frac{5}{2}}(\varrho) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\left(-\sin\varrho\left(1 - \dfrac{3}{\varrho^2}\right) - \cos\varrho\cdot\dfrac{3}{\varrho}\right) \\ \qquad = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\left(\dfrac{3\sin\varrho}{\varrho^2} - \dfrac{3\cos\varrho}{\varrho} - \sin\varrho\right), \\ K_{\frac{5}{2}}(\varrho) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\left(\cos\varrho\left(1 - \dfrac{3}{\varrho^2}\right) - \sin\varrho\cdot\dfrac{3}{\varrho}\right) \\ \qquad = -\sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\left(\dfrac{3\cos\varrho}{\varrho^2} + \dfrac{3\sin\varrho}{\varrho} - \cos\varrho\right) = -J_{-\frac{5}{2}}(\varrho). \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Allgemein folgt aus (30) die Beziehung

$$K_{\nu+\frac{1}{2}}(\varrho) = (-1)^{\nu-1} J_{-\nu-\frac{1}{2}}(\varrho).$$

Die Summen in (32) nähern sich mit wachsendem ϱ dem Werte 0, daher wird

$$\lim_{\varrho=\infty} P_m(\varrho) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\varrho=\infty} Q_m(\varrho) = 0$$

und zwar gilt dies auch, wenn nur der reelle oder nur der imaginäre Teil von ϱ unendlich wird. Die Gleichungen (31) reduzieren sich in diesem Falle auf je ein Glied

$$\lim_{\varrho=\infty} J_n(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}}\cos\left(\varrho - \frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

$$\lim_{\varrho=\infty} K_n(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}}\sin\left(\varrho - \frac{2n+1}{4}\pi\right).$$

1) Vgl. auch F. Pockels, l. c. § 7. p. 99.

Für reelle Werte von ϱ verschwinden dieselben wie $\varrho^{-1/2}$; ebenso für komplexe Werte von ϱ, wenn der rein imaginäre Teil endlich bleibt. Wird aber der imaginäre Teil von ϱ unendlich, so werden beide Ausdrücke unendlich wie die Exponentialfunktion.[1]) Für $\varrho = 0$ erhält man aus den Definitionsgleichungen (28) und (30) folgendes:

$$\lim_{\varrho = 0} J_n(\varrho) \text{ bleibt endlich},$$

$$\lim_{\varrho = 0} K_n(\varrho) \text{ wird unendlich}.$$

Die Grenzbedingungen des Problems; Leitfähigkeit der metallischen Wände $\varkappa = \infty$ gesetzt.

§ 7. Um mit Hilfe der Gleichungen (27) das Problem der elektrischen Schwingungen in einem mit nichtleitendem Dielektrikum erfüllten Ringe von rechteckigem Querschnitt, der von leitenden (metallischen) Wänden begrenzt wird, allgemein zu behandeln, hat man anzunehmen, daß der gesamte Außenraum des Ringes mit Metall erfüllt sei. Man erhält dann für die Funktionen Z und R im Innenraum und Außenraum verschiedene Ausdrücke $Z^{(i)}$ und $Z^{(a)}$ sowie $R^{(i)}$ und $R^{(a)}$, aus passender Auswahl der sämtlichen in den Gleichungen (27) enthaltenen Formen von Z und R hervorgehend, die so gewählt werden müssen, daß die elektrischen und magnetischen Vektoren nirgends unendlich werden.

Die Konstanten $A_1\, A_2\, B_1\, B_2\, k\, p\, n$ bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen und den Bedingungen, welche an der Grenze zwischen Metall und Dielektrikum gelten und besagen, daß daselbst die tangentiellen Komponenten der elektrischen und magnetischen Kräfte stetig sein müssen.

Sind die Wände des Ringes gegeben durch die Zylindermäntel $r = r_1$, $r = r_2$ und die Ebenen $z = z_1$, $z = z_2$, und benutzen wir wieder wie bei Z und R die Indizes i und a, so lauten die Grenzbedingungen:

1) Über andere Integrale K, die im imaginären Unendlichen endlich bleiben bez. verschwinden, vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, im Anschluß an Sommerfeld, l. c. p. 245.

es muß sein für

$$(34)\begin{cases} \left.\begin{array}{l} r = r_1 \\ \text{und} \\ r = r_2 \end{array}\right\} E_z^{(i)} = E_z^{(a)};\ M_z^{(i)} = M_z^{(a)};\ E_\varphi^{(i)} = E_\varphi^{(a)};\ M_\varphi^{(i)} = M_\varphi^{(a)}, \\ \left.\begin{array}{l} z = z_1 \\ \text{und} \\ z = z_2 \end{array}\right\} E_r^{(i)} = E_r^{(a)};\ M_r^{(i)} = M_r^{(a)};\ E_\varphi^{(i)} = E_\varphi^{(a)};\ M_\varphi^{(i)} = M_\varphi^{(a)}. \end{cases}$$

Es sind also im ganzen 16 Bedingungsgleichungen zu erfüllen.

Statt des allgemeinen Falles, der für eine endliche Leitfähigkeit $\varkappa$ des Metalles gilt, wollen wir jedoch nur den Grenzfall $\varkappa = \infty$ behandeln. Dann müssen die elektrischen Kräfte im Metall sämtlich verschwinden, wodurch sich die Grenzbedingungen vereinfachen.

Es muß dann sein im Dielektrikum für

$$(35)\begin{cases} \left.\begin{array}{l} r = r_1 \\ \text{und} \\ r = r_2 \end{array}\right\} \text{I. } E_z = 0 \ldots \quad \text{und} \quad \text{III. } E_\varphi = 0 \ldots \\ \left.\begin{array}{l} z = z_1 \\ \text{und} \\ z = z_2 \end{array}\right\} \text{II. } E_r = 0 \ldots \quad \text{und} \quad \text{IV. } E_\varphi = 0 \ldots \end{cases}$$

Die magnetischen Kräfte verschwinden im Innern des Metalles auf Grund der Maxwellschen Gleichungen ebenfalls, im Dielektrikum können sie aber an der Grenze endliche Werte haben, so daß an der Grenze scheinbar eine Unstetigkeit auch der tangentiellen Komponenten auftritt; diese erklärt sich aber dadurch, daß der stetige Übergang zu Null in einer unendlich dünnen Oberflächenschicht des Metalles geschieht, auf welche sich der bei endlicher Leitfähigkeit vorhandene elektrische Strom zurückgezogen hat. Man braucht daher auf die magnetischen Komponenten bezüglich der Grenzbedingungen keine Rücksicht zu nehmen, so daß nur die acht Bedingungsgleichungen (35) I bis IV übrig bleiben. Unsere Aufgabe ist es nun also, aus dem System (27) durch passende Auswahl und geeignete Zusammenfassung der darin enthaltenen Glieder in möglichster Allgemeinheit ein System der elektrischen und

magnetischen Kräfte zu bilden, das den Maxwellschen Gleichungen und den Bedingungen (35) genügt.

Zur Erleichterung der Übersicht geben wir hier zunächst eine Zusammenstellung einiger Konstanten, die in unseren Gleichungen vorkommen und die wir zur Erfüllung der Grenzbedingungen brauchen. Wir setzen mit R. H. Weber

$$(36)\quad \begin{cases} p = \frac{2\pi}{l} + \alpha i, \\ k = \frac{2\pi}{T} + \beta i, \end{cases}$$

wo l, T, α, β reelle Größen sind.

Es wird ferner im Dielektrikum, wo $\varkappa = 0$ ist,

$$(37)\quad \begin{cases} h = i\frac{\varepsilon k}{C}, \\ \sigma = i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \\ h\sigma = -\frac{k\sqrt{\varepsilon\mu}}{C} = -\frac{k}{V} \\ \text{reell, wenn } k \text{ reell ist,} \\ \sigma^2 = -\frac{\mu}{\varepsilon}, \\ h\sigma^2 = -i\frac{\mu k}{C}, \\ h^2\sigma^2 = \frac{k^2}{V^2} \end{cases}$$

reell, wenn k reell oder rein imaginär ist.

Wir setzen außerdem der bequemeren Schreibweise wegen

$$(38)\quad \begin{cases} h^2\sigma^2 - p^2 = \tau^2, \\ \text{also} \qquad \varrho = r\tau. \end{cases}$$

Erfüllung der Grenzbedingungen für E_z und E_φ an den Wänden $r = r_1$ und $r = r_2$.

§ 8. Damit die Grenzbedingungen (35) I und III erfüllt werden, müssen in den Gleichungen (27) bei E_z und E_φ die Summen in den eckigen Klammern [ ] verschwinden, wenn man darin $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ setzt entsprechend den

Werten r_1 und r_2 des Radius. Das liefert zunächst für E_z die Gleichungen

(39)
$$\begin{cases} A_1 J_n(\varrho_1) + A_2 K_n(\varrho_1) = 0, \\ A_1 J_n(\varrho_2) + A_2 K_n(\varrho_2) = 0. \end{cases}$$

Die erste derselben bestimmt den Quotienten A_2/A_1, nämlich

(40)
$$A_2 = -A_1 \frac{J_n(\varrho_1)}{K_n(\varrho_1)}.$$

Die zweite gibt durch Einsetzen dieses Wertes die transzendente Gleichung zwischen ϱ_1 und ϱ_2, d. h. nach (38) die Gleichung für τ

(41)
$$\frac{J_n(\varrho_1)}{K_n(\varrho_1)} = \frac{J_n(\varrho_2)}{K_n(\varrho_2)}.$$

Diese Gleichung hat jedenfalls eine unendliche Anzahl diskreter Wurzeln, da sich mit wachsendem ϱ die Funktionen $J_n(\varrho)$ und $K_n(\varrho)$ nach (31) und (32) den Funktionen

$$\sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}} \cos\left(\varrho - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}} \sin\left(\varrho - \frac{2n+1}{4}\pi\right)$$

asymptotisch nähern und die Gleichung (41) für diesen Grenzfall unendlich viele diskrete Wurzeln besitzt.

Ist nun die Grenzbedingung für E_z erfüllt, indem man für τ eine der Wurzeln von (41) einsetzt, so erfordert die entsprechende Grenzbedingung III für E_φ weiter die Erfüllung der Gleichungen

$$\left[B_1 \frac{d J_n(\varrho)}{d r} + B_2 \frac{d K_n(\varrho)}{d r}\right]_{r=r_1} = 0,$$

$$\left[B_1 \frac{d J_n(\varrho)}{d r} + B_2 \frac{d K_n(\varrho)}{d r}\right]_{r=r_2} = 0,$$

oder, wenn man $d\varrho/dr = \tau$ als gemeinsamen Faktor wegläßt und die Ableitungen der Funktionen J und K nach ϱ durch J' und K' bezeichnet:

(42)
$$\begin{cases} B_1 J_n'(\varrho_1) + B_2 K_n'(\varrho_1) = 0, \\ B_1 J_n'(\varrho_2) + B_2 K_n'(\varrho_2) = 0. \end{cases}$$

Dies sind, da die Argumente ϱ_1 und ϱ_2 durch (41) bereits bestimmt sind, J' und K' also feste Werte haben, zwei

homogene Gleichungen für B_1 und B_2, die nur dann miteinander verträglich sind, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} J_n'(\varrho_1), & K_n'(\varrho_1) \\ J_n'(\varrho_2), & K_n'(\varrho_2) \end{vmatrix} = 0$$

ist, oder wenn die der Gleichung (41) analoge Gleichung erfüllt ist

$$\frac{J_n'(\varrho_1)}{K_n'(\varrho_1)} = \frac{J_n'(\varrho_2)}{K_n'(\varrho_2)}. \tag{43}$$

Im allgemeinen ist jedenfalls Gleichung (43) *nicht* zugleich mit (41) erfüllt, wie man leicht erkennt, wenn man z. B. statt der allgemeinen Besselschen Funktionen die speziellen Werte einsetzt, die sie für $n = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ etc. annehmen (vgl. § 6). Ob sich ganz spezielle Wertepaare ϱ_1, ϱ_2 auffinden lassen, welche gleichzeitig (41) und (43) befriedigen, wollen wir hier nicht untersuchen. Eine Möglichkeit, beide Gleichungen zugleich zu befriedigen, würde vielleicht noch darin liegen, daß man außer der Unbekannten τ, die in ϱ_1 und ϱ_2 steckt, noch n als zweite Unbekannte betrachtet, die erst bestimmt werden soll. Wir werden jedoch für n immer spezielle bekannte Werte annehmen, so daß diese Untersuchung wegfällt.

Da die Determinante (43) im allgemeinen nicht verschwindet, so läßt sich die Grenzbedingung (35) III nur erfüllen, wenn $B_1 = B_2 = 0$ gesetzt wird. Man erhält so aus (27) ein vereinfachtes System, in dem die Glieder mit den Koeffizienten B_1, B_2 fehlen. Man kann aber auch umgekehrt die Gleichung (43) zur Bestimmung von τ benutzen. Dann läßt sich mit Beibehaltung von B_1 und B_2 ebenfalls die Bedingung (35) III erfüllen, wenn man nunmehr $A_1 = A_2 = 0$ setzt, wodurch zugleich auch (34) I für E_z befriedigt wird. Man erhält dadurch ein anderes vereinfachtes System, in dem die Glieder mit den Koeffizienten A_1, A_2 fehlen. Der magnetische Vektor erscheint hierin einfach mit dem elektrischen vertauscht. (Vgl. das analoge Ergebnis bei R. H. Weber, p. 12 ff.)

Die beiden vereinfachten Systeme werden, wenn wir überall ϱ statt $r\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}$ setzen und wie bisher die Ableitungen der Funktionen $J_n(\varrho)$ und $K_n(\varrho)$ nach ϱ mit $J_n'(\varrho)$ und $K_n'(\varrho)$ bezeichnen:

$$(44)\quad \begin{cases} E_z = [A_1 J_n(\varrho) + A_2 K_n(\varrho)]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}, \\ M_z = 0, \\ E_r = \dfrac{ip}{\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} [A_1 J_n'(\varrho) + A_2 K_n'(\varrho)]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}, \\ M_r = \dfrac{inh}{\varrho\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} [A_1 J_n(\varrho) + A_2 K_n(\varrho)]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}, \\ E_\varphi = -\dfrac{np}{\varrho\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} [A_1 J_n(\varrho) + A_2 K_n(\varrho)]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}, \\ M_\varphi = -\dfrac{h}{\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} [A_1 J_n'(\varrho) + A_2 K_n'(\varrho)]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}. \end{cases}$$

$$(45)\quad \begin{cases} E_z = 0, \\ M_z = [B_1 J_n(\varrho) + B_2 K_n(\varrho)]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}, \\ E_r = \dfrac{inh\sigma^2}{\varrho\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} [B_1 J_n(\varrho) + B_2 K_n(\varrho)]\, e^{ikt+ipz+n\varphi}, \\ M_r = \dfrac{ip}{\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} [B_1 J_n'(\varrho) + B_2 K_n'(\varrho)]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}, \\ E_\varphi = -\dfrac{h\sigma^2}{\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} [B_1 J_n'(\varrho) + B_2 K_n'(\varrho)]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}, \\ M_\varphi = -\dfrac{np}{\varrho\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} [B_1 J_n(\varrho) + B_2 K_n(\varrho)]\, e^{ikt+ipz+in\varphi}. \end{cases}$$

Für System (44) gilt nach (41)

$$\frac{J_n(\varrho_1)}{K_n(\varrho_1)} = \frac{J_n(\varrho_2)}{K_n(\varrho_2)},$$

für System (45) gilt nach (43)

$$\frac{J_n'(\varrho_1)}{K_n'(\varrho_1)} = \frac{J_n'(\varrho_2)}{K_n'(\varrho_2)}.$$

Erfüllung der Grenzbedingungen für E_r und E_φ an den Wänden $z = z_1$ und $z = z_2$.

§ 9. Wir betrachten zunächst das System (44). Um mit diesem die Grenzbedingungen (35) II und IV zu erfüllen, müssen wir es kombinieren mit einem anderen, das aus ihm durch Vertauschung von p mit $-p$ hervorgeht. Das heißt: wir müssen statt des partikulären Integrals e^{ipz} das allgemeine Integral für die Funktion z benutzen, das beide partikuläre Integrale enthält. Jedes derselben wäre mit einer willkürlichen Konstante zu multiplizieren, doch können wir sofort die eine von ihnen $= 1$ setzen, indem wir sie als gemeinsamen Faktor

herausnehmen und mit den Koeffizienten A_1 und A_2 vereinigen. Das neue resultierende System erhalten wir also durch Addition des Systems (44) und eines zweiten, das aus jenem hervorgeht durch Vertauschung von $+p$ mit $-p$ und Multiplikation mit einer (komplexen) Konstanten c. Je nachdem die Glieder von (44) den Faktor p enthalten oder nicht, erscheint in dem resultierenden System als Faktor der Ausdruck

(46) $$e^{ipz} - c e^{-ipz} \quad \text{oder} \quad e^{ipz} + c e^{-ipz}.$$

Die uns hier interessierenden Größen E_r und E_φ erhalten den Faktor $e^{ipz} - c e^{-ipz}$, in dem nun c und p so bestimmt werden müssen, daß derselbe für $z = z_1$ und $z = z_2$ verschwindet. Das liefert die den Gleichungen (41) und (43) entsprechenden Gleichungen

$$c = \frac{e^{ipz_1}}{e^{-ipz_1}} = e^{2ipz_1}$$

und

(47) $$e^{2ipz_2} = e^{2ipz_1} \quad \text{oder} \quad e^{2ip(z_2 - z_1)} = 1.$$

Daraus folgt sofort

(48) $$p = \frac{s\pi}{z_2 - z_1} \qquad (s = 0,\ 1,\ 2\ldots).$$

Es muß also p reell sein, so daß αi in (36) wegfällt.

Indem wir von nun an p als reelle positive Größe betrachten, erhalten wir aus (46) mit Rücksicht auf (47)

(49) $$\begin{cases} e^{ipz} - c e^{-ipz} = 2i e^{ipz_1} \sin p(z - z_1), \\ e^{ipz} + c e^{-ipz} = 2 e^{ipz_1} \cos p(z - z_1). \end{cases}$$

Indem wir dies einsetzen und den konstanten Faktor $2e^{ipz_1}$ in die Konstanten A_1 und A_2 hineinnehmen, erhalten wir aus (44) ein System, das alle Grenzbedingungen (35) erfüllt.

(44a) $$\begin{cases} E_z = \cos p(z - z_1)[A_1 J_n(\varrho) + A_2 K_n(\varrho)] e^{ikt + in\varphi}, \\ M_z = 0, \\ E_r = -\frac{p \sin p(z - z_1)}{\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} [A_1 J_n'(\varrho) + A_2 K_n'(\varrho)] e^{ikt + in\varphi}, \\ M_r = \frac{i n h \cos p(z - z_1)}{\varrho\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} [A_1 J_n(\varrho) + A_2 K_n(\varrho)] e^{ikt + in\varphi}, \\ E_\varphi = -\frac{i p n \sin p(z - z_1)}{\varrho\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} [A_1 J_n(\varrho) + A_2 K_n(\varrho)] e^{ikt + in\varphi}, \\ M_\varphi = -\frac{h \cos p(z - z_1)}{\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} [A_1 J_n'(\varrho) + A_2 K_n'(\varrho)] e^{ikt + in\varphi}. \end{cases}$$

Genau das analoge bekommt man aus System (45), indem man das zweite durch Vertauschung von $+p$ mit $-p$ gebildete System subtrahiert.

$$(45\text{a})\quad \begin{cases} E_z = 0\,, \\ M_z = i \sin p(z - z_1)\left[B_1 J_n(\varrho) + B_2 K_n(\varrho)\right] e^{ikt + in\varphi}\,, \\ E_r = -\dfrac{n h \sigma^2 \sin p(z - z_1)}{\varrho\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}}\left[B_1 J_n(\varrho) + B_2 K_n(\varrho)\right] e^{ikt + in\varphi}\,, \\ M_r = \dfrac{i p \cos p(z - z_1)}{\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}}\left[B_1 J_n'(\varrho) + B_2 K_n'(\varrho)\right] e^{ikt + in\varphi}\,, \\ E_\varphi = -\dfrac{i h \sigma^2 \sin p(z - z_1)}{\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}}\left[B_1 J_n'(\varrho) + B_2 K_n'(\varrho)\right] e^{ikt + in\varphi}\,, \\ M_\varphi = -\dfrac{n p \cos p(z - z_1)}{\varrho\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}}\left[B_1 J_n(\varrho) + B_2 K_n(\varrho)\right] e^{ikt + in\varphi}\,. \end{cases}$$

Hieraus lassen sich durch Trennung des Reellen vom Imaginären die elektrischen und magnetischen Kraftkomponenten in reeller Form erhalten.

Wegfallen der zeitlichen und räumlichen Dämpfung; k, p, n reell.

§ 10. Wir sahen bereits, daß p reell sein muß, und wollen nun auch k und n reell annehmen, da nicht recht ersichtlich ist, woher im Innern eines Raumes, der von Metall mit unendlicher Leitfähigkeit umgeben ist, irgend welche Dämpfung rühren kann. Der Faktor $e^{i(kt + n\varphi)}$ in den Gleichungen (44a) und (45a), der in $\cos(kt + n\varphi)$ und $i\sin(kt + n\varphi)$ zerfällt, bedeutet dann, daß in Richtung der Ringachse ungedämpfte Wellen fortschreiten, und zwar in der Richtung $-\varphi$. Nehmen wir $-n$ statt $+n$, so erhalten wir Wellen in der Richtung $+\varphi$. Beide Systeme können wir übereinanderlagern und erhalten, wenn die Schwingungsamplituden, d. h. die Koeffizienten A gleich groß sind, stehende Schwingungen. Es ist jedoch zu beachten, daß n nicht ganz willkürlich gewählt werden darf, sondern gewissen Beschränkungen unterliegt, die aus den physikalischen Bedingungen folgen. Wir haben insbesondere folgende Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: Das Rohr besitzt keine radialen Querwände.

Dann muß n für fortschreitende wie für stehende Wellen eine ganze Zahl sein, weil bei jedesmaligem Umlauf der Welle

um den ganzen Ringumfang, d. h. Vermehrung des Argumentes φ um 2π, die Welle mit derselben Phase im Ausgangspunkt anlangen muß, welche die Schwingung im gleichen Augenblick dort besitzt. Da nun offenbar zufolge der Verbindung $kt + n\varphi$ der Größen k und n im Argument von $e^{i(kt+n\varphi)}$ der Quotient k/n die Winkelfortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung ist und nach (36) $k = 2\pi/T$, wo T die Schwingungsdauer darstellt, so pflanzt sich die Bewegung in der Zeit nT um den Winkel 2π fort. Damit nun der Kopf der ankommenden Welle an der Stelle $\varphi = 2\pi$ dieselbe Phase hat wie die Schwingung daselbst muß bis zu ihrem Anlangen jedenfalls eine ganze Anzahl von Perioden T vergangen sein, d. h. n muß eine ganze Zahl sein. Wir haben dann für $J_n(\varrho)$ und $K_n(\varrho)$ die durch (28a) und (30a) definierten Besselschen Funktionen mit ganzzahligem Index einzusetzen.

Liegt bei $\varphi = 0$ die Schwingungsquelle, von der nach beiden Seiten ($+\varphi$ und $-\varphi$) hin die Wellen ausgehen, aus denen die stehenden Schwingungen resultieren, so sind zu deren Darstellung die Glieder aus den Gleichungen (44a) bez. (45a) so auszuwählen, daß $\cos n\varphi$ als Faktor auftritt.

Zweiter Fall: Das Rohr ist durch radiale metallische Querwände in „Ringsektoren" geteilt.

Jeder von diesen ist ein unabhängiges System; wir brauchen also nur einen solchen „Sektor" zu betrachten. Fortschreitende Wellen sind in einem Ringsektor als stationärer Zustand unmöglich und deshalb durch unsere Gleichungen nicht ausdrückbar, die nur für den stationären Zustand gelten. Wir können aber stehende Wellen mit ihnen darstellen, bei welchen an den radialen Querwänden E_z und E_r dauernd gleich Null sind, wodurch die neu hinzukommenden Grenzbedingungen erfüllt sind.

Ist der Sektorwinkel γ, so hat man zu setzen[1])

$$(50)\qquad n = \frac{\pi m}{\gamma} \qquad (m = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Spezielle Fälle sind:

1. $\gamma = \pi$. Man hat einen halben Kreisring, es ist $n = m$

1) Lord Rayleigh (J. W. Strutt), Theorie des Schalles. Deutsch von Neesen I. p. 367. 1879. Vgl. auch Pockels, l. c. p. 97.

eine ganze Zahl, also kein Unterschied gegen den vollen Kreisring vorhanden.

2. $\gamma = 2\pi$. Beide Wände fallen in eine zusammen, man hat also einen vollen Ring, der aber eine radiale Querwand besitzt, und es ist $n = m/2$. Die geraden Werte von m geben also auch nichts Neues, wohl aber die ungeraden, da bei ihnen n die Form annimmt

(51) $$n = \nu + \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2\ \ldots).$$

Wir erhalten somit für $J_n(\varrho)$ und $K_n(\varrho)$ die in (33) dargestellten Poissonschen Zylinderfunktionen, die sich in endlicher Form durch cos und sin ausdrücken lassen.

Betrachtung einiger Spezialfälle; $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots$

§ 11. Wir betrachten hier nunmehr nacheinander die Spezialfälle $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, indem wir die ausführlichere Diskussion einer späteren Mitteilung vorbehalten.

I. $\nu = 0$, also $n = \frac{1}{2}$.

A. Wir behandeln zuerst das System (44a) mit den Koeffizienten A_1 und A_2.

Die eckigen Klammern der Gleichungen (44a) werden nach (33)

(52) $$\begin{cases} A_1 J_n(\varrho) + A_2 K_n(\varrho) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left[A_1 \dfrac{\sin\varrho}{\sqrt{\varrho}} - A_2 \dfrac{\cos\varrho}{\sqrt{\varrho}}\right], \\ A_1 J_n'(\varrho) + A_2 K_n'(\varrho) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left[A_1 \dfrac{\cos\varrho}{\sqrt{\varrho}} - A_1 \dfrac{\sin\varrho}{2\varrho\sqrt{\varrho}} + A_2 \dfrac{\sin\varrho}{\sqrt{\varrho}} + A_2 \dfrac{\cos\varrho}{2\varrho\sqrt{\varrho}}\right]. \end{cases}$$

Gleichung (41) gibt hier die einfache transzendente Gleichung zur Bestimmung von τ

$$\frac{\sin\varrho_1}{\cos\varrho_1} = \frac{\sin\varrho_2}{\cos\varrho_2},$$

aus welcher folgt

(53) $$\operatorname{tg}\varrho_1 = \operatorname{tg}\varrho_2 \quad \text{oder auch} \quad \sin(\varrho_2 - \varrho_1) = 0,$$

und deren allgemeine Lösung ist

$$\varrho_2 - \varrho_1 = (r_2 - r_1)\tau = w\pi \qquad (w = 0,\ 1,\ 2\ \ldots).$$

Daraus folgt

$$h^2\sigma^2 - p^2 = \frac{w^2\pi^2}{(r_2 - r_1)^2},$$

und weiter mit Berücksichtigung von (48), (36) und (37)

$$(54)\qquad \frac{k^2}{V^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{s^2\pi^2}{(z_2 - z_1)^2} + \frac{w^2\pi^2}{(r_2 - r_1)^2} \quad \begin{pmatrix} s = 0, 1, 2 \ldots \\ w = 0, 1, 2 \ldots \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung gibt uns die „ausgezeichneten“ Werte von k bez. T, für welche die Maxwellschen Gleichungen unter gleichzeitiger Befriedigung der Grenzbedingungen unseres Problems überhaupt eine Lösung durch die Funktionen (44a) zulassen. Physikalisch betrachtet gibt sie uns die Perioden der in dem ringförmigen Raume für $n = \frac{1}{2}$ möglichen Eigenschwingungen an. Gleichung (54) ist dieselbe, welche auch die ausgezeichneten Werte für die akustischen Schwingungen einer rechteckigen Membran liefert[1]), wir können daher alle Resultate von jener ohne weiteres auf unser elektrisches Problem übertragen. Die Funktionen, welche in (44a) bez. (45a) die elektrischen und magnetischen Kräfte darstellen, sind die *„ausgezeichneten Lösungen“* oder bei bestimmten Verfügungen über die eine der willkürlichen Konstanten A bez. B die *„Normalfunktionen“* des betrachteten Bereiches im Sinne von Pockels.[2])

Die Größe k erscheint als Funktion der ganzen Zahlen s und w, wir können sie daher schreiben $k_{s,w}$ (genauer müßten wir noch n als Bestimmungsstück hinzufügen, also $k_{n,s,w}$ schreiben), und ihre Werte bilden eine zweifach ausgedehnte unendliche Mannigfaltigkeit. Nach den Ausführungen bei Pockels (p. 76), wo k unserem k/V entspricht, gibt es im allgemeinen nur *„einfache“* ausgezeichnete Werte von k, d. h. jedes Wertepaar s, w gibt einen Wert k, der von allen andern verschieden ist, so daß durch Vertauschung der Werte von s und w in Gleichung (54) immer auch k sich ändert. Nur wenn die Breite des Ringes $r_2 - r_1$ in rationalem Verhältnis steht zu seiner Höhe $z_2 - z_1$, gibt es *„mehrfache“* ausgezeichnete Werte k, indem dann bei gewissen Wertepaaren s, w eine Vertauschung dieser Größen untereinander den Wert k nicht ändert. Dann gehören zu gewissen verschiedenartigen Schwingungsformen dieselben Werte k und dieselben Perioden T. Dieser Fall tritt insbesondere bei quadratischem Rohrquerschnitt ein, wo $z_2 - z_1 = r_2 - r_1$ ist.

1) Vgl. F. Pockels, l. c. p. 76ff.
2) l. c. p. 56ff.

Wir wollen nun aus (44a) durch Einführung der Poissonschen Zylinderfunktionen für $n = \frac{1}{2}$ das System der elektrischen und magnetischen Kräfte ableiten, das für unseren Spezialfall gilt. Wir nehmen dazu an, daß die Querwand des Ringes an der Stelle $\varphi = 0$ liegt. Wir müssen dann dem System (44a), das nach $-\varphi$ fortschreitende Wellen darstellt, ein zweites mit gleichen Amplituden nach $+\varphi$ fortschreitendes System überlagern, das aus jenem durch Vertauschung von n mit $-n$ hervorgeht, und haben dabei die Vorzeichen beider so zu wählen, daß in dem resultierenden E_z und E_r $\sin n\varphi$ als Faktor auftritt. Zunächst bringen wir jedoch die von r abhängigen Faktoren in den eckigen Klammern auf eine einfache Form. Nach (52) wird, wenn man entsprechend der Gleichung (40)

$$A_2 = - A_1 \frac{J_n(\varrho_1)}{K_n(\varrho_1)} = A_1 \frac{\sin \varrho_1}{\cos \varrho_1}$$

und

$$\frac{A_1 \sqrt{2}}{\cos \varrho_1 \sqrt{\pi}} = A$$

setzt,

$$(52a) \begin{cases} A_1 J_n(\varrho) + A_2 K_n(\varrho) = A \dfrac{\sin(\varrho - \varrho_1)}{\sqrt{\varrho}}, \\ A_1 J_n'(\varrho) + A_2 K_n'(\varrho) = A \left[\dfrac{\cos(\varrho - \varrho_1)}{\sqrt{\varrho}} - \dfrac{\sin(\varrho - \varrho_1)}{2\varrho\sqrt{\varrho}}\right]. \end{cases}$$

Setzt man dies ein, führt die Übereinanderlagerung der beiden Partialsysteme durch Subtraktion aus und läßt schließlich den dabei auftretenden gemeinsamen Faktor $2i$ weg, so erhält man

$$(55) \begin{cases} E_z = A \dfrac{\sin(\varrho - \varrho_1)}{\sqrt{\varrho}} \cos p(z - z_1) . \sin n\varphi . e^{ikt}, \\ M_z = 0, \\ E_r = - \dfrac{A p}{\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} \left[\dfrac{\cos(\varrho - \varrho_1)}{\sqrt{\varrho}} - \dfrac{\sin(\varrho - \varrho_1)}{2\varrho\sqrt{\varrho}}\right] \sin p(z - z_1) . \sin n\varphi . e^{ikt}, \\ M_r = \dfrac{A n h}{\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} \dfrac{\sin(\varrho - \varrho_1)}{\varrho\sqrt{\varrho}} . \cos p(z - z_1) . \cos n\varphi . e^{ikt}, \\ \qquad\qquad (n = \pm \frac{1}{2}) \\ E_\varphi = - \dfrac{A p n}{\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} \dfrac{\sin(\varrho - \varrho_1)}{\varrho\sqrt{\varrho}} . \sin p(z - z_1) . \cos n\varphi . e^{ikt}, \\ M_\varphi = - \dfrac{A h}{\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}} \left[\dfrac{\cos(\varrho - \varrho_1)}{\sqrt{\varrho}} - \dfrac{\sin(\varrho - \varrho_1)}{2\varrho\sqrt{\varrho}}\right] \cos p(z - z_1) . \sin n\varphi . e^{ikt}. \end{cases}$$

Aus diesem System kann man schließlich durch Zerlegung in die reellen und imaginären Teile die elektrischen und magnetischen Kräfte endgültig in reeller Form erhalten, wobei A nunmehr reell angenommen werden kann. Da $h = s i k / C$ rein imaginär ist, so übersieht man sofort, daß der magnetische Vektor die Phasenverschiebung $\pi/2$ gegen den elektrischen besitzt.

Man sieht ferner ohne weiteres, daß hier die Gleichungen (41) und (43) nicht zugleich erfüllt sein können, so daß wir, wie es bereits geschehen ist, das System mit den Koeffizienten A_1, A_2 von demjenigen mit den Koeffizienten B_1, B_2 trennen müssen. Für letzteres erhalten wir aus (45a) ein System der elektrischen und magnetischen Kräfte, das dem System (54) reziprok ist. Die ausgezeichneten Werte k und damit die Eigenperioden T ergeben sich aber aus einer anderen transzendenten Gleichung.

B. Das System (45a) mit den Koeffizienten B_1 und B_2.

§ 12. Die eckigen Klammern von (45a) werden hier durch Einführung der Poissonschen Funktionen (33).

$$(56)\begin{cases} B_1 J_n(\varrho) + B_2 K_n(\varrho) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left[B_1 \dfrac{\sin\varrho}{\sqrt{\varrho}} - B_2 \dfrac{\cos\varrho}{\sqrt{\varrho}}\right], \\ B_1 J_n'(\varrho) + B_2 K_n'(\varrho) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left[B_1 \dfrac{\cos\varrho}{\sqrt{\varrho}} - B_1 \dfrac{\sin\varrho}{2\varrho\sqrt{\varrho}} + B_2 \dfrac{\sin\varrho}{\sqrt{\varrho}} + B_2 \dfrac{\cos\varrho}{2\varrho\sqrt{\varrho}}\right] \end{cases}$$

Setzen wir nun gemäß Gleichung (40), da wir diesmal die Grenzbedingungen für die Derivierten J_n' und K_n' erfüllen müssen,

$$B_2 = - B_1 \frac{J_n'(\varrho)}{K_n'(\varrho)} = - B_1 \frac{2\varrho_1 \cos\varrho_1 - \sin\varrho_1}{2\varrho_1 \sin\varrho_1 + \cos\varrho_1},$$

und

$$\frac{B_1\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,(2\varrho_1 \sin\varrho_1 + \cos\varrho_1)} = B,$$

so gehen die Gleichungen (56) über in

$$(56\,a)\begin{cases} B_1 J_n(\varrho) + B_2 K_n(\varrho) = B\dfrac{2\varrho_1 \cos(\varrho-\varrho_1) + \sin(\varrho-\varrho_1)}{\sqrt{\varrho}}, \\ B_1 J_n'(\varrho) + B_2 K_n'(\varrho) = B\dfrac{2(\varrho-\varrho_1)\cos(\varrho-\varrho_1) - (1+4\varrho\varrho_1)\sin(\varrho-\varrho_1)}{2\varrho\sqrt{\varrho}}. \end{cases}$$

Hieraus oder auch direkt aus (43) erhält man die transzendente Gleichung zur Bestimmung von $\tau = \sqrt{h^2\sigma^2 - p^2}$

$$(57)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}(\varrho_2 - \varrho_1) = \dfrac{2(\varrho_2 - \varrho_1)}{1 + 4\varrho_2\varrho_1}, \\ \text{oder} \\ \operatorname{tg}(r_2 - r_1)\tau = \dfrac{2(r_2 - r_1)\tau}{1 + 4r_2 r_1 \tau^2}, \end{cases}$$

die hier komplizierter ist als die entsprechende Gleichung (53).

Wie man sieht, hängt τ nicht nur von der Rohrbreite $r_2 - r_1$ ab, sondern auch von den absoluten Werten der r_1 und r_2, und zwar so, daß das Verhältnis der Rohrbreite $r_2 - r_1$ zum mittleren Ringdurchmesser $r_2 + r_1$ mitbestimmend wirkt. Setzt man nämlich

$$(58)\qquad r_2 + r_1 = q(r_2 - r_1) \qquad (q > 1),$$

wo q alle beliebigen Werte > 1 darstellen kann, so kann man das Produkt $r_2 r_1$ durch $r_2 - r_1$ und q ausdrücken (ebenso $\varrho_2\varrho_1$ durch $\varrho_2 - \varrho_1$ und q). Es ist

$$4r_2 r_1 = (r_2 + r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2 = (q^2 - 1)(r_2 - r_1)^2.$$

Die Gleichungen (57) gehen daher über in

$$(57\text{a})\quad \begin{cases} \operatorname{tg}(\varrho_2 - \varrho_1) = \dfrac{2(\varrho_2 - \varrho_1)}{1 + (q^2 - 1)(\varrho_2 - \varrho_1)^2}, \\ \text{oder auch} \\ \operatorname{tg}(r_2 - r_1)\tau = \dfrac{2(r_2 - r_1)\tau}{1 + (q^2 - 1)(r_2 - r_1)^2\tau^2}. \end{cases}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung kann man graphisch ermitteln, indem man die Kurven

$$y = \operatorname{tg} x \qquad \text{und} \qquad \eta = \frac{2x}{1 + (q^2 - 1)x^2}$$

konstruiert und die Abszissen der Schnittpunkte beider miteinander bestimmt. Die Variable x bedeutet hier das Argument $(r_2 - r_1)\tau$.

Die Kurve η hat nur positive Werte; sie steigt von dem Werte 0, den sie für $x = 0$ hat, zu einem Maximum an, fällt dann ziemlich schnell und nähert sich asymptotisch dem Werte 0. Für einigermaßen große Werte von q liegt das Maximum in dem Intervall zwischen $x = 0$ und $x = \pi$. Daher kommt dann nur der absteigende Ast der Kurve für die Bestimmung der Schnittpunkte mit $y = \operatorname{tg} x$ in Betracht. Für einige Werte des Ver-

hältnisses q (3, 5, 11) sind die Werte der Ordinaten η für die Abszissen $x = 1, 2, 3 \ldots$ in der beistehenden *Tabelle 1* angegeben. Man sieht, daß die Werte auch für $q = 3$ schon bei $x = 3$, d. h. in der Nähe von π ziemlich klein sind. Daraus folgt, daß alle Wurzeln der Gleichung (57a) für die angegebenen Werte von q in der Nähe ganzzahliger Werte von π liegen. Sie sind jedesmal etwas größer als diese und nähern sich mit wachsender Ordnungszahl immer mehr den Werten $w\pi$, wo $w = 0, 1, 2 \ldots$ ist. Für kleine Werte von q, d. h. wenn der Ring übergeht in einen zylindrischen Raum mit relativ dünnem Mittelpfeiler, ändert sich das Bild jedoch vollständig; dann gibt auch der aufsteigende Ast der Kurve η Schnittpunkte mit $y = \operatorname{tg} x$ und die kleineren Wurzeln der Gleichung (57a) rücken nach ganz anderen Stellen. Wir verschieben die Betrachtung dieser Verhältnisse auf später.

Tabelle I.

x	$q = 3$ η	$q = 5$ η	$q = 11$ η
1	0,222 222	0,080 000	0,016 529
2	0,121 212	0,041 237	0,008 316
3	0,082 192	0,027 650	0,005 550
4	0,062 016	0,020 779	0,004 165
5	0,049 751	0,016 639	0,003 332
6	0,041 522	0,013 873	0,002 777
7	0,035 623	0,011 895	0,002 381
8	0,031 189	0,010 410	0,002 083

$$\eta = \frac{2x}{1 + (q^2 - 1)x^2}.$$

Die Fälle $q = 3, 5, 11$ sind z. B. verwirklicht bei Ringen, deren innerer Durchmesser 20 cm beträgt, während die äußeren 40, 30, 24 cm sind. Für diese Fälle kann man also die Wurzeln in der Form schreiben

$$(59)\quad \begin{cases} x = (r_2 - r_1)\tau = (r_2 - r_1)\sqrt{h^2\sigma^2 - p^2} = w\pi + f(w, q) \\ \qquad (w = 0,\ 1,\ 2 \ldots, \qquad q > 1), \end{cases}$$

wobei $f(w, q)$ eine Funktion ist, die für $w = 0$ und $w = \infty$ verschwindet, immer positiv ist, für einen gewissen Wert w

ein Maximum besitzt, und außerdem mit wachsendem q schnell gegen Null abnimmt.

Die ausgezeichneten Werte von k folgen daher hier der Gleichung

$$\frac{k^2}{V^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{s^2\pi^2}{(z_2 - z_1)^2} + \frac{[w\pi + f(w, q)]^2}{(r_2 - r_1)^2}, \tag{60}$$

die für $q = \infty$ identisch wird mit der entsprechenden Gleichung (54).

Nähert sich q dem Werte 1, reduziert sich also r_1 auf 0, so rücken die Wurzeln der Gleichung (57a) in die Nähe der ungeraden Vielfachen von $\pi/2$, wie man leicht erkennt, wenn man $q = 1$ setzt. Gleichung (57a) geht dann über in die Gleichung

$$\operatorname{tg} \tau r_2 = 2 r_2 \tau, \tag{61}$$

welche der bekannten auch von Rayleigh behandelten Gleichung $\operatorname{tg} \varrho_2 = \varrho_2$ sehr ähnlich ist. Die Wurzeln der Gleichung (61) schließen sich sogar noch enger an die Vielfachen von $\pi/2$ an, als es bei dieser der Fall ist.

Das zugehörige System der elektrischen und magnetischen Kräfte, das dem System (55) analog ist, erhält man durch Einführung der Ausdrücke (56a) in die Gleichungen (45a) und passende Überlagerung eines zweiten durch Vertauschung von n mit $-n$ aus (45a) gebildeten Systemes über jenes. Die Überlagerung geschieht hier durch Addition, damit $\sin n\varphi$ als Faktor von E_r auftritt und die Grenzbedingung für E_r an der Querwand bei $\varphi = 0$ erfüllt wird.

1)

$$\left\{\begin{aligned}
E_z &= 0, \\
M_z &= B\,\frac{2\varrho_1\cos(\varrho-\varrho_1) + \sin(\varrho-\varrho_1)}{\sqrt{\varrho}}\sin p(z-z_1)\cos n\varphi\, e^{ikt}, \\
E_r &= -\frac{Bnh\sigma^2}{\sqrt{h^2\sigma^2-p^2}}\,\frac{2\varrho_1\cos(\varrho-\varrho_1) + \sin(\varrho-\varrho_1)}{\varrho\sqrt{\varrho}}\sin p(z-z_1)\sin n\varphi\, e^{ikt}, \\
M_r &= \frac{Bp}{\sqrt{h^2\sigma^2-p^2}}\,\frac{2(\varrho-\varrho_1).\cos(\varrho-\varrho_1)-(1+4\varrho\varrho_1)\sin(\varrho-\varrho_1)}{2\varrho\sqrt{\varrho}}\cos p(z-z_1)\cos n\varphi\, e^{ikt}, \\
&\qquad\qquad (n = \pm \tfrac{1}{2}) \\
E_\varphi &= -\frac{Bh\sigma^2}{\sqrt{h^2\sigma^2-p^2}}\,\frac{2(\varrho-\varrho_1).\cos(\varrho-\varrho_1)-(1+4\varrho\varrho_1)\sin(\varrho-\varrho_1)}{2\varrho\sqrt{\varrho}}\sin p(z-z_1)\cos n\varphi\, e^{ikt}, \\
M_\varphi &= -\frac{Bnp}{\sqrt{h^2\sigma^2-p^2}}\,\frac{2\varrho_1\cos(\varrho-\varrho_1) + \sin(\varrho-\varrho_1)}{\varrho\sqrt{\varrho}}\cos p(z-z_1)\sin n\varphi\, e^{ikt}.
\end{aligned}\right.$$

Auch dies System läßt sich wie (55) endgültig in einen rellen und einen imäginären Teil zerlegen und dadurch in reeller Form erhalten.

II. $\nu = 1$, also $n = \frac{3}{2}$.

§ 13. Wir behandeln nur das System (44a). Nach (33) wird hier

$$A_1 J_n(\varrho) + A_2 K_n(\varrho)$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[A_1 \frac{\sin \varrho}{\varrho \sqrt{\varrho}} - A_1 \frac{\cos \varrho}{\sqrt{\varrho}} - A_2 \frac{\cos \varrho}{\varrho \sqrt{\varrho}} - A_2 \frac{\sin \varrho}{\sqrt{\varrho}} \right],$$

oder indem man wieder A_2 nach Gleichung (40) bestimmt und

$$\frac{A_1 \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\cos \varrho_1 + \varrho_1 \sin \varrho_1)} = A$$

setzt

$$(62) \begin{cases} A_1 J_n(\varrho) + A_2 K_n(\varrho) = A \dfrac{(1 + \varrho \varrho_1) \sin(\varrho - \varrho_1) - (\varrho - \varrho_1) \cos(\varrho - \varrho_1)}{\varrho \sqrt{\varrho}} \\ \text{und} \\ A_1 J_n'(\varrho) + A_2 K_n'(\varrho) \\ \quad = A \dfrac{[\varrho^2 \varrho_1 + \frac{3}{2}(\varrho - \varrho_1)] \cos(\varrho - \varrho_1) + [\varrho^2 - \frac{3}{2}(1 + \varrho \varrho_1)] \sin(\varrho - \varrho_1)}{\varrho^2 \sqrt{\varrho}}. \end{cases}$$

Die erste der Gleichungen (62) oder auch die direkte Anwendung von (41) gibt für τ die transzendente Gleichung

$$(63) \qquad \operatorname{tg}(\varrho_2 - \varrho_1) = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{1 + \varrho_2 \varrho_1},$$

die durch Einführung der Verhältniszahl q nach (58) übergeht in

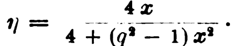
$$(63\text{a}) \begin{cases} \operatorname{tg}(\varrho_2 - \varrho_1) = \dfrac{4(\varrho_2 - \varrho_1)}{4 + (q^2 - 1)(\varrho_2 - \varrho_1)^2} \\ \text{oder auch} \\ \operatorname{tg}(r_2 - r_1)\tau = \dfrac{4(r_2 - r_1)\tau}{4 + (q^2 - 1)(r_2 - r_1)^2 \tau^2}. \end{cases}$$

Die Behandlung dieser Gleichung ist dieselbe, die wir von (57a) kennen. In Tab. 2 sind wieder einige Werte der rechten Seite von (63a) für dieselben Werte von q angegeben. Wie man sieht, verlaufen die zugehörigen Kurven höher als die entsprechenden von (57a). Die Abweichungen der Wurzeln von

Vielfachen des Wertes π sind daher etwas größer als bei den Wurzeln gleicher Ordnung dort. Für den speziellen Wert $q = 5$ habe ich einige Wurzeln durch bekannte Näherungsverfahren bis auf 3 Dezimalen genau berechnet und in Tab. 3 mitgeteilt, die anderen für $q = 3$ und $q = 11$ daselbst angegebenen Wurzeln sind in roher Annäherung graphisch bestimmt. Die beistehende Zeichnung, bei der die Ordinaten im 20fachen Maßstab der Abszissen gehalten sind, zeigt den Verlauf der Kurven η und y.

Tabelle 2.

x	$q = 3$ η	$q = 5$ η	$q = 11$ η
1	0,333 333	0,142 857	0,032 258
2	0,222 222	0,080 000	0,016 529
3	0,157 895	0,054 545	0,011 070
4	0,121 212	0,041 237	0,008 316
5	0,098 039	0,033 113	0,006 658
6	0,082 192	0,027 650	0,005 550
7	0,070 707	0,023 729	0,004 759
8	0,062 016	0,020 779	0,004 165



$$\eta = \frac{4x}{4 + (q^2 - 1)x^2}.$$

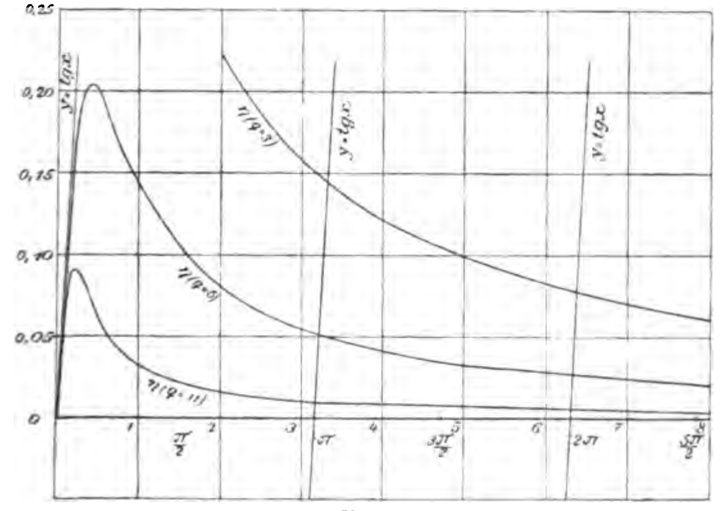


Fig. 1.

Tabelle 3.

w	$q = 3$ x	$q = 5$ x	$q = 11$ x	$w\pi$
1	3,28 (0,14)	3,1929 (0,0513)	3,15 (0,01)	3,14159
2	6,36 (0,08)	6,3095 (0,0263)	6,29 (0,007)	6,28319

Die Werte x sind die Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{tg} x = \frac{4x}{4 + (q^2 - 1)x^2},$$

die eingeklammerten Zahlen bedeuten die Abweichungen gegen das zugehörige Vielfache von π, w ist die Ordnungszahl der Wurzeln.

Die Abweichung der Wurzeln von den zugehörigen Vielfachen von π beträgt also schon bei $q = 5$ für die erste Wurzel nicht ganz 2 Proz. des Wurzelwertes, bei den höheren absolut und relativ viel weniger. Bei $q = 11$ kommen die Abweichungen überhaupt kaum in Betracht, bei $q = 3$ aber sind sie merkbar. Nähert sich q dem Werte 1, so rücken die Wurzeln tieferer Ordnung auch hier in die Nähe der ungeraden Vielfachen von $\pi/2$; für $q = 1$ erhält man die bekannte Gleichung

$$\operatorname{tg} r_2 \tau = r_2 \tau, \tag{64}$$

deren sechs erste Wurzeln bei Rayleigh[1]) angegeben sind, und deren Wurzeln mit wachsender Ordnungszahl sich asymptotisch dem Werte $\infty . \pi + 0{,}5\,\pi$ nähern, wo das Zeichen ∞ für eine über alle Grenzen hinauswachsende ganze Zahl gesetzt ist. Man behält in letzterem Falle nur den aufsteigenden Ast der Kurve η, während für größere Werte von q nur der absteigende Ast Schnittpunkte mit $y = \operatorname{tg} x$ gibt. Läßt man also q von großen Werten an gegen 1 hin abnehmen, so liefert unterhalb eines gewissen Übergangswertes auch der aufsteigende Ast von η Wurzeln. Dieser Übergangswert von q hängt zusammen mit der Lage des Maximums der Funktion η. Man kann die Lage des Maximums für den Übergangswert ungefähr, allerdings mit sehr weiten Grenzen, bestimmen durch folgende Überlegung:

1) Lord Rayleigh, l. c. I. p. 369.

mit abnehmendem q rückt das Maximum der Funktion η nach größeren Abszissen x hin. Liegt es an der Stelle $x = 3\pi/2$, so hat unbedingt der aufsteigende Ast von η einmal die Kurve $y = \operatorname{tg} x$ geschnitten, da $\operatorname{tg} x$ für $x = 3\pi/2$ unendlich, das rechts von $3\pi/2$ gelegene Maximum von η aber endlich ist. Das liefert eine untere Grenze für q. Die obere Grenze für q erhalten wir, wenn wir das Maximum an die Stelle $x = \pi$ legen. Mit Hilfe der bekannten Sätze aus der Theorie der Maxima und Minima einer Funktion[1]) erhalten wir so zwei Gleichungen, welche als obere und untere Grenze für den Übergangswert q ergeben:

$$x = \pi; \quad \text{obere Grenze } q = 1{,}185; \quad \frac{r_2}{r_1} = 11{,}81,$$

$$x = \frac{3\pi}{2}; \quad \text{untere Grenze } q = 1{,}0863; \quad \frac{r_2}{r_1} = 24{,}17.$$

Die zugehörigen Quotienten $r_2/r_1 = (q+1)/(q-1)$ sind zur Veranschaulichung der Dimensionen, welche die Ringe in diesen Fällen haben, daneben geschrieben. Ist $q < 1{,}0863$, d. h. $r_2/r_1 > 24{,}17$, so wird ganz sicher wenigstens eine Wurzel von dem aufsteigenden Ast geliefert; ist $q > 1{,}185$ also $r_2/r_1 < 11{,}81$, so liegen sämtliche Schnittpunkte auf dem absteigenden Ast.

Die ausgezeichneten Werte von k lassen sich auch hier durch die Gleichung (60) darstellen, in der $f(w, q)$ eine ähnliche Bedeutung aber andere Werte hat. Das zugehörige System der elektrischen und magnetischen Kräfte erhält man aus (55), indem man darin statt der Funktionen (52a) die Funktionen (62) und für n den Wert $\frac{3}{2}$ einsetzt.

---

1) Die Maxima der Funktion

$$\eta = \frac{4x}{4 + (q^2 - 1)x^2},$$

liegen an den Stellen

$$\bar{x} = \frac{2}{\sqrt{q^2 - 1}}$$

und sind

$$\eta_{\text{Max.}} = \frac{\bar{x}}{2}.$$

III. $\nu = 2$, also $n = \frac{5}{2}$.

§ 14. Wir behandeln wieder nur das System (44a). Die transzendente Bestimmungsgleichung für τ erhalten wir direkt aus (41) in der Form

$$\frac{(3 - \varrho_1^2)\sin\varrho_1 - 3\varrho_1\cos\varrho_1}{(3 - \varrho_1^2)\cos\varrho_1 + 3\varrho_1\sin\varrho_1} = \frac{(3 - \varrho_2^2)\sin\varrho_2 - 3\varrho_2\cos\varrho_2}{(3 - \varrho_2^2)\cos\varrho_2 + 3\varrho_2\sin\varrho_2},$$

die durch Einführung des Quotienten q übergeht in

$$(65)\quad \operatorname{tg}(\varrho_2 - \varrho_1) = \frac{12(\varrho_2 - \varrho_1)[12 + (q^2 - 1)(\varrho_2 - \varrho_1)^2]}{144 - (\varrho_2 - \varrho_1)^2\{48 - (q^2 - 1)[12 + (q^2 - 1)(\varrho_2 - \varrho_1)^2]\}}.$$

Diese Gleichung ist bedeutend komplizierter als die früheren, für $q = \infty$ geht sie jedoch wie die anderen über in

$$\operatorname{tg}(\varrho_2 - \varrho_1) = 0.$$

Für den Grenzfall $q = 1$ liefert sie

$$\operatorname{tg}(\varrho_2 - \varrho_1) = \frac{3(\varrho_2 - \varrho_1)}{3 - (\varrho_2 - \varrho_1)^2},$$

wobei $\varrho_2/\varrho_1 = \infty$ sein muß; oder

$$(66)\quad \operatorname{tg} r_2\tau = \frac{3 r_2 \tau}{3 - r_2^2\tau^2},$$

indem man gleich von vornherein $r_1 = 0$ setzt.

Der durch (66) dargestellte Grenzfall geht gewissermaßen noch über den Grenzfall (64) der Gleichung (63a) hinaus, indem man ihn aus (63a) erhält, wenn man darin $q = \sqrt{\frac{2}{3}}$, also kleiner als 1 annimmt.

Die Kurve $\eta = 3x/3 - x^2$, welche die rechte Seite von (66) darstellt, wächst zunächst von 0 bis $+\infty$, wenn x die Werte von 0 bis $\sqrt{3} = 1{,}732$ durchläuft. Dann springt sie nach $-\infty$, bleibt nun dauernd negativ und nähert sich asymptotisch dem Werte 0, den sie für $x = \infty$ erreicht. Da $y = \operatorname{tg} x$ bereits bei $x = \pi/2 = 1{,}571$ unendlich wird, so müssen sich beide Kurven unterhalb $x = \pi/2$ einmal schneiden. Die erste Wurzel der Gleichung (66) wird also von dem positiven Zweig der Funktion η geliefert und liegt in der Nähe von $\pi/2$; die anderen Wurzeln liefert der negative Zweig.

Für den Wert $q = 5$ erhält man aus (65), wenn man $\varrho_2 - \varrho_1 = x$ setzt,

$$(67)\quad \operatorname{tg} x = \frac{x(3 + 6x^2)}{3 + 5x^2 + 12x^4}.$$

Die Werte der rechten Seite sind in bekannter Weise unter η in Tab. 4 zusammengestellt.

Tabelle 4.

x	$q = 5$ η
1	0,450 000
2	0,251 163
3	0,167 647
4	0,125 515
5	0,100 288
6	0,083 508
7	0,071 542
8	0,062 577

$$\eta = \frac{x(3 + 6x^2)}{3 + 5x^2 + 12x^4}.$$

Man sieht durch Vergleichung von Tabb. 4 und 2, daß unsere Kurve für $q = 5$ etwa von $x = 3$ aufwärts nahe zusammenfällt mit der entsprechenden Kurve für $n = \frac{3}{2}$ und $q = 3$. Die Abweichungen der Wurzeln von (67) von den Werten $w\pi$ sind hier also größer als bei den Wurzeln gleicher Ordnung im Falle $n = \frac{3}{2}$. Für Ringe, bei denen q kleinere Werte hat als 5, werden die Abweichungen noch größer.

Für die folgenden Werte $n = \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$ etc. gelten ähnliche Beziehungen, die Gleichungen werden aber immer komplizierter und die Lage der Wurzeln der Bestimmungsgleichung für τ ist schwieriger zu bestimmen.

Heidelberg, 17. Juli 1905, Physik. Inst. d. Universität.

(Eingegangen 18. Juli 1905.)

4. *Über die Wirkung der Bestrahlung, den Einfluß der Temperatur und das Verhalten der Halogene bei der Spitzenentladung; nach Versuchen von F. R. Gorton mitgeteilt von E. Warburg.*[1]

§ 1. Die nachstehende Untersuchung des Hrn. F. R. Gorton hatte ursprünglich zum Ziel die Feststellung des Minimumpotentials (*M. P.*) bei der Spitzenentladung in den Halogenen Chlor, Brom, Jod. Doch wichen die einzelnen nach der üblichen Methode erhaltenen Bestimmungen in diesen Gasen so erheblich voneinander ab, daß es notwendig wurde, die allgemeinen Bedingungen, unter welchen das Minimumpotential sich als konstanter Wert darstellt, näher, als es bisher geschehen ist, in Betracht zu ziehen.

§ 2. Die allgemeine Versuchsanordnung zeigt Fig. 1. Bei *e* stehen die Elektroden einer Vossschen, durch Elektromotor

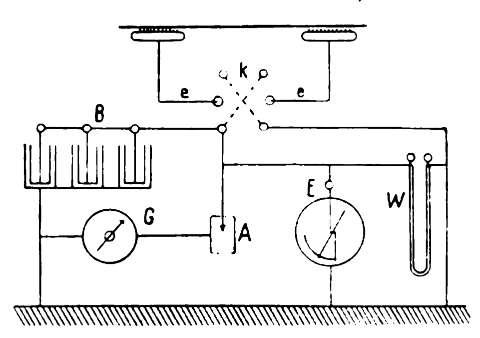


Fig. 1.

betriebenen Influenzmaschine, *k* ist ein Kommutator. Der Maschinenstrom geht über das Versuchsgefäß *A* und ein durch geerdete Stanniolhülle elektrostatisch geschütztes Drehspulengalvanometer *G* zur Erde. Diesem Stromweg parallel liegt die Leidener Batterie *B*, der das Spitzenpotential regulierende

1) Gekürzte Berliner Doktordissertation.

Widerstand W, gebildet aus einer sehr verdünnten Lösung von Jodkadmium in Amylalkohol mit verstellbaren Kupferelektroden, endlich das geeichte Braunsche Elektrometer E mit einem Meßbereich von 0 bis 5000 Volt, in dessen Mitte 1 Teil 50 Volt entspricht.

Figg. 2 und 3 zeigen die benutzten Versuchsapparate A. Im Apparat I, Fig. 2, ist die mit der einen Maschinenelektrode

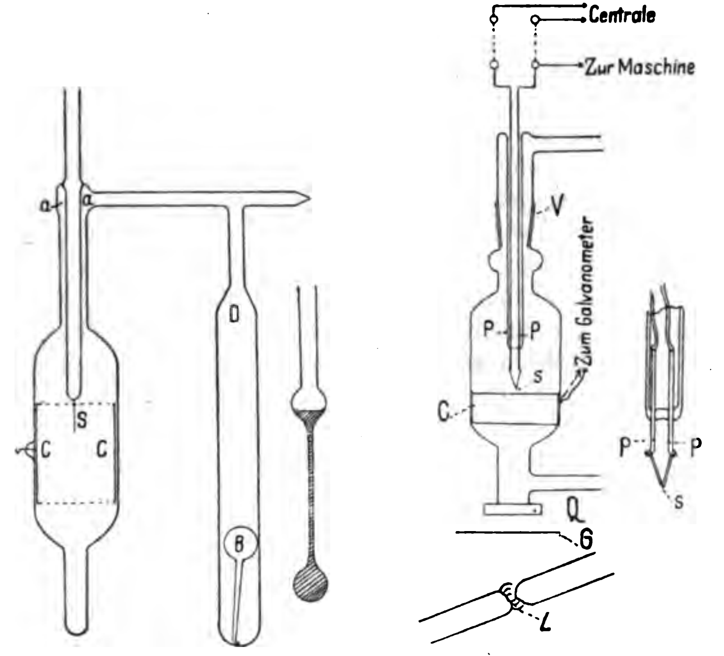


Fig. 2. App. I. Fig. 3. App. II.

verbundene Spitze S an einem 0,25 mm dicken Platindraht gezogen; dieser ist in ein Glasrohr eingeschmolzen und ragt auf einer Länge von 15 mm aus demselben hervor. C, die Erdelektrode, ist ein 4,5 cm hoher, 4,7 cm weiter Zylinder aus Platinblech. a ist ein im Innern des Gefäßes um das den Platindraht tragende Glasrohr gelegter geerdeter Schutzring, welcher verhütet, daß von S Elektrizität über die Glaswände nach C geht.

Im Apparat II, Fig. 3, kann die Spitze elektrisch geglüht werden. Zwei 0,5 mm dicke Platindrähte P sind nämlich in

ein Glasrohr eingeschmolzen und durch einen **V**-förmigen, 0,25 mm starken Platindraht verbunden. Dieser Verbindungsdraht kann durch einen Strom von 8—10 Amp. geglüht werden und bringt dann durch Wärmeleitung auch die an ihm befestigte noch dünnere Spitze *S* zum Glühen. Mittels des Schliffes *V* können die Spitzen leicht ausgewechselt werden. Auch ein Schutzring wie Fig. 2 bei *a* war angebracht (nicht gezeichnet). *C* ist wieder die Erdelektrode.

Zur Bestimmung des *M. P.* wurde der regulierbare Widerstand *W* (Fig. 1) vergrößert, bis das Galvanometer Strom anzeigte und alsdann bis zum Aufhören des Stromes verkleinert.

§ 3. Bei der folgenden allgemeinen Untersuchung über das *M. P.* handelt es sich nicht um die Abhängigkeit desselben von den geometrischen Verhältnissen, sondern um die Veränderungen, welche es für eine und dieselbe, innerhalb desselben geerdeten Metallzylinders befindliche Spitze durch verschiedene Behandlung erfährt. Das *M. P.* ergab sich im allgemeinen am niedrigsten an frisch angefeilten Spitzen; es ging in die Höhe durch fortgesetzte Entladung aus denselben, durch Glühen in der Flamme, sowie elektrisches Glühen in feuchter Luft oder feuchtem Sauerstoff. Alsdann wurde der Einfluß der Bestrahlung untersucht. Dabei ergab sich das bemerkenswerte Resultat, daß die Bestrahlung zwar auf das *M. P.* der frisch angefeilten Spitze ohne Einfluß ist, dagegen den durch die erwähnte Behandlung erhöhten Wert auf den ursprünglichen kleineren der frisch angefeilten Spitze herabsetzt. Diese Wirkung ist eine temporäre, nach Aufhebung der Strahlung wieder verschwindende; sie wurde von der ultravioletten Strahlung, wie zu erwarten, nur auf das negative, von der Radiumstrahlung auf das *M. P.* beiderlei Zeichens ausgeübt.

Zur Bestätigung des Gesagten mögen hierunter einige Versuche mitgeteilt werden, welche mit dem Apparat II, Fig. 3, gemacht wurden. *Q* ist eine Quarzplatte, *G* eine Blende, welche der Beobachter von seinem Platze aus handhabte und durch deren Entfernung das Bogenlicht *L* Zutritt zum Apparat erhielt.

Folgende Versuche beziehen sich auf die Wirkung ultravioletter Bestrahlung.

	Frisch angefeilt	Nach Wirkung d. Spitzenentladung	Bestrahlt	Unbestrahlt	Bestrahlt
Platinspitze in Sauerstoff	−2050	−2300	−2050	—	—
Zinkspitze in Sauerstoff	2180	2450	2180	—	—
Platinspitze in Wasserstoff	1100	1260	1100	1800	1100
Nähnadel in atmosph. Luft	1600	2450	1600	—	—

Durch den Gebrauch bei der Spitzenentladung werden die Spitzen zerstäubt und abgestumpft[1]), was besonders bei dem letzten Versuche mit der Nähnadel hervortrat. Daß der Einfluß dieser Wirkung auf das *M. P.* gegen den Einfluß anderer Wirkungen hier zurücktritt, folgt daraus, daß dasselbe durch Bestrahlung auf den Anfangswert zurückgebracht wird.

Bei den folgenden Versuchen wurde das *M. P.* durch Glühen in der Flamme erhöht.

	Frisch angefeilt	Geglüht	Bestrahlt	Unbestrahlt	Bestrahlt	Unbestrahlt	Bestrahlt
Platinspitze in Sauerstoff	−2050	3160	2060	3160	2050	—	—
Platinspitze in Wasserstoff	1100	1260	1100	1300	1100	1450	1100

Durch Einschaltung einer Glasplatte in den Gang der Bogenlampenstrahlen wurde deren Wirkung auf das *M. P.* aufgehoben.

Radiumstrahlung. (Radiumpräparat außen am Versuchsgefäß.)

	Frisch angefeilt		Nach dem Glühen		Bestrahlt	
Platinspitze in Sauerstoff	+2650	−1900	+2900	−3300	+2650	−1900
Platinspitze in Wasserstoff	—		+1700	−1630	+1530	−1100

1) J. Precht, Wied. Ann. **49**. p. 164. 1893.

§ 4. Es ist nach diesen Ergebnissen zu unterscheiden zwischen unempfindlichen und empfindlichen Spitzen, sowie zwischen normalen und anormalen Werten des *M. P.* Unempfindliche Spitzen liefern die normalen, kleinsten Werte des *M. P.*; werden sie durch irgend eine Behandlung empfindlich gemacht, so nehmen sie erhöhte, anormale Werte des *M. P.* an, welche alsdann durch Bestrahlung temporär auf die normalen Werte zurückgeführt werden.

§ 5. Über die Behandlungsarten, durch welche einer Spitze Empfindlichkeit einerseits erteilt, anderseits entzogen werden kann, sind viele Versuche gemacht worden. Von den Ergebnissen seien einige hier angeführt.

Frisch angefeilte Platinspitzen sind der Regel nach unempfindlich. Durch die Spitzenentladung selbst werden sie gewöhnlich bald empfindlich, besonders in Wasserstoff und Sauerstoff, weniger regelmäßig in atmosphärischer Luft; in Brom hingegen werden sie durch die Spitzenentladung unempfindlicher, wobei das *M. P.* sinkt. Empfindlich werden sie ferner durch elektrisches Glühen in feuchter Luft oder in feuchtem Sauerstoff. Entzogen wird die Empfindlichkeit durch elektrisches Glühen in trockener Luft oder in trockenem Sauerstoff.

Es wurden auch Spitzen aus anderen Metallen untersucht, alle konnten durch Glühen empfindlich gemacht werden, nämlich Spitzen aus Pd, Ag, Cu, Fe, Zn, Al; Zn- und Al-Spitzen indessen nur in geringem Maße. Eine durch Glühen in der Bunsenflamme empfindlich gemachte Kupferspitze konnte unempfindlich gemacht werden durch Glühen in Wasserstoff oder durch Ablöschen in Alkohol. Danach beruht die Empfindlichkeit bei Kupfer auf einer Oxydhaut; in der Tat zeigen nach Hallwachs[1]) CuO und Cu_2O lichtelektrische Empfindlichkeit. Amalgamieren macht eine Zinkspitze empfindlich und erhöht ihr *M. P.* Eine frisch angefeilte Zinkspitze erwies sich unempfindlich.

§ 6. Fig. 4 zeigt die Stromstärke als Funktion des negativen Spitzenpotentiales für eine Platinspitze in trockenem Wasserstoff, und zwar Kurve 1 für den unempfindlichen Zu-

1) W. Hallwachs, Physik. Zeitschr. 5. p. 493. 1904.

stand, Kurve 2 für den empfindlichen Zustand bei Bestrahlung mit der Bogenlampe, Kurve 3 für den empfindlichen Zustand ohne Bestrahlung. Die nicht bestrahlte empfindliche Spitze (3) liefert keinen Strom unterhalb 1600 Volt. Zwischen 1660 und 1700 Volt zeigt der Strom Neigung zum plötzlichen Verschwinden, eine charakteristische Eigenschaft von empfindlichen Spitzen. Bei 1600 Volt ist die Spitze sehr empfindlich; Bestrahlung durch die Bogenlampe aus einer Entfernung von mehreren Metern ruft die Entladung hervor. Die Kurven 1 und 2 sind bei der benutzten Bestrahlungsstärke (18 cm Entfernung der Bogenlampe) wenig voneinander verschieden und treffen die Abszissenachse in demselben, dem *M. P.* entsprechenden Punkte. Vom Potential 1800 an fallen alle drei Kurven zusammen, so daß von diesem Potentialwert an die Bestrahlung keinen Einfluß mehr auf die Stromstärke ausübt. Ähnliche Kurven wurden für Sauerstoff erhalten.

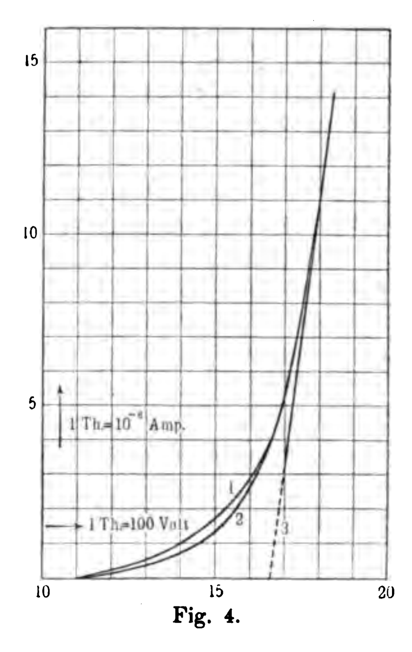


Fig. 4.

Wird bei der unempfindlichen oder bei der bestrahlten empfindlichen Spitze das Potential über das *M. P.* hinaus erhöht, so wächst, wie Fig. 4 zeigt, die Stromstärke stetig, aber anfänglich sehr langsam. Dies erschwert, wenn überhaupt der Entladungsstrom schwach ist, die Bestimmung des *M. P.*

§ 7. In seiner Untersuchung über die Spitzenentladung bemerkt Hr. Röntgen[1]), daß das Anfangspotential (*A. P.*), d. i. das kleinste Spitzenpotential, bei welchem vom stromlosen Zustande aus die Entladung beginnt, größer ist als das *M. P.*, d. i. der kleinste Wert, auf welchen das Potential der strom-

1) W. C. Röntgen, Göttinger Nachr. p. 390. 1878.

liefernden Spitze erniedrigt werden kann, ohne daß der Strom aufhört; daß ferner das *A. P.* sich als eine von unkontrollierbaren Nebenumständen abhängige und daher nicht scharf bestimmbare Größe erweist, daß dagegen bei seiner Versuchsanordnung, bei welcher die Spitze in 1,93 cm Entfernung einer geerdeten Metallplatte gegenüberstand, die Werte des *M. P.* vorzügliche Übereinstimmung zeigen. Dies war für Hrn. Röntgen der Grund, bei seiner Untersuchung besonders das *M. P.* in Betracht zu ziehen.

Weiter fand Hr. Precht[1]), daß durch ultraviolette Bestrahlung der negativen Spitze das *A. P.* herabgesetzt wird.

Endlich hat Hr. Gorton gefunden, daß der Unterschied zwischen *A. P.* und *M. P.* im allgemeinen nur empfindlichen Spitzen zukommt und daß dieser Unterschied auch bei den empfindlichen Spitzen durch die Bestrahlung innerhalb der 10—20 Volt betragenden Fehlergrenzen zum Verschwinden gebracht wird. Doch sind bis jetzt zwei Ausnahmen von diesem Satze gefunden worden.

§ 8. Die erste Ausnahme betrifft den Fall einer negativen Platinspitze in trockenem, durch glühendes Kupfer von Sauerstoff befreitem Stickstoff. Hier ergab sich ohne Bestrahlung das *M. P.* zu —1400, das *A. P.* gleich —1800 Volt; durch Radiumstrahlen, welche durch die Glaswand des wie bei meinen älteren Versuchen eingerichteten Gefäßes hindurchtraten, wurde das *M. P.* nicht beeinflußt, das *A. P.* zwar herabgesetzt, aber mit dem *M. P.* nicht zur Koinzidenz gebracht; ob dies durch stärkere Bestrahlung wäre erreicht worden, muß dahingestellt bleiben. Hingegen wurde bei positiver Spitze durch die Bestrahlung das *M. P.* von +2050 auf +1930 Volt erniedrigt und fiel dann mit dem *A. P.* zusammen.

§ 9. Was die zweite Ausnahme betrifft, so ist zunächst daran zu erinnern, daß alle bisherigen Angaben sich auf die Zimmertemperatur beziehen. Nun habe ich früher[2]) das *M. P.* bei der Temperatur der flüssigen Luft in geschlossenem Ge-

---

1) J. Precht, Wied. Ann. **49.** p. 161. 1893.

2) E. Warburg, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 1062. 1902.

fäße erheblich tiefer als bei der Zimmertemperatur gefunden, nämlich für

	Stickstoff	Wasserstoff
+ 18°	− 1460 Volt	− 1520 Volt
− 186	− 1090 „	− 1240 „

Alsdann hat Hr. Dr. Stark mich brieflich darauf aufmerksam gemacht, daß dieser Unterschied möglicherweise auf der Dichtigkeitsänderung des Gases an der Spitze infolge der Stromwärme beruhen könne, indem die gleiche Temperaturerhöhung bei tieferer Temperatur eine größere Dichtigkeitsabnahme als bei höherer bewirkt; auch wird die Temperaturerhöhung durch die Stromwärme wegen der mit sinkender Temperatur erfolgenden Abnahme der Wärmeleitung des Gases bei −186° größer sein als bei der Zimmertemperatur.

Wenn dies zutrifft, so war zu erwarten, daß das *A. P.*, bei bestrahlter Spitze gemessen, durch die Abkühlung des Gases auf −186° keine Veränderung erfährt. Diese Folgerung wurde mit Rücksicht auf § 6 nicht am Stickstoff, sondern am Wasserstoff geprüft. Der Versuchsapparat entsprach ganz dem von mir benutzten. Es ergab sich nun unter der Wirkung der Radiumstrahlung

bei + 20°	− *M. P.* = − *A. P.* = − 1040	+ *M. P.* = + *A. P.* = + 1370
bei − 186	− *A. P.* = − 1040	+ *A. P.* = + 1385

Dagegen zeigte das *M. P.* bei −186° das von mir beobachtete Verhalten; es ist dabei noch zu bemerken, daß der Strom, wenn das Spitzenpotential erniedrigt ward, bei −186° von einem endlichen Wert aus, bei +20° dagegen stetig auf Null abnahm.

Durch diese Versuche ist die Richtigkeit der Bemerkung des Hrn. Stark sehr wahrscheinlich gemacht. Zugleich ergibt sich aus dem Zusammenfallen von *A. P.* und *M. P.* bei der Zimmertemperatur, daß hier die Dichtigkeitsabnahme durch Stromwärme auf das *M. P.* keinen merklichen Einfluß hat.

Die Dichtigkeitsabnahme durch die Stromwärme ist nun ein von den elektrischen Eigenschaften des Gases unabhängiges, sekundäres Phänomen. Sofern dieses das *M. P.* beeinflußt, empfiehlt es sich daher, nicht mehr diese Größe, sondern vielmehr das *A. P.* als charakteristische Größe bei

der Spitzenentladung zu benutzen; wenn man dabei Einflüsse sekundärer Art durch die Bestrahlung beseitigt, so gelangt man nach § 7 in ähnlicher Weise zu konstanten Werten, wie bei dem Funkenpotential, wenn die Verzögerung durch Bestrahlung aufgehoben ist. Auch entspricht das *A. P.* bei der Spitzenentladung dem Funkenpotential bei der Funkenentladung.

§ 10. Erst nach den Ermittelungen der §§ 3—6 war es möglich, die ursprüngliche Aufgabe der Bestimmung des *M. P.* in den Halogenen wieder aufzunehmen. Benutzt wurde App. I, Fig. 2; bei allen Messungen befand sich ein Radiumpräparat außen am Versuchsgefäß.

Chlor wurde aus NaCl, MnO_2 und H_2SO_4 bereitet, durch $CuSO_4$, $CaCl_2$ und P_2O_5 in ein dickwandiges Glasrohr geleitet und in diesem mittels eines Bades aus fester Kohlensäure und Äther kondensiert. Nach Anschluß dieses Rohres an das Versuchsgefäß entfernte man das Kältebad, worauf das Gas durch das Versuchsgefäß strömte. Das *M. P.* wurde von Zeit zu Zeit gemessen; änderte es sich nicht mehr, so wurde das Gas als rein betrachtet. Zur Druckverminderung diente eine Wasserstrahlpumpe, zur Druckmessung ein Quecksilbermanometer, wobei das Quecksilber vom Chlor durch eine kleine Säule aus Schwefelsäure getrennt war.

Reines, trockenes Brom wurde in einem geschlossenen Glaskügelchen *B* in das Hilfsgefäß *D* Fig. 2 gebracht, der ganze Apparat unter starker Erhitzung des Versuchsgefäßes mittels der Quecksilberpumpe evakuiert und dann von der Pumpe abgeschmolzen, endlich das Kügelchen durch Schütteln zertrümmert. Nunmehr kamen das Versuchsgefäß und das Hilfsgefäß in je ein Temperaturbad, jenes in ein elektrisch geheiztes und gerührtes Bad von Paraffinöl von 70°, dieses in ein Bad, dessen Temperatur gleich oder kleiner als 60° war, so daß das Brom im Versuchsgefäß sich nicht kondensieren konnte. Die Dampfdrucke, den Angaben von Ramsay und Young entnommen[1]), entsprachen der Temperatur des Hilfsgefäßes.

In ähnlicher Weise wurde mit dem Jod verfahren. War im Falle des Brom kein Radium zugegen, so sank durch fort-

1) W. Ramsay u. S. Young, Journ. Chem. Soc. **49**. p. 453. 1886.

gesetzte Entladung das *M. P.* bis auf einen kleinsten Wert; dieser wurde in Gegenwart von Radium sofort erhalten, welches das *M. P.* um Werte bis 380 Volt herabsetzte und bewirkte, daß *A. P.* und *M. P.* zusammenfielen.

§ 11. Die folgenden Tabellen enthalten die Ergebnisse der Versuche, welche sämtlich mit derselben Spitze gemacht wurden. Figg. 5—7 geben die graphische Darstellung. Die Versuche mit Chlor beziehen sich auf $+20^{\circ}$, die Versuche mit Brom und Jod auf andere Temperaturen. Unter der Annahme, daß das *M. P.* bei konstanter Gasdichte von der Temperatur unabhängig ist, wurden die Werte für Brom und Jod auf $+20^{\circ}$ reduziert und in die Figuren mit eingetragen; so entstanden die punktierten mit + und — bezeichneten Kurven, in welchen überall demselben Druck dieselbe Molekelzahl im Kubikzentimeter entspricht. Endlich sind zum Vergleich auch die in dem App. I mit derselben Spitze bestimmten Werte des *M. P.* für trockene Luft bei $+20^{\circ}$ in die Figuren aufgenommen (mit $+L$, $-L$ bezeichnet).

Chlor, +20°.

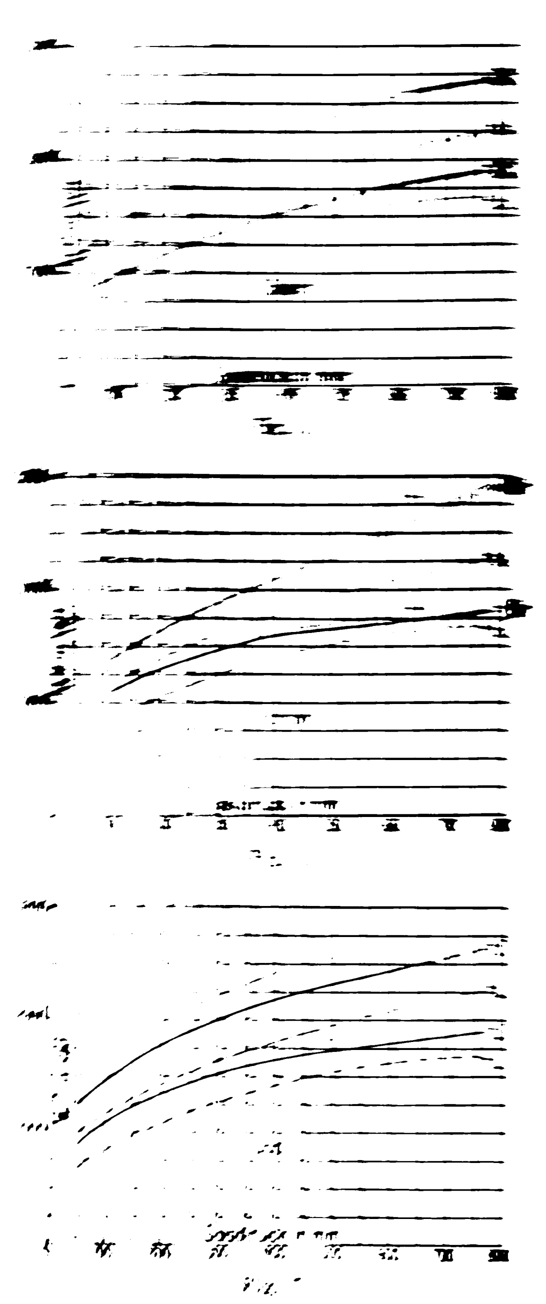
Druck	$+M$	$-M$
760	2680	1900
610	2600	1810
530	2480	1700
440	2300	1580
340	2050	1450
280	1870	1320
210	1720	1210
180	1660	1170
110	1440	1050
80	1260	910
40	1160	840

Brom.

Temp.	Druck	$+M$	$-M$
60° C.	780	2910	1810
55	670	2680	1750
50	570	2500	1660
45	480	2250	1650
40	390	2120	1570
35	330	1930	1530
30	270	1790	1400
25	215	1670	1360
20	175	1530	1250
17	150	1500	1160
11	115	1340	1110

Jod.

Temp.	Druck	$+M$	$-M$
185° C.	760	2620	1870
175	585	2400	1800
170	500	2270	1680
160	390	2150	1575
150	290	2025	1550
140	220	1850	1370
130	160	1570	1250
120	115	1530	1140
100	45	1200	900



§ 12. Die folgende Tabelle enthält die unter Bestrahlung für dieselbe Spitze in demselben Apparat I in verschiedenen Gasen gefundenen Werte des *M. P.*, welches mit Ausnahme des negativen *M. P.* bei Stickstoff mit dem *A. P.* zusammenfiel. Der chemisch bereitete Stickstoff war durch glühendes Kupfer von Sauerstoff befreit, der Sauerstoff, einer Bombe entstammend, enthielt 8 Proz. Stickstoff, alle Gase waren getrocknet. Die Angaben beziehen sich alle auf $+20^{\circ}$, so daß die auf denselben Druck bezüglichen Werte bei den verschiedenen Gasen der gleichen Molekelzahl in der Raumeinheit entsprechen. Vgl. § 11.

Gas	Druck 760 mm			Druck 485 mm		
	$+M$	$-M$	$\frac{+M}{-M}$	$+M$	$-M$	$\frac{+M}{-M}$
H_2	1370	1140	1,20	1120	1000	1,12
N_2	1930	1400	1,36	1630	1200	1,36
O_2	2550	1950	1,31	—	—	—
Luft	2250	1660	1,35	1930	1500	1,29
Cl_2	2680	1900	1,41	2400	1660	1,45
Br_2	—	—	—	2500	1700	1,47
J_2	—	—	—	2620	1870	1,40

Die Halogene zeigen also verhältnismäßig hohe Werte des *M. P.* oder *A. P.*, sowie ihnen nach Ritter[1]) auch hohe Werte des Funkenpotentials in homogenen Feldern zukommen.

§ 13. Nachdem in dieser Arbeit gezeigt ist, unter welchen Bedingungen man konstante und reproduzierbare Werte des *M. P.* bez. *A. P.* bei der Spitzenentladung erhält, scheint es eine lohnende Aufgabe zu sein, das Verhalten jener Größen unter gut definierten geometrischen Verhältnissen in ähnlichem Umfange wie das Funkenpotential bei der Funkenentladung zu untersuchen.

1) F. Ritter, Ann. d. Phys. 14. p. 118. 1904.

(Eingegangen 20. August 1905.)

5. *Die ladende Wirkung der Röntgenstrahlen*[1]; *von Karl Hahn.*

Einleitung.

Unter den elektrischen Wirkungen der Röntgenstrahlen sind zwei heute allgemein anerkannt: die ionisierende und die entladende Wirkung. Doch ist man darüber noch sehr geteilter Meinung, ob Röntgenstrahlen imstande sind, einen neutralen Körper, den sie treffen, elektrisch zu laden.

Für die Entstehung positiver Ladung sprechen von vornherein die Versuche Sagnacs[2] und Dorns[3], die unter den sekundären Röntgenstrahlen Kathodenstrahlen gefunden haben, also Strahlen, die negative Elektrizität mitführen. Righi[4] fand bei seinen Versuchen über die entladende Wirkung, daß positiv und negativ geladene und selbst neutrale Körper so beeinflußt werden, daß sie schließlich eine positive Ladung zeigen. Borgmann und Gerchun[5], ebenso wie Benoist und Hurmuzescu[6] konnten keinerlei Ladung finden. Letztere griffen Righi sogar heftig an, ohne daß jedoch einer von dem

1) Auszug aus der Gießener Dissertation. (Dez. 1904.)

2) G. Sagnacs, Journ. d. Phys. (4) 1. p. 13. 1902; Beibl. 26. p. 509. 1902.

3) E. Dorns, Archiv Néerl. (2) 5. p. 595. 1900; Beibl. 25. p. 316. 1901; Abh. d. naturf. Gesellsch. zu Halle 22. p. 39. 1900; Beibl. 24. p. 576. 1900.

4) A. Righi, Rendic. R. Acc. delle Sciente Bologna (5) 5. p. 725. 1896; Rendic. R. Acc. dei Lincei (5) 5. p. 143. 1896; Beibl. 20. p. 451. 1896.

5) J. Borgmann u. L. Gerchun, Compt. rend. 122. p. 378. 1896; Beibl. 20. p. 453. 1896.

6) L. Benoist u. D. Hurmuzescu, Compt. rend. 122. p. 779. 1896; Beibl. 20. p. 455. 1896.

anderen überzeugt wurde. Minchin[1]) bekam teils positive, teils negative Ladung, nämlich:

+ Fe, Pt, Cu, Al, Au, Ag.

− Na, Hg, Sn, Pb, Zn.

Perrin[2]) konnte ebenfalls keine Ladung finden. Dagegen veröffentlichte Thomson[3]) vor kurzem eine Bemerkung, in der er mitteilte, daß ein positiv geladenes Goldblattelektroskop in hohem Vakuum noch mehr divergierte, wenn Röntgenstrahlen darauf fielen. Vorher negativ geladen, fielen die Blättchen beim Bestrahlen zusammen und zeigten dann positive Ladung.

Die Ansichten sind also recht verschieden. Wie wenig die Sache geklärt ist, sieht man daraus, daß Thomson seine einzelne Beobachtung als bemerkenswert veröffentlicht. Ich habe nun versucht, die Frage zu lösen. Die Veranlassung dazu bot mir der Umstand, daß ich zufällig auf einem von Röntgenstrahlen getroffenen, isolierten Metallschirm positive Ladung fand.

I. Allgemeines.

1. Theoretisches.

Ist das Entstehen einer positiven Ladung überhaupt möglich? Die Röntgenstrahlen sind elektromagnetische Impulse, die von der von den Kathodenstrahlen getroffenen Anode (Antikathode) ausgehen. Auf seinem Wege durch den Raum wird der Impuls absorbiert. Die Absorption besteht darin, daß durch die Energie des Strahles Elektronen, die auf seinem Weg liegen, zum Mitschwingen veranlaßt werden. Bei periodischen Wellen ist dieses Mitschwingen an Resonanz gebunden, d. h. bei ihnen muß die Schwingungsdauer der Welle mit der Eigenschwingungsdauer des Moleküls oder Elektrons übereinstimmen. Bei den Röntgenstrahlen kommt Resonanz nicht in Betracht, da es sich nicht um periodisch wirkende Kräfte handelt. Trifft also ein Impuls auf ein Elektron, so

---

1) G. M. Minchin, The Electrician **36.** p. 36. 1896; Beibl. **20.** p. 458. 1896.

2) E. Perrin, Eclair. Electr. 7. p. 545. 1896; Beibl. **20.** p. 717. 1896.

3) J. A. Thomson, Cambr. Proc. **12.** p. 312. 1904; Beibl. **28.** p. 740. 1904.

bekommt dieses einen kräftigen Stoß, mag die Schwingungsdauer des Elektrons groß oder klein sein. Es nehmen somit alle Ionen an der Absorption teil und nicht nur einzelne Gruppen wie bei den anderen Strahlen.

Wie erklärt sich aber dann das große Durchdringungsvermögen der Strahlen? Offenbar nur dadurch, daß die Röntgenstrahlen eine sehr viel größere Energie mitführen als die anderen Strahlen. Sie können also schon eine beträchtliche Absorption erleiden und trotzdem noch stark genug sein, um wahrgenommen zu werden.

Die Absorption von Strahlen größerer Impulslänge — die in der Regel nur wenig Energie mitführen, weil sie aus Kathodenstrahlen entstehen, die nur verhältnismäßig geringe Geschwindigkeit haben — wird nichts anderes zur Folge haben, als daß die Elektronen zu heftigeren Schwingungen veranlaßt werden. Dies kann sich in der Ausstrahlung von Licht oder ultravioletten Strahlen bemerkbar machen.

Ist der Impuls dünner, so kann er bei einer gewissen Größe soviel Energie abgeben als Arbeit nötig ist, um den Atomverband zu zertrümmern. Es entstehen freie positive und negative Ionen. Der Vorgang heißt Ionisation.

Ist die abgegebene Energiemenge noch größer, so ist ein Überschuß vorhanden, der dann dazu verwandt wird, dem befreiten Elektron eine gewisse Geschwindigkeit zu erteilen. An der Oberfläche des getroffenen Körpers kann dies zur Ausstrahlung von Elektronen führen, zu Kathodenstrahlen in weiterem Sinne. Die ins Innere eindringenden Strahlen können die Entstehung neuer Strahlen dadurch bewirken, daß die bei der Befreiung mit großer Geschwindigkeit versehenen Elektronen auf Moleküle treffen und so Induktionsstöße hervorrufen. Jedenfalls werden die ausgestrahlten Elektronen nur zum geringeren Teil aus dem Innern kommen. Damit ließe sich erklären, daß in der Sekundärstrahlung sehr weiche Röntgenstrahlen und Strahlen vorkommen, die elektrische Ladung mit sich führen. Berücksichtigt man, daß die negativen Elektronen eine sehr viel kleinere Masse haben als die positiven Ionen, so muß nach dem Vorausgegangenen als sicher angesehen werden, daß mehr negative als positive Ionen ausgesandt werden. Das Vorhandensein negativer Elektronen in

der Sekundärstrahlung weist notwendig darauf hin. Wird also ein Überschuß von negativen Elektronen ausgesandt — es kann sich nur um einen Überschuß handeln, da hier im Gegensatz zu den ultravioletten Strahlen auch eine Zerstreuung positiver Ladung bemerkt worden ist —, so wird eine isolierte Platte notwendig ein positives Potential zeigen müssen.

2. Erste Beobachtungen.

Eine positive Ladung fand ich zufällig. Die Röntgenröhre befand sich in einem Bleikasten, dessen Öffnung nicht, wie sonst wohl stets üblich, mit Aluminiumfolie verschlossen war, sondern die Strahlen traten frei durch die Öffnung aus. Isolierte Metallplatten zeigten bestrahlt stets positive Ladung und bedeutendes Potential. Eine Änderung trat nur ein, wenn den Strahlen kein freier Austritt gestattet wurde. Wenn also der Verschluß der Öffnung, durch die die Strahlen austraten, einen Einfluß auf die Ladung der Platte ausübte, so war das zunächst liegendste, an eine elektrostatische Wirkung zu denken. Ist der Kasten nicht vollständig geschlossen, so ist die Möglichkeit vorhanden, daß eine Ladung im Innern influenzierend auf eine Metallplatte außen wirkt.

Es wäre denkbar, daß durch eine unsymmetrische Stellung der Platte zu den beiden Elektroden der Röhre der influenzierende Einfluß eines Poles den des anderen überwiegt. Ich habe jedoch überhaupt keinen influenzierenden Einfluß bemerkt, wenn ich eine große Metallscheibe an die Stelle der Röhre brachte, sie mit dem einen Pol des Induktoriums verband und Funken von dem anderen auf die Platte springen ließ. Eine andere Möglichkeit wäre die, daß die Kathodenstrahlen, die nicht auf die Antikathode auftreffen, eine negative Ladung der Glaswand bewirkten. Abgesehen davon, daß sich dann negative Ladung im Galvanometer oder Elektrometer bemerkbar machen müßte, war auch kein Einfluß zu konstatieren, wenn die Platte, die an Stelle der Röhre gebracht wurde, mit einer Influenzmaschine geladen wurde. Wurde die Öffnung, aus der die Strahlen austraten, mit einer Glasplatte verschlossen, so wurde die Ladung schwächer, sie verschwand nahezu ganz, als das Glas eine Dicke von 1—2 cm erreicht hatte.

Es spricht also alles dafür, daß es sich um ein von den Strahlen selbst hervorgerufenes Potential handelt. Daß dies theoretisch möglich ist, habe ich schon oben erörtert. Auch bei den lichtelektrischen Erscheinungen handelt es sich um Ausstrahlung von Elektronen. Der Unterschied ist nur der, daß sich hier Resonanzwirkung bemerkbar macht und daher reine Oberfläche und bestimmte Metalle erforderlich sind, um eine Wirkung zu zeigen, während bei den Röntgenstrahlen alle Körper eine Beeinflussung erfahren müssen, die zudem infolge der größeren Energie, die sie mitführen, eine intensivere sein muß.

3. Wirkung der Sekundärstrahlen.

Nach obigen Ausführungen muß die Ausstrahlung der Elektronen zum weitaus größten Teil an der Oberfläche stattfinden. Treffen die Strahlen auf eine Metallplatte, so werden sie absorbiert. Sie werden um so mehr durchgelassen, je geringer die Dicke der Platte ist. Wenn aber die Strahlen an der Rückseite austreten, so ist es möglich, daß auch hier Elektronen ausgesandt werden. Dies muß eintreten, wenn die Strahlen nur so wenig geschwächt werden, daß sie noch genügend Energie mitführen, um Elektronen auszusenden.

Betrachten wir nun die Wirkung eines sehr dünnen Aluminiumscheibchens, wie es als Verschluß der Öffnung des Bleikastens gewöhnlich verwandt wird. Es hat den Zweck, die Strahlen zu filtrieren, d. h. einheitlicher zu gestalten und soll zugleich elektrische Einflüsse abschirmen. Eine solche Folie ist fast stets benutzt worden und gerade ihre Anwesenheit scheint mir die Ursache davon zu sein, daß über die ladende Wirkung der Röntgenstrahlen so widersprechende Ansichten herrschen. Die Folie sendet, wenn sie von den Strahlen durchsetzt wird, *nach beiden Seiten* Sekundärstrahlen und insbesondere Kathodenstrahlen aus. Die Aussendung der Kathodenstrahlen ist, da die Folie abgeleitet ist, nicht durch elektrostatische Anziehung der zurückbleibenden positiven Ladung gehemmt. Sie ist sehr intensiv, da die Folie nur wenig von der Röhre entfernt ist. Steht nun hinter der Folie die zu ladende Platte, so wird die Wirkung der Strahlen noch

geringer sein, als an der Rückseite der Folie, denn die Wirkung nimmt natürlich mit der Entfernung ab. Zwischen Folie und Platte befinden sich sehr viele negative Elektronen. Diese werden nun 1. auf die Platte zum Teil auftreffen, 2. infolge des elektrischen Feldes der Ausstrahlung von Elektronen entgegenwirken und 3. infolge der Anziehung die positive Elektrizität in der Platte zurückhalten, so daß das Potential, elektrometrisch gemessen, kleiner erscheint. Diese Umstände können die Ladung so beeinflussen, daß sogar negative Ladung auf der Platte entsteht. Jedenfalls hängt dies wesentlich von der Entfernung der Folie von der Röhre und der zu ladenden Platte ab, in zweiter Linie von den Größenverhältnissen von Platte und Folie. Eine dicke Verschlußplatte kann die Energie leicht so sehr schwächen, daß die ladende Wirkung vollständig verschwindet.

Die Richtigkeit dieser Ansicht habe ich experimentell nachweisen können. Ich habe die Öffnung des Bleikastens, in dem sich die Röhre befand, mit einer sehr dünnen Aluminiumfolie verschlossen und in geringer Entfernung davon (ca. 5 cm) eine Aluminiumplatte gebracht. Es ergab sich eine geringe negative Ladung. Mit zunehmender Entfernung verschwand die Ladung der Platte, um schließlich in eine geringe positive Ladung überzugehen.

Der zweite Beweis ergab sich aus folgendem Versuch. Die Öffnung des Bleikastens konnte durch verschiedene Gitter verschlossen werden. Sie betrug 12×12 cm. In variablem Abstand von dem Gitter befand sich eine Metallplatte, die durch das Gitter hindurch bestrahlt wurde, und deren Ladung durch ein d'Arsonvalgalvanometer beobachtet wurde. Das Gitter war geerdet. Tab. 1 zeigt, wie die Ausschläge und damit auch, wie die Ladung bei den dichteren Gittern zurückgeht. Die Verringerung des Ausschlages ist auffallend. Die Verringerung der Intensität der Strahlen durch die Absorption des Gitters ist bei 0,1 mm Drahtdicke zu vernachlässigen. Eine elektrostatische Wirkung ist, wie oben erwähnt, ausgeschlossen. Die Ausschläge schwanken vielfach, doch ist dies bei den Stromschwankungen der Röhre nicht anders zu erwarten. Die Kontrolle am Schluß zeigt, daß es wohl erlaubt ist, aus der Tabelle den Schluß zu ziehen, daß durch die Sekundär-

strahlen die Ladung eines Metalles gehemmt, das Potential erniedrigt wird.

Tabelle 1.

Entfernung vom Gitter	5	10	15	25	40 cm
Ohne Gitter	32,0	19,1	14,2	7,0	2,5
Gitter aus versilbertem Draht, 0,1 mm dick, 1,5 cm Maschenweite	12,0	4,0	2,5	1,0	0,8
Dasselbe doppelt	6,8	2,0	1,0	0,8	—
Gitter aus dickem, verzinktem Eisendraht ca. 1,5 cm	4,7	1,5	0,7	0,3	—
Dasselbe doppelt	1,5	0,5	—	—	—
Gitter aus Eisendraht 1 cm	1,5	0,8	0,5	0,2	—
Gitter aus versilbertem Draht, wie oben 1,5 cm	13,0	6,0	2,2	1,0	0,5
Dasselbe, 2,5 cm	15,0	8,5	5,5	3,0	1,5
Dasselbe, 4 cm	16,3	8,0	4,5	2,3	1,5
Ohne Gitter	27,0	20,0	12,5	6,5	3,7

Mit Abschluß dieser Versuche schien mir bewiesen, daß jede Metallplatte, die von Röntgenstrahlen so getroffen wird, daß sie nur wenig Sekundärstrahlen ausgesetzt ist, eine positive Ladung annimmt. Damit habe ich die ladende Wirkung der Röntgenstrahlen konstatiert, die Righi[1]) schon behauptet hat, die ihnen aber von allen anderen Seiten abgestritten worden ist. Eine solche Wirkung war auch nach der sonstigen Übereinstimmung mit den ultravioletten Strahlen zu erwarten. Der einzige Unterschied mußte darin bestehen, daß die Wirkung der Röntgenstrahlen intensiver und nicht auswählend ist.

Ich stellte mir nun die weitere Aufgabe, die ladende Wirkung der Röntgenstrahlen eingehender zu untersuchen. Natürlich konnte ich nicht darauf abzielen, die Größe der Ladung genau zu bestimmen, denn je nach den Bedingungen schwankt das Potential einer Metallplatte zwischen Null und

1) A. Righi, l. c.

einigen 100 Volt. Aber eine Untersuchung des Einflusses der Dicke, der Größe, des Materials, der Oberflächenbeschaffenheit der Platten, der Dauer der Bestrahlung, der Entfernung, der Art der Strahlen etc. hielt ich für lohnend, besonders nachdem ich zur Ansicht gekommen war, daß nur die Sekundärstrahlen die Ursache für die widersprechenden Arbeiten über die ladende Wirkung gewesen sind. Bei der Versuchsanordnung war also vor allen Dingen dafür zu sorgen, daß in der Strahlrichtung alles ferngehalten wurde, was Sekundärstrahlen aussenden konnte.

II. Versuchsanordnung.

Bei den Versuchen wurden verschiedene Röhren benutzt. Zumeist war eine mittelharte Röhre in Tätigkeit, bei der die Funkennebenstrecke zwischen Kugeln von 1 cm Radius 3,0 cm betrug. Sie wurde von einem Induktorium gespeist, das bei 36 Volt Spannung seine maximale Schlagweite von 30 cm erreichte. Ich arbeitete gewöhnlich mit 20 Volt Spannung (ca.

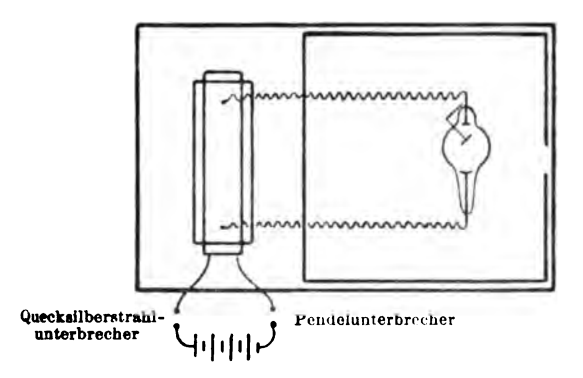


Fig. 1.

3 Amp. Primärstromstärke). Als Unterbrecher diente ein Quecksilberstrahlunterbrecher. Das Induktorium war mit einem Drahtnetz umgeben. Die Röhre befand sich in einem Holzkasten, der außen mit 2 mm dicken Bleiblech umgeben war. Es ist wohl erlaubt, anzunehmen, daß auf der Rückseite dieses Bleches keine Ausstrahlung mehr stattfindet. In der vorderen Wand befand sich eine Öffnung 4 cm breit, 8 cm hoch. Durch

sie traten die Strahlen aus. Alle Hüllen waren zur Erd
geleitet.

Es war außerordentlich wichtig, die Ausstrahlung
Röhre möglichst konstant zu erhalten, denn es ist ja bel
daß das Vakuum einer Röhre mit dem Gebrauch höher
was eine Veränderung der Strahlen nach sich zieht. Ich s
diese Gefahr dadurch abzuwenden, daß ich eine ganz
Bestrahlungsdauer wählte, die durch einen Pendelunterbı
reguliert wurde.

Vor der Öffnung des Kastens befand sich (meist in
Entfernung von 30 cm) die zu bestrahlende Platte. Wie
anders zu erwarten war, blieb die Strahlung bei den ein:
Stromdurchgängen nicht stets dieselbe. Die Ladung schw
in demselben Verhältnis wie der Strom. Um nicht gezw
zu sein, aus sehr vielen, wenig übereinstimmenden Mess
Mittelwerte zu bilden, führte ich noch eine zweite, eine
gleichsplatte ein. Die beiden Platten waren von un
gleicher Größe. Sie waren übereinander in ca. 2 cm Al
voneinander symmetrisch zur Röhre angeordnet. Sie w
beide zugleich bestrahlt, ihre Potentiale gemessen und
Verhältnis gebildet, das unabhängig von den Stromsc
kungen sein mußte.

An einem Rahmen aus Eichenholz (40 cm hoch,
breit) befanden sich vier Ansätze von je 15 cm Läng
zwar waren zwei auf
Seite so eingesetzt, d:
einen gegenseitigen Al
von 8 cm besaßen. I
Mitte des Rahmens
so ein freier Raum
20 × 40 cm. An den
der vier Stäbe befan
je ein kleiner Ambroit-
stein) Ansatz, in den
Messingschraube einge
war. An diese Schı
konnten Metallplatten

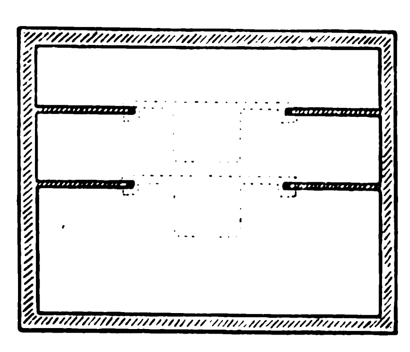


Fig. 2.

schraubt werden, von einer Form, wie sie in Fig. 2 abgebil
Die Platten waren auf diese Weise sehr gut isoliert. Alle

teile waren mit Stanniol umwickelt und zur Erde abgeleitet. Der Apparat wurde so aufgestellt, daß nur der mittlere Teil, an dem sich die eigentlichen Platten befanden, direkt getroffen wurde. So wurde die Sekundärstrahlung, soweit es möglich war, vermieden. Es zeigte sich, daß die Röntgenstrahlen nicht nur von der Antikathode ausgingen, sondern auch von der Glaswand der Röhre kamen. Allerdings übertraf die Wirkung der ersteren die der letzteren bei weitem. Das Potential der Platten wurde nur zu Anfang galvanometrisch, später elektrometrisch gemessen.

Bei galvanometrischer Beobachtung war die Leitfähigkeit der ionisierten Luft gegen die Leitfähigkeit (bez. Widerstand) des Galvanometers zu vernachlässigen. Bei elektrometrischer Messung dagegen konnte sich ein Einfluß bemerkbar machen. Der Ladungsverlust ist proportional dem Potential. Um diesen Verlust zu verringern, schaltete ich zu jeder Metallplatte noch einen Kondensator von 275 cm Kapazität. Es hatte sich nämlich ergeben, daß die Strahlen auf den getroffenen Metallplatten nicht stets ein bestimmtes Potential, sondern ungefähr die gleiche Elektrizitätsmenge erzeugten. Versuche mit Kondensatoren, deren Kapazitäten zwischen 430 und 10 cm schwankten, hatten gezeigt, daß zwar das Produkt $C.V$ mit zunehmendem Potential abnahm — dies ist dem Einfluß der ionisierten Luft zuzuschreiben —, daß aber das Potential in ganz auffallender Weise mit der Abnahme der Kapazität wuchs. In einem Falle stieg das Potential von ca. 0,6 Volt bei 430 cm Kapazität auf ca. 16 Volt bei 10 cm Kapazität. Um die Ladungsverluste möglichst gering zu machen, benutzte ich zu allen Messungen einen Kondensator von 275 cm Kapazität.

Ich untersuchte nun den Einfluß der ionisierten Luft nach Schluß der Bestrahlung. Eine Metallplatte war mit dem Kondensator und dieser mit einem Quadrantenpaar des Elektrometers verbunden. Ich bestrahlte die Platte und hob die Verbindung zwischen Platte und Kondensator nach verschiedenen Zeiten auf. Wie aus der Tab. 2 hervorgeht, nimmt die Ladung nicht nur nicht ab, sondern sogar zu. Es erklärt sich dies daraus, daß die in den Raum hinaus geschleuderten Elektronen eine gewisse positive Elektrizitätsmenge in den Platten zurückhalten. Diese fließt aber nach dem Konden-

sator und Elektrometer allmählich ab, wenn die Elektronen allmählich an den Metallen der Umgebung verschwinden. Die Bestrahlungsdauer betrug 1 Sek. Die Abnahme des Ausschlages gegen Ende erklärt sich aus der Ermüdung der Röhre.

Tabelle 2.

Unterbrochen nach Schluß der Bestrahlung	Ausschlag
Sofort	194 Skt.
"	191 "
1/2 Sekunde später	200 "
1 Sekunde später	219 "
Sofort	188 "
"	186 "
3 Sekunden später	213 "
Sofort	183 "
1 Sekunde später	196 "
Nicht unterbrochen	203 "

Diese Ergebnisse veranlaßten mich, bei Bestrahlungen, die länger als 1 Sek. dauerten, die Verbindung zwischen Platte und Elektrometer sofort nach Schluß der Bestrahlung aufzu-

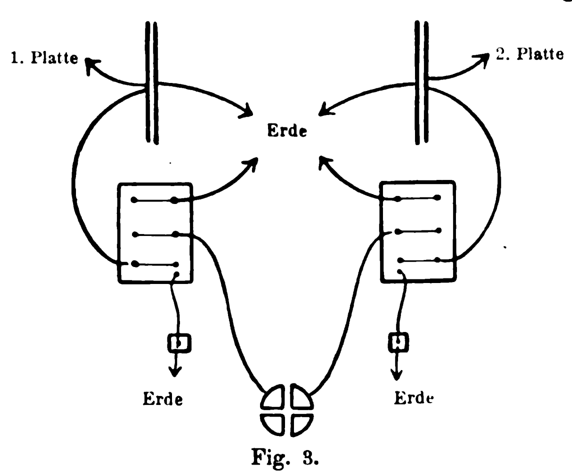


Fig. 3.

heben. Dies wurde dadurch erreicht, daß der Pendelunterbrecher, der aus einem Stift bestand, der in Quecksilber tauchte, verdreifacht wurde, d. h. es wurden drei isolierte

Stifte angefertigt, die in drei isolierte Quecksilbernäpfe tauchten. So wurde Stromschluß und die Verbindung von Platten mit Kondensatoren und Elektrometer zu gleicher Zeit hergestellt. Die beiden Kondensatoren standen ihrerseits mit je einer Wippe in Verbindung, die ermöglichte, den Kondensator mit einem Quadrantenpaar zu verbinden oder das Quadrantenpaar zur Erde abzuleiten. Ein dritter Kontakt ermöglichte die Erdung des Kondensators. Kondensatoren und Wippen waren in einem Holzkasten aufgestellt, in dem sich Chlorcalcium befand. Die Wippen konnten durch Schnuren und Federn von außen umgelegt werden. Auf diese Weise war alles vorzüglich isoliert. Die Ausschläge des Elektrometers wurden auf einer 2,50 m entfernten Skala mit Fernrohr abgelesen. Die Nadel des Elektrometers war meist auf 30 Volt durch eine Akkumulatorenbatterie geladen.

Die Beobachtungen geschahen in folgender Weise. Die Kondensatoren wurden mit den Quadrantenpaaren verbunden. Die Kapazität betrug zusammen ca. 320 cm. Dann wurde der Pendelunterbrecher geschlossen und damit die Röhre in Tätigkeit versetzt. Gleichzeitig damit war die Verbindung zwischen Platten und Kondensatoren hergestellt. Es waren also Platte, Kondensator und Quadrantenpaar miteinander verbunden. Sie luden sich während der Bestrahlung auf. Mit dem Öffnen des Pendelunterbrechers wurde auch die Verbindung zwischen Platte und Kondensator wieder aufgehoben. Das Elektrometer zeigte dann zuerst den Differenzausschlag der beiden Platten $V_1 - V_2$. Durch Zurücklegen der einen Wippe, nämlich der von V_1, wurde das eine Quadrantenpaar geerdet und V_2 das Potential der Vergleichsplatte allein gemessen. Der Quotient $V_1 - V_2 / V_2$ oder auch V_1 / V_2 muß unabhängig von den Schwankungen der Strahlung sein, aber charakteristisch für den Unterschied der Potentiale der beiden Platten bleiben.

III. Einfluß der ionisierten Luft.

Über den Einfluß der ionisierten Luft habe ich mich schon oben verbreitet. Es geht aus den Versuchen hervor, daß die Wirkung der ionisierten Luft, soweit sie in der Fortführung elektrischer Ladung besteht, sich bei höheren Poten-

tialen stark, bei geringeren ca. 1 Volt, aber nur wenig bemerkbar macht. Ich habe davon abgesehen, den Einfluß ganz zu eliminieren, was z. B. dadurch möglich gewesen wäre, daß man die Abhängigkeit von V_1/V_2 für verschiedene Kondensatoren untersucht. Die Korrektionen, die an und für sich gering sind, sind bei der Vergleichsmethode ganz ohne Einfluß. Versuche im Vakuum habe ich nicht angestellt, weil es nicht ausgeschlossen war, daß das Resultat durch Sekundärstrahlen beeinflußt wird, die von den Wänden des Gefäßes ausgehen. Meine Aufgabe ist aber die, *die Abhängigkeit der ladenden Wirkung der Röntgenstrahlen zu untersuchen, wenn möglichst wenig Sekundärstrahlen die Ladung beeinflussen können.*

Ein anderer Einfluß der ionisierten Luft ist von viel größerer Bedeutung. Da die ionisierte Luft freie positive und negative Ionen enthält, so gleicht sie einem Elektrolyten. In ihr kann, wie von verschiedenen Seiten festgestellt worden ist, eine Potentialdifferenz zwischen verschiedenen Metallen entstehen. Man könnte nun auf den Gedanken kommen, in dieser Wirkung der Luft allein den Grund der positiven Ladung zu suchen, da selbst in dem Falle, daß nur *ein* Metall bestrahlt wird, der Bleischirm, der die Röhre einhüllt, als zweites Metall wirken könnte.

Dies ist aber ausgeschlossen, denn 1. müßte dann z. B. Zink negative und Kupfer positive Ladung zeigen, 2. wäre nicht anzunehmen, daß sich Platten auf ein höheres Potential als ca. 2 Volt laden würden, tatsächlich habe ich Potentiale von 10, 20, ja etlichen 100 Volt beobachtet, 3. dürfte ein Kondensator keine Erniedrigung des Potentiales bewirken, 4. müßten verschieden große Metallplatten nahezu gleiches Potential erhalten etc.

Schwierig ist aber die Frage, ob die Differentialmethode noch bei Metallen verschiedener Art verwendet werden darf. Von Arbeiten über die Potentialdifferenz der Metalle in ionisierten Gasen will ich die von Winkelmann[1]), Hillers[2]) und von Hofmann und Exner[3]) erwähnen. Erstere haben

---

1) A. Winkelmann, Wied. Ann. **66.** p. 1. 1898.
2) W. Hillers, Wied. Ann. **68.** p. 196. 1899.
3) K. A. Hofmann u. F. Exner, Boltzmann-Festschrift 1904. p. 600.

Röntgenstrahlen, letztere Radium- und Poloniumstrahlen als Ionisatoren benutzt.

Winkelmann glaubt aus seinen Versuchen schließen zu müssen, daß es sich nicht um eine Wirkung handle, die direkt durch die Strahlen hervorgerufen wird, sondern um eine Entladung der Ionen der Luft an den Metalloberflächen, also nicht eine Wirkung der Strahlen, sondern des Gases. Es ist aber noch lange nicht bewiesen, daß dies die einzige Bedingung ist. Es wäre sehr gut denkbar, daß Sekundärstrahlen ebenfalls diese Differenz bewirken könnten. Man wird in der Vermutung, daß die Sekundärstrahlen auch eine Rolle dabei spielen, noch bestärkt, wenn man berücksichtigt, daß die Resultate Winkelmanns, soweit die Potentialdifferenz in Betracht kommt, noch Fehler aufweisen, die nur schwer durch Oberflächenbeschaffenheit allein zu erklären sind.

Die Scheiben, d. h. die Metalle, die zuerst getroffen werden, zeigen, wie aus seiner Tab. 1 hervorgeht, die Neigung, sich positiv zu laden, was entschieden für eine direkte Wirkung der Strahlen spricht. Ferner ist sehr befremdend, daß die Metalle nur äußerst geringe Differenzen zeigen, wenn sie beide isoliert sind. Nimmt man hinzu, daß Hillers, der die Arbeit Winkelmanns fortgesetzt hat, indem er die Potentialdifferenzen in verschiedenen Gasen bei verschiedenem Druck maß, selbst sagt, daß an manchen Tagen die Messungen aus unbekannten Gründen so große Schwankungen zeigten, daß eine Beobachtung nicht möglich war, so muß man wohl zu dem Schlusse kommen, daß noch ein zweiter wesentlicher Umstand die Potentialdifferenz beeinflussen muß. Für einen solchen halte ich die ladende Wirkung. Sehr beträchtlich wird sie bei Winkelmanns Anordnung, nachdem die Strahlen ein Kupfer- und ein Aluminiumblech durchdrungen haben, nicht sein, für ihr Vorhandensein spricht aber, daß bei *gleichen* Metallen, das zuerst getroffene Metall positive, das zweite Metall negative Ladung zeigt. Auch Exner und Hofmann, die mit Radiumstrahlen arbeiten, konstatieren eine Potentialdifferenz, die z. B. für Cu—Zn 0,78 Volt beträgt.

Wenn also zwei Umstände die Potentialdifferenz beeinflussen, so erhebt sich die schwierige Frage, welcher Teil von der ionisierten Luft und welcher von der Strahlung direkt

verursacht wird. Sollte es daher nicht vorteilhafter erscheinen, die Differentialmethode ganz fallen zu lassen? Wenn aber ein Metall allein bestrahlt wird, so kann jederzeit das Blei des Kastens, in dem sich die Röhre befindet, das zweite Metall liefern, und andererseits liefert die Differentialmethode Werte, die von den Schwankungen der Röhre unabhängig sind. Beide Umstände bestimmten mich, meist der Differentialmethode den Vorzug zu geben.

Da Winkelmann die Abweichungen mit verschiedener Oberflächenbeschaffenheit erklärt hat, hielt ich es für notwendig, zuerst die Abhängigkeit der Ladung von allgemeinen Bedingungen, wie Entfernung, Oberfläche und Dicke der Platten zu prüfen. Hier ist die Differentialmethode deshalb einwandsfrei, weil die Untersuchungen an Metallen derselben Art vorgenommen werden.

IV. Gleichartige Metalle.

1. Entfernung.

Da es sich um eine Wirkung von Strahlen handelt, so sollte ohne weiteres das Gesetz der Abnahme indirekt proportional dem Quadrat der Entfernung gelten. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß durch den Bleischirm oder andere Leiter in der Nähe oder durch andere Umstände Komplikationen hervorgerufen werden.

Eine Untersuchung ergab folgendes: Eine Zinkplatte wurde $^1/_{10}$ Sek. lang bestrahlt und zeigte dann in 15,3 cm Entfernung von dem Bleischirm eine Ladung von 1,82 Volt (2378 Skt. Ausschlag). In 29,5 cm Entfernung ergab sich 0,85 Volt (= 1112 Skt.). Diese Werte sind als Mittelwerte aus je 10 Messungen gewonnen. Es wurde keine Vergleichsplatte angewendet, weil dies eine peinlich genaue Einstellung symmetrisch zur Röhre erfordert hätte, und ein etwa daraus entspringender Fehler unkontrollierbar gewesen wäre. Wenn das Gesetz gelten sollte, so mußte sich aus diesen Zahlen die Entfernung der Röhre hinter dem Bleischirm berechnen lassen. Es ergab sich eine Entfernung von 15,4 cm. In Wahrheit war die Antikathode 15 cm entfernt.

Bei einer Bestrahlungsdauer von 0,03 Sek. wurde das

Gesetz für eine geringere Entfernung geprüft. Es betrug das Potential in

5,5 cm	Entfernung	1,86 Volt	oder	2432 Skt.
10,8 „	„	0,91 „	„	1193 „
22,0 „	„	0,38 „	„	520 „

Addiert man zu der Entfernung den Abstand der Röhre hinter dem Schirm, so müßten für diese Abstände Vd^2 konstant sein, wenn das Gesetz gelten sollte. Es ergibt sich

Tabelle 3

d	V	Vd^2
20,5	1,86	781
25,8	0,91	605
37,0	0,38	518

Eine Übereinstimmung ist hier nicht vorhanden, die Werte kommen aber einander näher, je größer der Abstand ist.

Es ergibt sich also, daß das Gesetz der Abnahme der Wirkung indirekt proportional dem Quadrat der Entfernung gültig ist von einer Entfernung von 15 cm vom Bleischirm. In geringerer Entfernung macht sich entweder der Umstand bemerkbar, daß die Strahlenquelle nicht punktförmig ist, daß sogar Strahlen von der Glaswand ausgehen, oder auch ein Einfluß des Bleischirmes insofern, als der Weg der Elektronen dann nur kurz ist bis zum Schirm, infolgedessen weniger freie Elektronen in der Luft vorhanden sind, und somit die positive Ladung in geringerem Maße zurückgehalten wird. Die Ladung erscheint dann größer.

2. Oberflächenbeschaffenheit.

Da die Ladung der Platten durch Abschleudern der Elektronen von der Oberfläche bewirkt wird, so ist zu erwarten, daß die Oberflächenbeschaffenheit einen gewissen Einfluß ausübt. Ich habe eine Untersuchung bei Zink durchgeführt. Als Vergleichsplatte wurde eine Zinkplatte gewählt, die jedesmal fein abgeschmirgelt und mit Alkohol abgewaschen war. Innerhalb der Versuchsreihe wurden die Platten zweimal in ihrer Stellung vertauscht, damit nicht ein Fehler infolge

unsymmetrischer Stellung entstünde. Die Bestrahlungsdauer betrug 1 Sek. Ich gebe in nachstehender Tab. 4 Beobachtungen bei fein geschmirgeltem Zink gegen grob geschmirgeltes Zink. Die Zahlen bedeuten Skalenteile, das ihnen entsprechende Potential schwankt zwischen 0,8 und 1,1 Volt bei einer Entfernung von 30 cm vom Bleischirm.

Tabelle 4.

V_1	V_2	$V_1 - V_2$	
1043	1018	25	$V_1 = 1,024\ V_2$
1200	1206	−6	„ = 0,995 „
1182	1182	0	„ = 1,000 „
1040	1012	28	„ = 1,028 „
1100	1103	−3	„ = 0,997 „
1164	1152	12	„ = 1,010 „
1137	1112	25	„ = 1,023 „
Stellung der Platten gewechselt			$V_1 = 1,011\ V_2$
1172	1155	22	$V_1 = 1,020\ V_2$
1250	1218	32	„ = 1,026 „
1118	1098	20	„ = 1,018 „
1068	1050	18	„ = 1,017 „
Stellung der Platten gewechselt			$V_1 = 1,020\ V_2$
1242	1232	10	$V_1 = 1,008\ V_2$
1148	1132	16	„ = 1,014 „
1212	1200	12	„ = 1,010 „
1132	1122	10	„ = 1,009 „
			$V_1 = 1,010\ V_2$

Da die Übereinstimmung der Messungen nicht sehr groß ist, mußte aus mehreren Werten das Mittel genommen werden. Als Mittelwert ergibt sich $V_1 = 1,015\ V_2$, d. h. grob geschmirgeltes Zink liefert ein um 1,5 Proz. höheres Potential als fein geschmirgeltes.

In derselben Weise wurden andere Oberflächen untersucht. Es ergab sich:

Grobes Zn liefert . . .	1,5	Proz.	mehr	als	fein	geschmirgeltes	Zn
oxydiertes Zn liefert . .	3,5	„	„	„	„	„	„
etwas amalg. Zn liefert .	0,6	„	„	„	„	„	„
stark amalg. Zn liefert .	2,2	„	„	„	„	„	„

Die Erklärung dafür, daß fein geschmirgeltes Zink stets ein kleineres Potential zeigt, ist darin zu suchen, daß die Unebenheiten der Oberfläche die Ausstrahlung von Elektronen begünstigen können.

Um die Wirkung eines Isolators auf der Oberfläche kennen zu lernen, überzog ich die eine von zwei ganz gleichen Zinkplatten mit einer feinen Schicht Paraffin. Die Untersuchung wurde genau wie vorher vorgenommen. Sie ergab folgendes Resultat.

Tabelle 5.

V_1	V_2	$V_1 - V_2$	
1120	1220	−100	$V_1 = 0{,}918\ V_2$
1078	1200	−122	„ = 0,900 „
1228	1370	−147	„ = 0,893 „
	Platten umgewechselt		
1100	1208	−108	$V_1 = 0{,}910\ V_2$
1060	1220	−160	„ = 0,869 „
1130	1293	−163	„ = 0,874 „
	Platten umgewechselt		
1020	1220	−200	$V_1 = 0{,}836\ V_2$
1090	1290	−200	„ = 0,845 „
	nach 30 Minuten		
1113	1310	−197	$V_1 = 0{,}850\ V_2$

An und für sich bewirkt die Paraffinschicht schon eine Erniedrigung des Potentials um ca. 10 Proz. Dann ist aber auch aus der Tabelle zu ersehen, wie die Differenz der Potentiale größer wird. Es kann dies einerseits daran liegen, daß die Leitfähigkeit des Paraffins mit der Dauer der Bestrahlung geringer wird. Dies hat schon Thomson konstatiert und ich habe mich selbst davon überzeugt, daß Paraffin eine geringe Leitfähigkeit beim Bestrahlen annimmt, und daß diese Leitfähigkeit bei wiederholten Bestrahlungen geringer wird. Die Abnahme der Leitfähigkeit des Paraffins könnte dann die Abnahme des Potentials bewirken. Mehr Wahrscheinlichkeit hat aber die Annahme für sich, daß Elektronen, die ins Paraffin eingedrungen sind, von diesem festgehalten werden und so einen Teil der positiven Ladung der Platten binden.

Dafür spricht auch die Tatsache, daß nach einer halben Stunde die Verhältnisse noch ganz genau dieselben sind, wie bei der vorhergehenden Bestrahlung. Daß wirklich Elektronen in das Paraffin eindringen und festgehalten werden, kann man schon daraus sehen, daß sich nach einigen Minuten noch ein negativer Influenzausschlag von mehreren Skalenteilen bemerkbar machte.

Ein weiterer Versuch wurde mit Schellack angestellt. Die eine Platte wurde mit einer äußerst feinen Schicht Schellack überzogen und in derselben Weise wie die vorige untersucht. Es ergab sich ein ähnliches Resultat. Das Verhältnis der Platten nahm nach zehn Bestrahlungen von $V_1 = 0{,}975\, V_2$ bis auf $V_1 = 0{,}953\, V_2$ ab.

Alle Versuche sind bei einer Bestrahlungsdauer von 1 Sek. vorgenommen worden. Es läßt sich annehmen, daß die Wirkung für eine andere Dauer dieselbe ist. Überraschen muß aber der äußerst geringe Einfluß, den bedeutende Unterschiede in der Oberflächenbeschaffenheit auf die Höhe des Potentials ausüben. Die Röntgenstrahlen stehen hierin in schroffem Gegensatz zu den ultravioletten Strahlen. Auf der einen Seite ist eine peinlich reine metallische Oberfläche erforderlich, auf der anderen ist es fast einerlei, ob eine dicke Oxydschicht vorhanden ist oder nicht, ja die Oxydschicht liefert noch ein höheres Potential als die metallische Oberfläche.

Nach diesen Resultaten scheint es mir noch unwahrscheinlicher zu sein, daß die Abweichungen in den Resultaten Winkelmanns allein durch Oberflächenbeschaffenheit zu erklären sind, zumal man annehmen muß, daß er die Oberfläche möglichst gleich gestaltet hat, um die Fehler auf ein Minimum zu verringern.

3. Dicke der Platten.

Ich habe oben auseinandergesetzt, daß bei dünnen Platten unter Umständen ein größeres Potential auftreten kann, indem auch auf der Rückseite eine Ausstrahlung von Elektronen durch die nur wenig geschwächten Strahlen veranlaßt wird. Dieser Einfluß der Dicke kann sich bei verschiedenen Metallen in verschiedenem Maße bemerkbar machen. Stark absorbierende Metalle, wie Blei und Platin, werden schon bei wesentlich geringerer Dicke die Strahlen so schwächen, daß eine Aus-

strahlung an der Rückseite verhindert wird, als z. B. Aluminium. Auch werden härtere Strahlen erst bei einer größeren Dicke so stark absorbiert werden, daß keine Elektronen mehr nach hinten ausgesandt werden. Vorversuche an Zink und Aluminium zeigten, daß bei Strahlen, wie sie die Röhre mit 3 cm Funkennebenstrecke zwischen Kugeln von 1 cm Radius lieferte, eine Dicke von 0,1 mm genügte, um die Ausstrahlung an der Rückseite zu verhindern.

Ich habe deshalb die Versuche nur bei Aluminium, dem am stärksten durchlässigen Metall für verschiedene Bestrahlungsdauern durchgeführt. Ich verglich drei Aluminiumscheiben von 0,007, 0,1 und 1,0 mm Dicke miteinander. Ein Vergleich zwischen einer einzigen Folie und mehreren Lagen derselben Folie konnte leider deshalb nicht ausgeführt werden, weil die einzelnen Schichten nicht fest aufeinander haften blieben. Es entstanden Fehler dadurch, daß Elektronen in die Zwischenräume der Folien ausgesandt wurden.

Die Versuche wurden jetzt insofern anders ausgeführt, als ich nicht mehr die Platten in ihrer Stellung vertauschte, sondern die drei zu untersuchenden Platten mit einer vierten verglich, die in ihrer Stellung verblieb. Als diese Vergleichsplatte hatte ich eine Aluminiumplatte gewählt von 2 mm Dicke. Die Oberflächen wurden fein abgeschmirgelt und mit Alkohol abgewaschen. Es ergaben sich folgende Mittelwerte.

Bei 0,03 Sek. Bestrahlungsdauer.

Platte:	0,007 mm	V_1 = 1,207 V_2
„	0,1 „	„ = 0,942 „
„	1,0 „	„ = 0,956 „

Bei 1 Sek. Bestrahlungsdauer.

Platte:	0,007 mm	V_1 = 1,059 V_2
„	0,1 „	„ = 0,955 „
„	1,0 „	„ = 0,950 „

Bei 3 Sek. Bestrahlungsdauer.

Platte:	0,007 mm	V_1 = 1,031 V_2
„	0,1 „	„ = 0,960 „
„	1,0 „	„ = 0,963 „

V_2 bedeutet dabei das Potential der Vergleichsplatte, die, wie auch aus den Verhältnissen $V_1 : V_2$ hervorgeht, etwas stärker bestrahlt wurde als die zu untersuchenden Platten.

Aus der Tabelle geht hervor, daß das Potential der ***dünnen Scheiben viel höher ist als das der Platten.*** Der Unterschied zwischen einer Dicke von 0,1 und 1,0 mm ist nur gering. Das Potential der Vergleichsplatte betrug bei

0,03 Sek.	0,08 Volt
1 „	0,93 „
3 „	2,45 „

Gleichzeitig zeigt die Tabelle, daß der ***Unterschied am größten*** ist bei einer ***kurzen Bestrahlungsdauer.*** Bei noch längerer Bestrahlungsdauer ergab sich, daß das Potential stets zunahm, bis es nach 15—20 Sek. einen einigermaßen konstanten Wert annahm und beibehielt. Auch blieb der Unterschied zwischen der Folie und der dicken Platte konstant, so daß er etwa bei einer Bestrahlungsdauer von 1 Min. ca. 10 Proz. betrug.

Die Folgerung, die ich oben gezogen hatte, hat sich also bestätigt. Aus dem Umstand, daß schon bei einer Dicke von 0,1 mm eine Ausstrahlung an der Rückseite verhindert wird, ergibt sich, daß die Absorption der Strahlen keineswegs so gering ist, wie man im allgemeinen geneigt ist anzunehmen. Eine starke Absorption ist zu erwarten, weil alle Ionengruppen an der Absorption teilnehmen.

V. Ungleichartige Metalle.

Solange Metalle gleicher Art untersucht werden, ist ein Einfluß der Luft, soweit die Erregung einer Potentialdifferenz in Betracht kommt, nicht zu befürchten. Es hat sich aber gezeigt, daß die ionisierte Luft die Fähigkeit hat, Potentialdifferenzen hervorzurufen. Ich komme nun zur Beantwortung der Frage, ob die Potentialdifferenz zweier Metalle, die von Röntgenstrahlen getroffen werden, allein dem Einfluß der Luft zuzuschreiben ist. Nach der Arbeit von Winkelmann, nach der ich mich zu allererst zu richten habe, weil sie am ausführlichsten ist, und weil Winkelmann als Ionisator ebenfalls Röntgenstrahlen benutzt, habe ich keine Differenz zu erwarten, wenn beide Platten isoliert sind. Andere Arbeiten sprechen aber dafür. Mir kommt es nun nicht darauf an, den Einfluß der Luft zu bestimmen, sondern darauf, zu erfahren, ob die Strahlung an und für sich schon imstande ist, eine verschiedene

Aufladung der bestrahlten Platten zu verursachen, und weiterhin zu untersuchen, welche Umstände das Potential beeinflussen.

Um überhaupt einen Begriff von dem Potentialunterschied, der auftritt, zu bekommen, habe ich Metallplatten von einer Größe 6,2 × 7,5 cm in einer Entfernung von 30 cm von dem Bleischirm bestrahlt. Die Versuche wurden in der oben beschriebenen Versuchsanordnung ausgeführt. Die zu untersuchenden Metalle waren von oben angegebener Form, genau gleicher Größe und möglichst gleicher Oberflächenbeschaffenheit. Sie wurden vor der Bestrahlung abgeschmirgelt und mit Alkohol abgewaschen. Vergleichsplatte war eine Aluminiumplatte von ungefähr gleicher Größe. Aus je zehn Messungen wurde ein Mittelwert gebildet. V_1 bedeutet das Potential des zu untersuchenden Metalles, V_2 das des Vergleichsmetalles. Es ergaben sich folgende Resultate (Tab. 6—10).

Tabelle 6.

Bei einer Bestrahlungsdauer von 0,02 Sek.

Metall	$\frac{V_1}{V_2}$	V_1 in Volt	V_2 in Volt
Cu	1,533	0,110	0,066
Fe	1,443	0,100	0,065
Neusilber	1,442	0,105	0,067
Messing	1,410	0,117	0,078
Pb	1,316	0,094	0,079
Al	1,076	0,082	0,075
Zn	0,945	0,090	0,083

Tabelle 7.

Bei einer Bestrahlungsdauer von 1 Sek.

Metall	$\frac{V_1}{V_2}$	V_1 in Volt	V_2 in Volt
Cu	1,244	1,01	0,80
Pb	1,228	1,04	0,84
Messing	1,209	1,03	0,85
Neusilber	1,182	0,94	0,79
Fe	1,181	1,01	0,84
Zn	1,099	0,96	0,87
Al	1,003	0,92	0,92

Tabelle 8.

Bei einer Bestrahlungsdauer von 3 Sek.

Metall	$\frac{V_1}{V_2}$	V_1 in Volt	V_2 in Volt
Cu	1,154	3,01	2,62
Pb	1,149	3,20	2,79
Neusilber	1,145	2,87	2,51
Messing	1,144	2,88	2,52
Fe	1,125	2,92	2,62
Zn	1,054	2,76	2,56
Al	1,002	2,57	2,57

Tabelle 9.

Bei einer Bestrahlungsdauer von 15 Sek.

Metall	$\frac{V_1}{V_2}$	V_1 in Volt	V_2 in Volt
Cu	1,140	5,68	5,00
Neusilber	1,118	5,82	5,66
Messing	1,117	5,57	5,28
Fe	1,114	5,93	5,63
Pb	1,092	5,82	5,56
Zn	1,025	5,02	4,96
Al	0,985	5,88	5,93

Tabelle 10.

Bei einer Bestrahlungsdauer von 60 Sek.

Metall	$\frac{V_1}{V_2}$	V_1 in Volt	V_2 in Volt
Cu	1,093	11,54	10,30
Fe	1,086	11,46	11,00
Pb	1,083	10,54	10,21
Zn	1,030	10,01	9,98
Al	0,960	12,18	12,48

Bei der letzten Tabelle sind Neusilber und Messing weggelassen worden, um die Röhre nicht zu sehr in Anspruch zu nehmen, um also ein zu starkes Hartwerden der Strahlen zu vermeiden. Bei den beiden letzten Tabellen wurden die Versuche symmetrisch ausgeführt, d. h. es wurde noch eine zweite Reihe von Bestrahlungen in umgekehrter Reihenfolge vorgenommen. Dadurch wurden die Werte nahezu unabhängig von einer Veränderung der Strahlung.

Im allgemeinen scheint die Voltasche Spannungsreihe für die Reihenfolge der Metalle maßgebend zu sein. Ausnahmen bilden in der ersten Tabelle Zink und in der zweiten und dritten Blei. Auch hier nahm das Potential nach einer Bestrahlungsdauer von 20—25 Sek. einen einigermaßen konstanten Wert an.

Dieses Resultat könnte nun zu dem Schlusse verleiten, daß doch die ionisierte Luft das allein ausschlaggebende ist. Ich habe deshalb einmal die Potentialdifferenz untersucht, wenn die direkte Strahlung vollständig vermieden wird. Es ist festgestellt worden, daß die Röntgenstrahlen, die durch einen Spalt fallen, zwar nicht gebeugt werden, daß aber trotzdem die Luft hinter dem Spalt überall ionisiert ist. Wenn ich also mit einem Bleischirm die Röntgenstrahlen so abblende, daß nur der Zwischenraum der Platten direkt von den Strahlen getroffen wird, so muß gleichwohl die Luft hinter dem Schirm überall ionisiert sein. Stellt sich nun eine Potentialdifferenz ein, so muß sie nur von der Luft herrühren oder wenigstens von der direkten Strahlung unabhängig sein. Bei den Versuchen ergab sich in der Tat eine Potentialdifferenz.

Verglichen mit den Resultaten der letzten Tabellen ergab sich eine Potentialdifferenz, die bei einer Bestrahlungsdauer von

$^1/_{50}$	Sek.	nur	$^1/_7$	der	Potentialdifferenz	ohne Schirm
1	„	„	$^1/_3$	„	„	„ „
3	„	„	$^1/_3$	„	„	„ „

betrug.

Bei diesen Versuchen waren die Platten genau so wie früher angeordnet. Ich führte nun noch eine zweite Versuchsreihe durch, bei der die Platten so angeordnet waren, daß ihre Flächen parallel mit der Richtung der Strahlen standen. Auch jetzt betrug die Potentialdifferenz im besten Falle nur die Hälfte, meist aber nur 0,4 der früheren.

Interessant war, daß auch jetzt die Platten eine positive Ladung angenommen hatten, die jedoch nur sehr gering war. Sie betrug im ersten Falle

	Cu	Zn
bei 0,02 Sek.	—	—
„ 1 „	0,06 Volt	0,03 Volt
„ 3 „	0,12 „	0,06 „

im zweiten Falle:

	Cu	Zn
bei 0,02 Sek.	0,03 Volt	0,01 Volt
„ 1 „	0,08 „	0,03 „
„ 3 „	0,14 „	0,05 „

Diese positive Ladung kann von Röntgenstrahlen herrühren, die nicht direkt von der Antikathode, sondern von der Glaswand der Röhre ausgehen.

Die Versuche lassen es also, ebenso wie die früheren Erörterungen, als sehr wahrscheinlich erscheinen, daß die ionisierte Luft nur einen Teil der Potentialdifferenz bewirkt.

Betrachten wir zunächst die Faktoren, die dabei in Betracht kommen können.

1. Die Ladung des Metalles hängt ab von der Härte der Strahlen. Je weicher die Strahlen sind, desto geringer ist die Ladung, und desto mehr kann sich der Einfluß der Luft bemerkbar machen. Als Beweis dafür, daß die harten Strahlen ein größeres Potential liefern, führe ich an, daß Strahlen von einer Röhre mit 1,1 cm Funkennebenstrecke zwischen Kugeln von 1 cm Radius auf einer Kupferplatte ein Potential von

0,32 Volt hervorriefen. In derselben Anordnung ergab eine Röhre von 3,0 cm Nebenschluß ein Potential von 0,81 Volt.

2. Es ist möglich, daß verschiedene Metalle die negativen Ionen verschieden stark zurückhalten. Wenn Kupfer sich in einem Elektrolyten nicht so stark negativ auflädt als Zink, so kann man auch sagen, Cu zeigt gegen die negativen Ionen eine geringere Verwandtschaft. Daraus könnte man nun schließen, daß Cu die negativen Ionen auch weniger stark zurückhält als Zink.

3. Da die Ausstrahlung der Elektronen hauptsächlich an der Oberfläche stattfinden wird, wird auch die Dichte der Oberfläche in Betracht kommen, denn je dichter diese ist, desto mehr Strahlen werden auf der Oberfläche absorbiert. Die Dichte der Oberfläche ist proportional der Dichte des Körpers.

4. Ferner kann die Masse der Moleküle einen Einfluß auf die Ausstrahlung ausüben. Es werden positive und negative Ionen ausgesandt. Je leichter nun die negativen Ionen im Vergleich zu den positiven sind, um so größer wird der Überschuß der ausgesandten negativen sein.

Unsere erste Versuchsreihe hat im allgemeinen die Voltasche Spannungsreihe geliefert. Es könnte also hier neben dem Einfluß der ionisierten Luft besonders Punkt 2 zur Geltung kommen. Ob Punkt 2 überhaupt sich geltend macht oder in welchem Maße er wirkt, ist nicht zu ersehen.

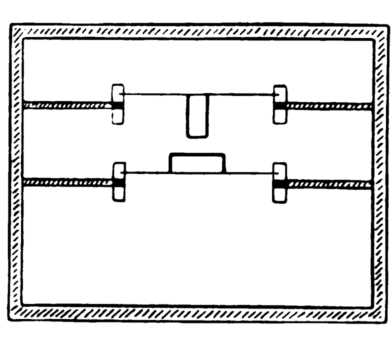


Fig. 4.

Vor allem muß also der Einfluß der ionisierten Luft herabgesetzt werden. Eine teilweise Erniedrigung dieses Einflusses erlangte ich auf folgende Weise. Ich benutzte als Platten kleine Scheibchen von 2 × 6 cm Größe. Sie waren an einen Kupferdraht angelötet, der seinerseits an zwei Messingstäbchen von 1 × 5 cm befestigt war. Diese Stäbe trugen verschiedene Löcher und konnten an die oben beschriebenen Bernsteinansätze angeschraubt werden. Als Vergleichsmetall wählte ich Silber, das in genau derselben Weise befestigt war.

Der Apparat wurde so aufgestellt, daß die Messingstücke nicht direkt von den von der Antikathode ausgehenden Strahlen getroffen wurden. Die Luft war trotzdem überall ionisiert. Es standen nun in der ionisierten Luft Elektroden gegenüber, die sehr viel gleichartiges Metall besaßen. Hier wird aller Wahrscheinlichkeit nach der Einfluß der Luft auf die Potentialdifferenzerregung wesentlich geringer sein, als wenn die Metalle allein sich gegenüberstehen. Es werden dann die Punkte 1, 3 und 4 mehr zur Geltung kommen, wenn sie überhaupt wirken.

Wenn ich nun die Versuche für verschieden harte Strahlen durchführe, so muß neben der Voltaschen Spannungsreihe Punkt 3 und 4 als Dichte und Atomgewicht in Betracht kommen. Da sich bei der ersten Versuchsreihe keine wesentliche Veränderung der Reihenfolge bei den verschiedenen Bestrahlungsdauern ergeben hat, so habe ich die neue nur für eine Bestrahlungsdauer von 1 Sek. durchgeführt, dafür aber noch einige andere Metalle berücksichtigt. Die Entfernung des Apparates von dem Bleischirm betrug 25 cm. Es wurden bei jedem Metall durchschnittlich 8—10 Messungen vorgenommen und daraus der Mittelwert gebildet.

Tab. 11 gibt die Reihe der Metalle für eine Röhre mit 1,1 cm Funkennebenstrecke zwischen Kugeln von 1 cm Radius, also für sehr weiche Strahlen. Die Reihe entspricht ungefähr der Voltaschen Spannungsreihe. Blei und Kohle, die sich beide durch extreme Werte der Dichte oder des Atomgewichtes auszeichnen, fallen außerhalb der Reihe.

Tabelle 11.

Metall	$\frac{V_1}{V_2}$	V_1 in Volt	V_2 in Volt
Platin	1,067	0,35	0,33
Silber	1,006	0,33	0,33
Blei	0,998	0,35	0,35
Kohle	0,956	0,33	0,35
Antimon	0,946	0,34	0,37
Kupfer	0,945	0,33	0,36
Eisen	0,940	0,34	0,37
Nickel	0,935	0,34	0,37
Zink	0,870	0,31	0,36
Aluminium	0,825	0,30	0,36

Tab. 12 gibt die Reihenfolge derselben Metalle für eine Röhre von 3,5 cm Funkennebenstrecke zwischen Kugeln von 1 cm Radius. Die Reihenfolge ist eine andere geworden, sie entspricht fast der Dichte oder auch dem Atomgewicht. Das Potential der Platten ist ungefähr auf das Doppelte gestiegen.

Tabelle 12.

Metall	$\frac{V_1}{V_2}$	V_1 in Volt	V_2 in Volt
Platin	1,120	0,74	0,66
Blei	1,108	0,75	0,67
Silber	1,062	0,72	0,68
Kupfer . . .	1,011	0,71	0,70
Antimon . . .	1,005	0,69	0,69
Nickel	0,975	0,68	0,70
Eisen	0,971	0,66	0;69
Zink	0,959	0,68	0,71
Kohle	0,946	0,70	0,74
Aluminium . .	0,881	0,66	0,75

Tab. 13 gibt die Reihenfolge für eine Röhre von 4,3 cm Funkennebenstrecke, für Strahlen also, die man schon als harte Strahlen bezeichnen kann.

Tabelle 13.

Metall	$\frac{V_1}{V_2}$	V_1 in Volt	V_2 in Volt
Blei	1,172	0,84	0,70
Platin	1,118	0.87	0,77
Silber	1,055	0,82	0,77
Antimon . . .	1,013	0,84	0,83
Kupfer	0,983	0,76	0,77
Nickel	0,979	0,76	0,78
Eisen	0,967	0,76	0,78
Zink	0,941	0,79	0,83
Kohle	0,940	0,75	0,79
Aluminium . .	0,902	0,76	0,84

Die Reihenfolge hat sich bei Platin, Blei und bei Kupfer-Antimon geändert. Zieht man aus den Veränderungen Folge-

rungen, so könnte man zu dem Schlusse gelangen, daß sich bei noch härteren Strahlen schließlich eine Reihe ergäbe, die nach der Dichte oder noch wahrscheinlicher nach dem Atomgewicht geordnet ist. Charakteristisch ist das Verhalten von Blei, Platin, Antimon und Kohle. Es geht also zur Genüge aus der Untersuchung hervor, daß mit der Härte der Strahlen, d. h. also mit dem Wachsen der ladenden Wirkung, das Potential proportional dem Atomgewicht (oder der Dichte) wird.

Dies wird noch deutlicher durch eine Reihe, die ich früher bei einer anderen Versuchsanordnung mit einer Röhre von 6,3 cm Funkennebenstrecke zwischen Kugeln von 1 cm Radius gefunden habe. [Die Röhre stand mir leider zuletzt nicht mehr zur Verfügung. (Anm.).] Es wurden die Metalle gegen Aluminium verglichen. Ihre Größe betrug etwa 5 × 6 cm. Es ergab sich:

		$V_1 : V_2$	Atomgew.
Al	Al	1,025	27
Eisen	Al	1,250	56
Kupfer . . .	Al	1,280	63
Zink	Al	1,300	65
Neusilber . .	Al	1,300	—
Messing . . .	Al	1,315	—
Blei	Al	1,375	207

Die Reihenfolge stimmt also mit der für die Atomgewichte überein.

Das Resultat dieser Untersuchung ist also folgendes:

Die verschiedenartigen Metalle laden sich verschieden hoch auf. Befinden sie sich in Luft von Atmosphärendruck, so ist ihre Reihenfolge bedingt:

1. *durch ihre Stellung in der Voltareihe,*
2. *durch ihr Atomgewicht (oder ihre Dichte).*

Maßgebend für das Überwiegen des einen oder anderen Punktes ist die Härte der Strahlen.

VI. Weitere Ergebnisse.

1. Ich habe zu Anfang gesagt, daß fast alle Körper, die von Röntgenstrahlen getroffen werden, negative Ionen aussenden. In der weiteren Untersuchung will ich nun feststellen, in welchem Grade dies der Fall ist. Die Versuchsanordnung

war im wesentlichen dieselbe wie vorher. Vergleichsplatte war wieder eine Silberplatte. Alle Körper hatten eine Größe von 2 × 6 cm. Sie wurden an einem Kupferdraht befestigt, der an die beiden Messingstäbe angeschraubt war.

Tab. 14 liefert das Resultat der Untersuchung. Alle Körper haben die Eigenschaft, sich positiv zu laden unter der Einwirkung der Röntgenstrahlen. Säuren und Salze begünstigen das Aufladen. Isolatoren zeigen die geringste Wirkung.

Tabelle 14.

Metall	$\frac{V_1}{V_2}$	V_1 in $^1/_{100}$ Volt	V_2 in $^1/_{100}$ Volt
Holz	0,715	43	59
Glas	0,510	31	61
Hartgummi rauh	0,160	12	74
„ poliert	0,080	7	75
Paraffin	0,050	4	70
Papier trocken	0,300—0,400	—	—
„ mit Alkohol	0,686	35	51
„ „ „, Alkohol verdunstet	0,750	37	50
Papier mit Wasser	0,700	34	50
„ „ Kochsalzlösung	0,695	34	50
„ „ „, etwas getrocknet	0,730	35	48
Papier mit Kochsalzlösung, getrocknete Salzkruste	0,810	39	48
Papier mit H_2SO_4 verdünnt	0,705	36	51
„ „ „ $^1/_2$ zu $^1/_2$	0,730	40	53
„ „ $CuSO_4$	0,718	37	51
„ „ Öl	0,562	30	53

2. Zur Prüfung des Einflusses des umgebenden Gases habe ich eine Messung ausgeführt in Kohlensäure. In einem 20 cm breiten, 30 cm hohen und 15 cm tiefen Holzkasten, dessen Vorder- und Rückwand durch zwei Glasscheiben von 1 mm Dicke gebildet wurden, wurden die zu untersuchenden Platten und eine Vergleichsplatte aufgestellt. Es wurden Cu, Ag, Zn, Pb, Al gegen Al in Luft und CO_2 verglichen. In dem Kasten befand sich noch Chlorcalcium zum Trocknen des

Gases. Der Kasten war so aufgestellt, daß nur die Glaswände von den Strahlen getroffen werden konnten. Die Entfernung der Metalle vom Bleischirm betrug ca. 15 cm. Es wurde eine Röhre von 4,3 cm Funkennebenstrecke bei Kugeln von 1 cm Radius benutzt.

Tabelle 15.

Metall	Gas	$\frac{V_1}{V_2}$	V_1 in Volt	V_2 in Volt
Blei	Luft	1,261	0,92	0,72
	CO_2	1,116	0,72	0,64
Silber	Luft	1,148	0,70	0,61
	CO_2	1,017	0,56	0,55
Kupfer	Luft	1,026	0,69	0,68
	CO_2	0,954	0,53	0,56
Zink	Luft	1,020	0,75	0,72
	CO_2	0,949	0,69	0,75
Aluminium . .	Luft	0,836	0,73	0,88
	CO_2	0,849	0,68	0,81

Es ergibt sich, daß Potential und Potentialdifferenz in Kohlensäure geringer ist als in Luft. Vielleicht ist diese Wirkung der Leitfähigkeit der ionisierten Kohlensäure zuzuschreiben, die sich nach Hillers[1]) zu der der Luft verhält wie 1,2 : 1.

3. Ich verglich schließlich zwei Palladiumplatten miteinander. Hatten sie beide kein H_2 okkludiert, so ergaben sich in der unter V. beschriebenen Anordnung folgende Resultate bei einer Bestrahlungsdauer von 1 Sek.:

Tabelle 16.

V_1 Ausschlag	V_2 Ausschlag	$\frac{V_1}{V_2}$
1390	1190	1,168
1299	1116	1,165
1371	1185	1,158
1309	1127	1,161
1263	1085	1,164
		1,163

1) W. Hillers, l. c.

Wurde dann V_1 in einer Wasserstoffatmosphäre ungefähr 10 Min. lang geladen, so ergab sich:

Tabelle 17.

V_1 Ausschlag	V_2 Ausschlag	$\frac{V_1}{V_2}$
1440	1200	1,200
1380	1200	1,150
1280	1120	1,140
	Von neuem geladen	
1266	950	1,335
1235	1060	1,175
1244	1070	1,164

Es ergibt sich also die merkwürdige Tatsache, daß eine Wirkung des okkludierten Wasserstoffs sich nur bei der ersten Bestrahlung bemerkbar macht. Es scheint fast, als ob das Gas nach der ersten Bestrahlung entwichen wäre.

Zusammenfassung.

Ich fasse die Resultate, zu denen meine Untersuchung geführt hat, noch einmal kurz zusammen:

1. Es hat sich ergeben, daß alle Körper, die direkt von Röntgenstrahlen getroffen werden, positive Ladung erhalten.

2. Sehr dünne Metalle laden sich stärker auf als dicke Platten desselben Metalles, und zwar ist der Unterschied um so größer, je kürzer die Bestrahlungsdauer ist.

3. Der Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit ist gering.

4. Das Potential der bestrahlten Platte ist abhängig:

a) von der Kapazität, mit der die Platte verbunden ist. Die Elektrizitätsmenge, das Produkt aus Kapazität und Potential wird kleiner für größere Potentiale, d. h. geringere Kapazitäten. Wird dies der Leitfähigkeit der Luft zugeschrieben, so kann man annehmen, daß die Elektrizitätsmenge, die von bestimmten Strahlen erzeugt wird, konstant ist;

b) von der Bestrahlungsdauer. Das Potential wächst beständig mit der Bestrahlungsdauer bis zu einer Dauer von 20 Sek., von da ab bleibt es einigermaßen konstant;

c) von der Art der Strahlen. Harte Strahlen bewirken eine stärkere Ladung als weiche;

d) von der Art des Metalles und zwar ist das Potential um so größer, je größer das Atomgewicht und je elektronegativer das Metall ist. Der Einfluß des Atomgewichtes macht sich besonders bei harten Strahlen bemerkbar, die Stellung des Metalles in der Spannungsreihe bei weichen Strahlen;

e) von dem umgebenden Gas. In Luft ist das Potential größer als in CO_2.

5. Sekundärstrahlen wirken der Ladung entgegen. Dadurch erklären sich die Differenzen hinsichtlich des Punktes 1 bei verschiedenen Beobachtern.

Die Resultate, zu denen die Arbeit geführt hat, veranlassen mich, noch kurz auf die Veröffentlichungen von Paschen[1]) hinzuweisen, in denen er sich über die Natur der γ-Strahlen dahin ausspricht, daß sie Kathodenstrahlen von äußerst hoher Geschwindigkeit seien. Nun geht aber aus Vorliegendem hervor, daß dort, wo Kathodenstrahlen von genügend großer Geschwindigkeit auftreten, Röntgenstrahlen und umgekehrt bei auftretenden Röntgenstrahlen Kathodenstrahlen vorhanden sind. Es muß daher unter der Radiumstrahlung eine den Röntgenstrahlen entsprechende Strahlenart vorhanden sein. Dies sind die γ-Strahlen. Die Versuchsresultate Paschens sind zu erklären, wenn man die γ-Strahlen als Röntgenstrahlen unter Berücksichtigung ihrer sekundäre Kathodenstrahlen erzeugenden Wirkung auffaßt.

Es sei mir noch gestattet, Hrn. Prof. Dr. Drude für Anregung und Leitung dieser Arbeit und Hrn. Dr. Zahn für die liebenswürdige Unterstützung meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

---

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 14. p. 164 u. 389ff. 1904.

(Eingegangen 10. August 1905.)

6. *Zur Elektrodynamik in bewegten Medien;* *von R. Gans.*

Zweite Mitteilung.

Auf Grund einer Arbeit, die sich mit den Unterschieden der Hertzschen, Lorentzschen und Cohnschen Theorie für die elektromagnetischen und optischen Erscheinungen in bewegten Medien beschäftigt[1]), habe ich die Cohnsche Theorie nach Analogie der Drudeschen Dispersionstheorie[2]) so erweitert[3]), daß sie Dispersion, Absorption und Zirkularpolarisation auch umfaßt, und zwar sind die Resultate in Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

Im folgenden sollen zur Vervollständigung noch die Strahlungserscheinungen behandelt werden, die bei bewegten vollkommenen Spiegeln und bei bewegten punktförmigen Lichtquellen auftreten. Es wird sich zeigen, daß die Resultate dieselben sind, welche Hr. Abraham[4]) und Hr. W. Wien[5]) gefunden haben.

Schließlich behandeln wir das „vollkommene" Vakuum nach der Cohnschen Theorie, was aus folgendem Grunde von Wichtigkeit ist: Daß beim Michelson-Morleyschen Interferenzversuch (neuerdings wiederholt von Morley und Miller[6])) kein Einfluß der Erdbewegung vorhanden ist und beim Trouton-Nobleschen elektrostatischen Versuch auch kein Effekt bemerkbar war, liegt nach der Cohnschen Theorie an dem Einfluß der mit Erdgeschwindigkeit mitbewegten Luft. Es unterliegt nun keinem Zweifel, daß bei einer bestimmten Verdünnung —

1) R. Gans, Verh. d. Heidelberger naturhist. med. Vereins. N. F. 8. p. 208. 1904.

2) P. Drude, Lehrbuch d. Optik p. 352—441. Leipzig 1900.

3) R. Gans, Ann. d. Phys. 16. p. 516. 1905 (im folgenden als „erste Mitteilung" zitiert.

4) M. Abraham, Boltzmann-Festschrift p. 85. 1904 oder Ann. d. Phys. 14. p. 236. 1904.

5) W. Wien, Ann. d. Phys. 13. p. 641 u. p. 663. 1904.

6) E. W. Morley u. A. W. Miller, Phil. Mag. (6) 8. p. 753. 1904.

ob wir sie experimentell erreichen können, ist eine zweite Frage — der Einfluß der Luft nicht mehr vorhanden sein kann. Da es nicht unmöglich ist, daß diese Verdünnung mit unseren Hilfsmitteln erreicht wird, wollen wir uns nach dem Verhalten „vollkommen" evakuierter Gefäße in elektrodynamischer Beziehung fragen. Eine theoretische Entscheidung der Frage, bei welcher Verdünnung ein Einfluß der Erdbewegung merklich sein muß, wird erst möglich sein, wenn eine vollständige Molekulartheorie der Cohnschen Theorie vorliegt.

III. Abschnitt. **Strahlungserscheinungen.**

1. Der bewegte Spiegel.

Jede Theorie, welche die Elektrodynamik in bewegten Medien darstellen will, muß im freien Äther auf die Maxwellsche Theorie hinauskommen; dies ist mit der Lorentzschen und mit der Cohnschen Theorie der Fall. Das elektromagnetische Feld muß also nach beiden Theorien dasselbe sein, wenn es nur im Äther besteht, dagegen in den bewegten Körpern Null ist. Denn die Grenzbedingungen an der Grenze des Äthers gegen den bewegten Körper sagen nur aus, daß die Feldgleichungen bis in die Schichten des Körpers hinein gelten, wo das Feld bereits Null ist.

Da diese Bedingungen an einer bewegten Fläche gelten, so wird es praktisch sein, ein bewegtes Koordinatensystem einzuführen. Dann lauten die Gleichungen (vgl. erste Mitteilung p. 526—527)

$$(1) \qquad c \operatorname{rot}\left\{\mathfrak{H} + \left[\frac{\mathfrak{p}}{c}\,\mathfrak{D}\right]\right\} = \frac{\delta \mathfrak{D}}{\delta t} + \mathfrak{J},$$

$$(2) \qquad -c \operatorname{rot}\left\{\mathfrak{E} - \left[\frac{\mathfrak{p}}{c}\,\mathfrak{B}\right]\right\} = \frac{\delta \mathfrak{B}}{\delta t}.$$

$\mathfrak{J}$ bedeutet in (1) den Leitungsstrom; $\mathfrak{p}$ bedeutet die relative Geschwindigkeit des betrachteten Volumteilchens gegen das bewegte Koordinatensystem. Es ist also im Äther $\mathfrak{p} = -\mathfrak{v}$ und im starren, mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegten Körper $\mathfrak{p} = 0$, in der Grenzschicht verändert sich $\mathfrak{p}$ schnell, aber stetig.

Es folgt aus (2) die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E} - [(\mathfrak{p}/c)\mathfrak{B}]$ durch die Grenzschicht, und da *im* Körper

kein Feld sein soll, so müssen im Äther an der Grenze des Körpers die Tangentialkomponenten von

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{H}\right]$$

Null sein.

Der Vektor $\mathfrak{E}'$ steht senkrecht auf der Oberfläche des bewegten Körpers.

Aus der Stetigkeit der Normalkomponente von $\mathfrak{B}$ folgt ferner, daß im Äther an der Grenze des Körpers die Normalkomponente von $\mathfrak{H}$ Null sein muß.

Der Vektor $\mathfrak{H}$ weist tangential zur bewegten Fläche.

Die Gleichungen (1) und (2) lauten im Äther

$$(1') \qquad c \operatorname{rot}\left\{\mathfrak{H} - \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{E}\right]\right\} = \frac{\delta \mathfrak{E}}{\delta t},$$

$$(2') \qquad -c \operatorname{rot}\left\{\mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{H}\right]\right\} = \frac{\delta \mathfrak{H}}{\delta t}$$

in genauer Übereinstimmung mit den Gleichungen der Lorentzschen Theorie.[1])

Ohne weitere Rechnung kann man also auch sagen, daß beim bewegten vollkommen reflektierenden oder vollkommen schwarzen Körper im Äther die Felder nach Lorentz und Cohn identisch sind. Ferner sind Energiedichte und Strahlung auch identisch, da sie sich im Äther in gleicher Weise in beiden Theorien durch die Feldstärken ausdrücken.

Denken wir uns einen vollkommenen, ebenen Spiegel in Richtung seiner Normalen mit der Geschwindigkeit v bewegt, so können wir den normalen Strahlungsdruck aus dem Energieprinzip ableiten. Wir betrachten den Raum zwischen zwei zur Spiegelfläche parallelen materiellen Ebenen, und zwar möge die eine Ebene im Metall des Spiegels, die andere im Äther verlaufen. Dann setzen wir an, daß die Abnahme der Energie in diesem Raume gleich ist der aus dem Raume heraustretenden Strahlung, vermehrt um die vom Strahlungsdruck geleistete Arbeit.

Bedeutet S_1 den absoluten Wert der einfallenden, S_2 den der reflektierten Strahlung, so ist die Energiedichte $(S_1 + S_2)/c$. Berücksichtigen wir nur eine Flächeneinheit des Spiegels, so

1) Vgl. z. B. M. Abraham, Ann. d. Phys. 14. p. 261. 1904.

ist die Energieabnahme pro Zeiteinheit $(S_1 + S_2)v/c$, wenn v in Richtung der äußeren Spiegelnormalen fällt. Sind α_1 und α_2 die Kosinus der Winkel, welche die dem einfallenden Strahle entgegen bez. die dem reflektierten parallel weisende Richtung mit der äußeren Spiegelnormalen einschließt, so ist die durch die im Äther verlaufende Ebene aus dem betrachteten Raume austretende Strahlung $S_2\alpha_2 - S_1\alpha_1$. Durch die im Spiegel feste Ebene tritt wegen der vollständigen Reflexion keine Strahlung, also ist, wenn p den Strahlungsdruck bedeutet

$$p\,v = S_1\left(\alpha_1 + \frac{v}{c}\right) - S_2\left(\alpha_2 - \frac{v}{c}\right).$$

Diese Formel ist die von Hrn. Abraham[1]) abgeleitete. Das Vorzeichen für p haben wir anders gewählt. Da nun S_1 und S_2 sowie α_1 und α_2 wegen der Gleichheit der Felder nach Cohn und Lorentz gleich sind, so folgt dies auch für p.

Der normale Strahlungsdruck hat nach der Cohnschen Theorie denselben Wert wie nach der Lorentzschen.

2. Der bewegte leuchtende Punkt.

Sehen wir von der Ausdehnung der Lichtquelle ab, d. h. suchen wir das Feld nur in Abständen von der Lichtquelle, die groß im Vergleich zu letzterer sind, so wollen wir von einem leuchtenden Punkte sprechen.

Außerhalb der Lichtquelle selbst ist freier Äther, d. h. dort gelten nach jeder Theorie die Maxwellschen Gleichungen, und da wir von dem Felde in der Nähe der Lichtquelle und in derselben absehen, so müssen die nach der Lorentzschen Theorie berechneten Feldstärken auch nach der Cohnschen Theorie gelten.

Hr. Abraham[2]) hat auf Grund der nach der Lorentzschen Theorie gültigen retardierten skalaren und vektoriellen Potentiale mit Hinzuziehung einer Arbeit des Hrn K. Schwarzschild[3]) den allgemeinen Fall einer bewegten Lichtquelle berechnet und dann auf longitudinale und auf transversale Schwingungen spezialisiert, d. h. auf solche, bei denen das

1) M. Abraham, l. c. p. 251.
2) M. Abraham, l. c. p. 273.
3) K. Schwarzschild, Gött. Nachr., Heft 3. 1903.

schwingende Elektron in der Bewegungsrichtung bez. senkrecht dazu schwingt.

Man kann aber auch noch eine andere Methode wählen entsprechend der von H. Hertz[1]) für eine ruhende punktförmige Lichtquelle angewandten: wir suchen Lösungen der Maxwellschen Gleichungen, welche Schwingungen darstellen, die ins Unendliche hinauseilen, im ganzen Raume gültig sind außer in einem singulären Punkte, der sich mit konstanter Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, der sogenannten Lichtquelle. Die Lösungen sollen für unendlich kleines $\mathfrak{v}$ in die von Hertz für den ruhenden Dipol aufgestellten übergehen; für endliches $\mathfrak{v}$ und unendlich große Schwingungsdauer soll die Lösung das Feld einer mit konstanter Geschwindigkeit bewegten positiven und einer ebenso großen negativen Ladung darstellen, die in einem kleinen Abstand voneinander sich befinden. Die Verbindungslinie liegt in Richtung der Geschwindigkeit oder senkrecht zu ihr, je nachdem die Schwingungen longitudinal oder transversal sind.

Beim Aufsuchen von Lösungen wird man auf zwei voneinander unabhängige, sich einfach superponierende Schwingungszustände kommen, von denen der eine als Schwingungen eines elektrischen, der andere als Schwingungen eines magnetischen Dipols anzusehen ist. Ob letztere existieren, wissen wir nicht, während erstere die Lichtemission hervorrufen, wie das Zeemanphänomen beweist. Wir lassen also die Schwingungen des magnetischen Dipols fort. Dann müssen wir mit Notwendigkeit auf dieselbe Lösung kommen, wie Hr. Abraham mit Hilfe der Potentiale. Wir übergehen den Eindeutigkeitsbeweis, der sich sehr leicht führen läßt. Den soeben skizzierten Weg hat Hr. Wien[2]) eingeschlagen. Ich bin so ausführlich auf seine Methode, die übrigens auch von Lorentz[3]) angewandt ist (Hr. Lorentz berechnet nur den Bewegungseinfluß erster Ordnung), eingegangen, weil einige Physiker mir gesprächsweise gesagt haben, sie wären von der Wienschen Lösung nicht überzeugt, da Wien doch aus den nur für *ruhende* Körper gültigen Maxwellschen Gleichungen das Feld

---

1) H. Hertz, Wied. Ann. 36. p. 1. 1889.

2) W. Wien, Ann. d. Phys. 13. p. 641. 1904.

3) H. A. Lorentz, Enc. d. math. Wissensch. V, 2. p. 180.

einer *bewegten* Lichtquelle berechnet hätte, was unmöglich wäre. Auf den eigentlichen Grund dieser Möglichkeit soll obige Auseinandersetzung der Methode hinweisen.

Dann muß aber das von Hrn. Wien gefundene Resultat mit dem des Hrn. Abraham übereinstimmen. Daß dies der Fall ist, soll im folgenden gezeigt werden. Die Lösungen weichen nur in der Form voneinander ab.

Nach Abraham[1]) ist:

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{c^2 |\mathfrak{r}|^3 (1 - \beta \cos \varphi)^3} \left[\mathfrak{r}, [\mathfrak{r}', \dot{\mathfrak{v}}]\right], \tag{3}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{|\mathfrak{r}|} [\mathfrak{r}, \mathfrak{E}]. \tag{4}$$

Hier bedeutet e die Ladung des Elektrons, c die Lichtgeschwindigkeit, β das Verhältnis der Translationsgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit, $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor, der nach dem Aufpunkte P hin von demjenigen Punkte E' aus gezogen ist, wo die Punktladung sich zur Zeit $t' = t - |\mathfrak{r}|/c$ befand. $\mathfrak{v}$ ist die Translationsgeschwindigkeit des Elektrons zur Zeit t', $\dot{\mathfrak{v}}$ die Beschleunigung zur selben Zeit, φ der Winkel zwischen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{r}$. $\mathfrak{r}'$ ist zur Abkürzung für $\mathfrak{r} - \mathfrak{v}(|\mathfrak{r}|/c)$.

Wir betrachten longitudinale Schwingungen, die Translation finde in der x-Richtung statt. Da die Zeit, welche das Elektron gebraucht hat, um von E' nach E zu kommen, gleich $|\mathfrak{r}|/c$ ist, so ist die Strecke selbst

$$E E' = \beta |\mathfrak{r}|.$$

Nun hat $\mathfrak{r}$ folgende Komponenten, wenn x, y, z die Koordinaten von P bezüglich E sind

$$\mathfrak{r}: \quad x + \beta |\mathfrak{r}|, \; y, \; z$$

und

$$\mathfrak{r}': \quad x, \; y, \; z.$$

Setzen wir

$$|\mathfrak{r}| (1 - \beta \cos \varphi) = A,$$

so folgt

$$\mathfrak{r}: \quad x + \frac{\beta A}{1 - \beta \cos \varphi}, \; y, \; z.$$

---

1) M. Abraham, l. c. p. 276, Formel (32b) und p. 275, Formel (31a).

Ferner ist

$$\cos\varphi = \frac{x + \beta\,|\mathfrak{r}|}{|\mathfrak{r}|} = \frac{x}{A}(1 - \beta\cos\varphi) + \beta\,.$$

Daraus folgt

$$\cos\varphi = \frac{x + \beta A}{A + \beta x}$$

und

$$1 - \beta\cos\varphi = \frac{k^2 A}{A + \beta x}\,,$$

wo $k^2 = 1 - \beta^2$ ist; also

$$|\mathfrak{r}| = \frac{A + \beta x}{k^2}\,.$$

Nach (3) ist, wenn $\varrho^2 = y^2 + z^2$ gesetzt wird,

(5) $$\mathfrak{E}_x = -\frac{e\,\varrho^2\,\dot{\mathfrak{v}}}{c^2 A^3}\,.$$

Zur Zeit t sei der Polabstand des Dipols

$$l = -B\cos b\,c\,t\,,$$

Dann ist:

$$\mathfrak{v} = B\,b\,c\sin b\,c\,t$$

und zur Zeit $t' = t - |\mathfrak{r}|/c$

$$\dot{\mathfrak{v}} = B\,b^2\,c^2\cos b\,c\left(t - \frac{|\mathfrak{r}|}{c}\right) = B\,b^2\,c^2\cos b\,c\left(t - \frac{A + \beta x}{k^2 c}\right).$$

Zur Vereinfachung führen wir den Buchstaben α ein für den Ausdruck

6) $$\alpha = \frac{b}{k^2}(k^2 c\,t - \beta\,x - A)\,.$$

Dann ist

(7) $$\mathfrak{E}_x = -\frac{e\,\varrho^2\,B\,b^2\,c^2\cos\alpha}{c^2 A^3}\,.$$

Schließlich führen wir für das Maximalmoment des Dipols eB den Buchstaben D ein, dann haben wir

(7') $$\mathfrak{E}_x = -\frac{D\,\varrho^2\,b^2\cos\alpha}{A^3}\,,$$

eine Gleichung, die mit der Wienschen Lösung (p. 655) identisch ist, wenn wir

unser D durch Wiens A,
" A " " r,
" b " " $b\,k$

ersetzen.

Aus (6) ergibt sich die relative Schwingungsdauer T

(8) $$\frac{2\pi}{T} = b\,c\,;$$

sie ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Translation, falls b dies ist. Wien dagegen nimmt, da bei ihm

$$\frac{2\pi}{T} = b\,k\,c$$

ist, unter der Annahme eines konstanten b Abhängigkeit von $|\mathfrak{v}|$ an. Solange wir nichts über den Mechanismus des Leuchtens wissen, können wir über die Schwingungsdauer nichts aussagen, keine Theorie gibt bis jetzt darüber Aufschluß, aber solange kein Grund vorliegt, wollen wir mit Lorentz[1]) Unabhängigkeit in den Perioden der Eigenschwingungen von der Translation annehmen.

Da sich nun ebenso wie für $\mathfrak{E}_x$ auch für $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$ sowie für $\mathfrak{H}$ die Identität der Wienschen Formeln mit den Abrahamschen nachweisen läßt, und zwar auch für den Fall transversaler Schwingungen, so ist die Übereinstimmung beider Systeme, die nicht nur die Lorentzsche, sondern auch die Cohnsche Theorie befriedigen, erwiesen. (Auf p. 655 der Wienschen Arbeit steht versehentlich in den zweiten Termen von $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$ im Nenner ein nicht dorthin gehörendes c.)

Die Strahlung ist also auch nach beiden Formelsystemen dieselbe, wenn dasselbe unter Strahlung verstanden wird.

Es ist aber zu beachten, daß diese Formeln nach Cohn nur gelten, wenn die Lichtquelle sich durch die ruhende Luft (oder Vakuum) bewegt. Falls die Luft der Umgebung mit derselben Geschwindigkeit mit der Lichtquelle mitbewegt wird, gelten die gewöhnlichen Hertzschen Gleichungen für den ruhenden Dipol, sofern man die gewöhnliche Zeit t durch die Ortszeit ersetzt (vgl. 1. Mitteilung p. 523).

IV. Abschnitt. Das vollkommene Vakuum nach der Cohnschen Theorie.

1. Die Feldgleichungen im Vakuum.

Daß sich nach der Cohnschen Theorie kein Einfluß der Erdbewegung auf optische und elektromagnetische Erschei-

1) H. A. Lorentz, l. c. p. 268.

nungen ergibt, liegt an dem Einfluß der mitbewegten Luft. Könnten wir die Luft vollkommen entfernen, so müßten die Erscheinungen sich verändern, der Michelson-Morleysche Interferenzversuch müßte z. B. den nach der Lorentzschen Theorie (ohne die Verkürzungshypothese von Lorentz und Fitz-Gerald) erwarteten Effekt geben.

Wie weit die Luftverdünnung zu treiben ist, damit wir den Fall des vollkommenen Vakuums haben, läßt sich ohne eine Molekulartheorie der Cohnschen Gleichungen nicht sagen; es wäre von großer Wichtigkeit, in dem weitgehendsten Vakuum, welches wir herstellen können, Versuche zu machen. Allerdings ist der Wert dieser Experimente ganz verschieden einzuschätzen, je nachdem ein Einfluß der Verdünnung gefunden wird oder nicht, denn im ersteren Falle würden die Versuche eine Entscheidung zugunsten der Cohnschen Theorie gegen die Lorentzsche Theorie herbeiführen, im zweiten Falle dagegen könnte man nur sagen, daß nach der Cohnschen Theorie trotz des erreichten Vakuums die Gasreste noch immer als Kontinuum aufzufassen sind. Es ist aber wohl zu bemerken, daß bei abnehmendem Druck zunächst kein Effekt auftritt, sondern daß, wie Cohn[1]) betont hat, das Verhalten ähnlich sein wird wie das des Reibungskoeffizienten von Gasen; dieser ist bekanntlich vom Druck unabhängig, und erst bei sehr kleinen Drucken ist ein Abnehmen desselben zu bemerken.[2])

Um das Verhalten vollkommen evakuierter Räume auf der bewegten Erde vollständig beschreiben zu können, gehen wir von den Cohnschen Gleichungen für ein mitbewegtes Bezugssystem aus.

Sehen wir von dem Vorhandensein von Elektrizitätsmengen in dem betrachteten Raume ab, setzen wir also

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0,$$

so ist (vgl. Mitteilung 1, Formel (35″) bis (38″))

$$(9) \qquad c \operatorname{rot} \left\{ \mathfrak{H} + \left[\frac{\mathfrak{p}}{c}\, \mathfrak{D} \right] \right\} = \frac{\delta \mathfrak{D}}{\delta t},$$

$$(10) \qquad - c \operatorname{rot} \left\{ \mathfrak{E} - \left[\frac{\mathfrak{p}}{c}\, \mathfrak{B} \right] \right\} = \frac{\delta \mathfrak{B}}{\delta t},$$

1) E. Cohn, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin **46.** p. 1294. § 7. 1904.

2) O. E. Meyer, Die kinetische Energie d. Gase p. 187. Breslau 1899.

wo

$$(11)\qquad \mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E} - \left[\frac{\mathfrak{v}+\mathfrak{p}}{c},\ \mathfrak{H}\right],$$

$$(12)\qquad \mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H} + \left[\frac{\mathfrak{v}+\mathfrak{p}}{c},\ \mathfrak{E}\right].$$

Hier bedeuten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{p}$ dasselbe wie in Mitteilung 1, p. 527.

Die Bedingungen an der Grenze verschiedener Medien sind Stetigkeit der Normalkomponenten von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$, sowie der Tangentialkomponenten von

$$\mathfrak{H} + \left[\frac{\mathfrak{p}}{c}\,\mathfrak{D}\right] \quad \text{und} \quad \mathfrak{E} - \left[\frac{\mathfrak{p}}{c}\,\mathfrak{B}\right].$$

Wir bezeichnen die Größen im evakuierten Gefäß mit dem Index 0, in der Materie mit dem Index 1, so ergibt sich, da im Vakuum $\mathfrak{p} = -\mathfrak{v}$, in der Materie $\mathfrak{p} = 0$ ist

$$(13)\qquad \varepsilon_1\,\mathfrak{E}_{1n} - \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{H}_1\right]_n = \mathfrak{E}_{0n},$$

$$(14)\qquad \mu_1\,\mathfrak{H}_{1n} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{E}_1\right]_n = \mathfrak{H}_{0n},$$

$$(15)\qquad \mathfrak{H}_{1t} = \mathfrak{H}_{0t} - \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{E}_0\right]_t = \mathfrak{H}'_{0t},$$

$$(16)\qquad \mathfrak{E}_{1t} = \mathfrak{E}_{0t} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{H}_0\right]_t = \mathfrak{E}'_{0t}.$$

t und n bedeuten tangentiale bez. normale Richtung an der Grenze Vakuum–Materie.

Führen wir in (9) und (10) die Ortszeit t' ein (vgl. 1. Mitteilung p. 523), und vernachlässigen wir Größen dritter und höherer Ordnung in $\beta = \mathfrak{v}/c$, so gilt in der *Materie:*

$$(9')\qquad c\,\mathrm{rot}'\,\mathfrak{H} = \frac{\partial\,\varepsilon\,\mathfrak{E}}{\partial\,t'},$$

$$(10')\qquad -\,c\,\mathrm{rot}'\,\mathfrak{E} = \frac{\partial\,\mu\,\mathfrak{H}}{\partial\,t'},$$

im *Vakuum:*

$$c\,\mathrm{rot}'\left\{\mathfrak{H} - \left[\frac{\mathfrak{v}}{c},\ \mathfrak{E}\right]\right\} - \frac{\partial}{\partial\,t'}\left[\frac{\mathfrak{v}}{c},\ \mathfrak{H} - \left[\frac{\mathfrak{v}}{c},\ \mathfrak{E}\right]\right] = \frac{\partial\,\mathfrak{E}}{\partial\,t'},$$

$$-\,c\,\mathrm{rot}'\left\{\mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c},\ \mathfrak{H}\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial\,t'}\left[\frac{\mathfrak{v}}{c},\ \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c},\ \mathfrak{H}\right]\right] = \frac{\partial\,\mathfrak{H}}{\partial\,t'},$$

oder

$$(9'')\qquad c\,\mathrm{rot}'\,\mathfrak{H}' = \frac{\partial}{\partial\,t'}\left\{\mathfrak{E}' - \left[\frac{\mathfrak{v}}{c},\ \left[\frac{\mathfrak{v}}{c},\ \mathfrak{E}'\right]\right]\right\},$$

$$(10'')\qquad -\,c\,\mathrm{rot}'\,\mathfrak{E}' = \frac{\partial}{\partial\,t'}\left\{\mathfrak{H}' - \left[\frac{\mathfrak{v}}{c},\ \left[\frac{\mathfrak{v}}{c},\ \mathfrak{H}'\right]\right]\right\}.$$

Legen wir die x-Achse parallel der Translation $\mathfrak{v}$, so haben die im Vakuum gültigen Gleichungen (9″) und (10″) genau die Form der gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen in einem anisotropen Körper, denn auf der rechten Seite steht unter dem Zeichen $\delta/\delta t'$ ein Vektor mit den Komponenten

$$\mathfrak{E}_x', \quad (1+\beta^2)\mathfrak{E}_y', \quad (1+\beta^2)\mathfrak{E}_z'$$

bez.

$$\mathfrak{H}_x', \quad (1+\beta^2)\mathfrak{H}_y', \quad (1+S^2)\mathfrak{H}_z'.$$

Diese Vektoren wollen wir kurz als

$$(1, \quad 1+\beta^2, \quad 1+\beta^2)\mathfrak{E}' = (\varepsilon_0)\mathfrak{E}'$$

bez.

$$(1, \quad 1+\beta^2, \quad 1+\beta^2)\mathfrak{H}' = (\mu_0)\mathfrak{H}'$$

bezeichnen. Dann gilt im Vakuum

$$\text{(17)} \qquad c \operatorname{rot}' \mathfrak{H}' = \frac{\delta}{\delta t'}(\varepsilon_0)\mathfrak{E}',$$

$$\text{(18)} \qquad -c \operatorname{rot}' \mathfrak{E}' = \frac{\delta}{\delta t'}(\mu_0)\mathfrak{H}'.$$

Schließlich wollen wir noch die Grenzbedingungen (13) bis (16) umformen, indem wir im Vakuum anstatt $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Vektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ einführen.

Aus

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + [\beta\mathfrak{H}],$$

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - [\beta\mathfrak{E}]$$

folgt

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' - [\beta\mathfrak{H}'] - \big[\beta[\beta\mathfrak{E}']\big] = \mathfrak{E}'(1+\beta^2) - [\beta\mathfrak{H}'] - \beta(\beta, \mathfrak{E}'),$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' + [\beta\mathfrak{E}'] - \big[\beta[\beta\mathfrak{H}']\big] = \mathfrak{H}'(1+\beta^2) + [\beta\mathfrak{E}'] - \beta(\beta, \mathfrak{H}').$$

Da aber die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{E}_1$ denen von $\mathfrak{H}_0'$ und $\mathfrak{E}_0'$ gleich sind nach (15) und (16), so ist wegen (13) und (14)

$$\varepsilon_1 \mathfrak{E}_{1n} = \mathfrak{E}_{0n}'(1+\beta^2) - \beta_n(\beta, \mathfrak{E}_0'),$$

$$\mu_1 \mathfrak{H}_{1n} = \mathfrak{H}_{0n}'(1+\beta^2) - \beta_n(\beta, \mathfrak{H}_0'),$$

d. h.

$$\text{(13')} \qquad \varepsilon_1 \mathfrak{E}_{1n} = (\varepsilon_0)\mathfrak{E}_{0n}',$$

$$\text{(14')} \qquad \mu_1 \mathfrak{H}_{1n} = (\mu_0)\mathfrak{H}_{0n}'.$$

Es bestehen also die Gleichungen:

In der Materie:	Im Vakuum:
$c \operatorname{rot}' \mathfrak{H}_1 = \frac{\delta \varepsilon_1 \mathfrak{E}_1}{\delta t'}$,	$c \operatorname{rot}' \mathfrak{H}_0' = \frac{\delta (\varepsilon_0) \mathfrak{E}_0'}{\delta t'}$,
$- c \operatorname{rot}' \mathfrak{E}_1 = \frac{\delta \mu_1 \mathfrak{H}_1}{\delta t'}$.	$- c \operatorname{rot}' \mathfrak{E}_0' = \frac{\delta (\mu_0) \mathfrak{H}_0'}{\delta t'}$.

Die Grenzbedingungen lauten: Die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{E}_1$ gehen stetig in die von $\mathfrak{H}_0'$ und $\mathfrak{E}_0'$ über; die Normalkomponenten von $\varepsilon_1 \mathfrak{E}_1$ und $\mu_1 \mathfrak{H}_1$ gehen stetig in die von $(\varepsilon_0)\mathfrak{E}_0'$ und $(\mu_0)\mathfrak{H}_0'$ über.

Es bestehen also die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen, nur müssen wir mit der Ortszeit statt mit der gewöhnlichen Zeit rechnen, im Vakuum treten die Größen $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ statt $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ auf; *das Vakuum scheint infolge der Erdbewegung anisotrop, mit den Symmetrieeigenschaften eines einachsigen Kristalles, dessen optische Achse die Richtung der Erdbewegung ist.*

Auf den ersten Blick könnte man also glauben, daß das kristallinische Verhalten eine Doppelbrechung bedingen würde, doch das ist nicht der Fall. Wir sind nämlich in der Kristalloptik gewohnt, die Körper als elektrisch anisotrop, dagegen als magnetisch isotrop aufzufassen (d. h. μ in allen Richtungen gleichwertig); dann erhält man die wohlbekannte Fresnelsche Wellenfläche. In unserem Falle ist aber die magnetische Anisotropie ebenso groß, wie die elektrische, dann ist die Wellenfläche das Rotationsellipsoid

$$x^2 + \frac{y^2 + z^2}{1 + \beta^2} = \frac{c^2}{(1 + \beta^2)^2}\ {}^{1)},$$

oder mit den bisher gemachten Vernachlässigungen

$$x^2 + \frac{y^2 + z^2}{1 + \beta^2} = \frac{c^2}{1 + 2\beta^2}.$$

Die Strahlgeschwindigkeit in der Translationsrichtung ist also $c(1 - \beta^2)$, in einer dazu senkrechten Richtung $c(1 - \beta^2/2)$. Das bedeutet aber den von Michelson und Morley erwarteten Effekt beim Interferenzversuch; nach der Cohnschen Theorie muß er im absoluten Vakuum auftreten.

1) Vgl. E. Cohn, Das elektromagn. Feld p. 570. Leipzig 1900.

2. Die ponderomotorischen Kräfte im Vakuum.

Zwei Gründe sind es, welche bei Berechnung der ponderomotorischen Kräfte auf Körper im Vakuum nach der Cohnschen Theorie viel mehr Schwierigkeiten auftreten lassen als nach der Lorentzschen Theorie.

Die Kraft auf die Volumeinheit lautet nach Cohn[1])

$$(19) \qquad \mathfrak{f} = -\frac{1}{c}\frac{\overline{d\mathfrak{S}}}{dt} + \operatorname{div}\tau,$$

wo

$$\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$$

und

$$(20) \qquad \frac{\overline{d\mathfrak{S}}}{dt} = \frac{d\mathfrak{S}}{dt} + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{S}_1 \operatorname{rot}\mathfrak{w}] + \mathfrak{S}\operatorname{div}\mathfrak{w} - (\operatorname{def}\mathfrak{w})\mathfrak{S}.$$

Hier bedeutet $\gamma = \operatorname{def}\mathfrak{w}$ (lies: Deformation $\mathfrak{w}$) einen Tensor mit den Bestimmungsstücken

$$\gamma_{xx} = \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial y}\right), \quad \gamma_{xz} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial z}\right) \text{ etc.}$$

und $(\gamma)\mathfrak{S}$ ist eine lineare Vektorfunktion, deren x-Komponente

$$\gamma_{xx}\mathfrak{S}_x + \gamma_{xy}\mathfrak{S}_y + \gamma_{xz}\mathfrak{S}_z$$

ist.

τ ist ein Tensor mit den Bestimmungsstücken

$$\tau_{xx} = q + q_{xx}, \quad \tau_{yy} = q + q_{yy}, \quad \tau_{zz} = q + q_{zz},$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = q_{xy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = q_{xz}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = q_{yz},$$

wo

$$(21) \qquad \begin{cases} q = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2), \\ q_{i\varkappa} = \mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_\varkappa + \mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_\varkappa, \qquad i,\varkappa = x,y,z. \end{cases}$$

Unter der Divergenz eines Tensors τ wollen wir einen Vektor verstehen mit den Komponenten:

$$\operatorname{div}_x\tau = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \text{ etc.}$$

Aus dieser Form sieht man zunächst, daß die Kraft sich nicht wie bei Lorentz aus einer elektromagnetischen Bewegungsgröße ableitet. Durch die von Hrn. Cohn (l. c. p. 1414) ausgeführte Umformung erkennt man ferner, daß die Kräfte

1) E. Cohn, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin **53.** p. 1404. 1904.

mehrerer Ladungen sich nicht additiv aus denen einer einzigen Ladung zusammensetzen, was bei Lorentz aus der Form

$$\mathfrak{f} = \varrho\,\mathfrak{E} + \varrho\left[\frac{\mathfrak{w}}{c}, \mathfrak{H}\right]$$

sofort folgt. Aus diesem Umstande erklärt sich die Schwierigkeit der Deutung der Kaufmannschen Versuche über die Ablenkung der β-Strahlen auf Grund der Cohnschen Theorie.

In gewissen Fällen lassen sich nun die Kräfte nach der Cohnschen Theorie leicht übersehen, und wir wollen deshalb darauf eingehen, weil hier vielleicht das Experiment zur Entscheidung zwischen der Lorentzschen und der Cohnschen Theorie einsetzen könnte.

Hr. Cohn selbst hat gezeigt, daß, wenn das ganze System mitsamt der umgebenden Luft dieselbe Geschwindigkeit hat, kein Einfluß der Erdbewegung wahrnehmbar ist (l. c. p. 1415); damit ist der Trouton-Noblesche Versuch erklärt, daß auf einen Kondensator kein Drehmoment wirkt.

Anders liegt der Fall, wenn wir den Trouton-Nobleschen Versuch im vollkommenen Vakuum anstellen würden, d. h. wenn das Dielektrikum zwischen den Kondensatorplatten Vakuum ist.

Wählen wir die Plattennormale zur x-Achse, so ist Feld wie Geschwindigkeit in der Grenzschicht Metall–Äther nur von x, aber nicht von y und z abhängig (abgesehen von der beliebig klein zu machenden Randkorrektion des Kondensatorfeldes).

Berücksichtigen wir das und führen anstatt d/dt in dem Ausdruck für die Kraft $\partial/\partial t$ ein (vgl. 1. Mitteilung p. 527), setzen wir ferner $\mathfrak{v}/c = \beta$, $\mathfrak{w}/c = \beta'$, wo $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ in der Bedeutung der 1. Mitteilung p. 527, Formel (41) gebraucht sind, so bekommen wir

$$(22)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_x = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t} - \beta_x'\dfrac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} + \operatorname{div}_x \tau, \\ \mathfrak{f}_y = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\beta_x'\mathfrak{S}_y + \mathfrak{S}_x\dfrac{\partial \beta_y'}{\partial x} + \operatorname{div}_y \tau, \\ \mathfrak{f}_z = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\beta_x'\mathfrak{S}_z + \mathfrak{S}_x\dfrac{\partial \beta_z'}{\partial x} + \operatorname{div}_z \tau. \end{cases}$$

Nun ist aber das Feld dasselbe wie bei Lorentz, da kein Feld *in* der Materie existiert (vgl. III. Abschnitt); $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$

sind bei ruhendem Kondensator Null, bei bewegtem also wenigstens von zweiter Ordnung, $\mathfrak{H}$ ist von erster Ordnung in β. Sehen wir also von Größen dritter Ordnung ab, so ist

$$\mathfrak{S}_x = 0 .$$

Die translatorische Kraft $\mathfrak{C}$ ergibt sich durch Integration von $\mathfrak{f}$ über das ganze Feld. Dabei fallen die Spannungen τ und die in (22) noch auftretenden vollständigen Differentialquotienten nach x fort.

Es ergibt sich also dieselbe translatorische Kraft auf einen Kondensator im vollkommenen Vakuum wie in der ursprünglichen Lorentzschen Theorie.

Bilden wir das Drehmoment $\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{N} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{f}]\, d\, S,$$

so lautet die z-Komponente:

$$\mathfrak{N}_z = -\frac{1}{c}\int (x\,\dot{\mathfrak{S}}_y - y\,\dot{\mathfrak{S}}_x)\, d\, S - \int x\,\frac{\partial}{\partial x}(\beta_x{}'\,\mathfrak{S}_y)\, d\, S . \tag{23}$$

Der zweite Term läßt sich durch partielle Integration umformen und ergibt $\int \beta_x{}'\,\mathfrak{S}_y\, d\,S$. Dieser Ausdruck verschwindet aber, da im Vakuum $\beta' = 0$, im Metall $\mathfrak{S} = 0$ ist. Es bleibt nur der erste Term wie in der ursprünglichen Lorentzschen Theorie.[1])

Im vollkommenen Vakuum muß nach der Cohnschen Theorie der von Trouton und Noble gesuchte Effekt auftreten.

Tübingen, Physik. Institut, 14. August 1905.

1) H. A. Lorentz, Math. Enc. V, 2. Nr. 14. p. 259.

(Eingegangen 20. August 1905.)

7. *Über eine neue Methode der Darstellung von Neon*[1]*, Krypton und Xenon;* *von S. Valentiner und R. Schmidt.*

In einer Arbeit über die Okklusion der Gase durch Holzkohle bei tiefen Temperaturen zeigt Dewar[2]), daß Holzkohle bei Abkühlung auf die Temperatur der flüssigen Luft oder gar des flüssigen Wasserstoffs ein außerordentlich großes Absorptionsvermögen für gewisse Gase besitzt; er gibt an, daß 1 cm^3 frisch ausgeglühte Holzkohle bei 0^0 bez. -185^0 die in der folgenden Tabelle angegebenen Volumina der genannten Gase okkludiert (wegen des offenbar engen Zusammenhanges mit den normalen Siedepunkten der betreffenden Gase haben wir dieselben hinzugefügt):

Gas	absorb. Vol. bei 0^0 in cm^3	bei -185^0 in cm^3	Siedetemp. bei Atm.
Sauerstoff . . .	18	230	$-182,7^0$ [3])
Argon	12	175	$-186,1$ [4])
Kohlenoxyd . .	21	190	$-190,0$ [5])
Stickstoff . . .	15	155	$-195,7$ [6])
Neon	—?	—?	ca. $-240,0$ [7])
Wasserstoff . .	4	135	$-252,6$ [8])
Helium	2	15	unter $-265,0$

1) Die im folgenden beschriebene Darstellung von Neon wurde von uns in einer Sitzung der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle a. S. am 4. Mai 1905 demonstriert.

2) J. Dewar, Sur l'occlusion des gaz par le charbon de bois aux basses températures et sur le dégagement de chaleur qui l'accompagne. Ann. de chim. et d. phys. (8) III. p. 5. 1904.

3) L. Holborn, Ann. d. Phys. **6.** p. 254. 1901.

4) W. Ramsay u. M. W. Travers, Phil. Trans. **197.** p. 72. 1901.

5) K. Olszewski, Compt. rend. **99.** p. 706. 1884.

6) K. Fischer u. H. Alt, Sitzungsber. d. Münchener Akad. **32.** p. 134. 1902.

7) M. W. Travers u. A. Jaquerod, Phil. Trans. **200.** p. 177. 1902.

8) l. c. p. 156.

Diese für verschiedene Gase verschieden starke Absorptionsfähigkeit der Kohle benutzte Dewar, in einigen Substanzen und Gasen Neon, Wasserstoff und Helium nachzuweisen, sowie dazu, diese flüchtigsten Gase der Luft von den weniger flüchtigen zu trennen, zu welchem Zwecke man bisher die sehr umständliche Methode der fraktionierten Destillation verwandt hatte. Er[1]) ließ z. B. durch 30 g Kohle, die sich in einem U-Rohre in flüssiger Luft befand, eine große Menge Luft durchstreichen; Stickstoff, Argon, Sauerstoff wurden absorbiert, nur Neon, Wasserstoff und Helium, Gase, die in ganz geringer Menge in der Luft vorhanden sind, durch das U-Rohr in das daran angeschlossene Spektralrohr hindurchgelassen. In diesem konnte Dewar einige helle gelbe Neonlinien nachweisen, ebenso sah er, wenn auch schwächer, die kräftigeren Heliumlinien. Bei Anwendung von 40—50 l Luft erhielt er ein Gemisch, welches deutlich Neon, Wasserstoff und Helium zeigte. Wenn man bedenkt, daß in 1 Million Vol. Luft 1 bis 2 Vol. Helium und 10 bis 20 Vol. Neon enthalten sind, so erkennt man, daß diese Dewarsche Methode zum Nachweis ganz geringer Mengen dieser Gase äußerst geeignet ist.

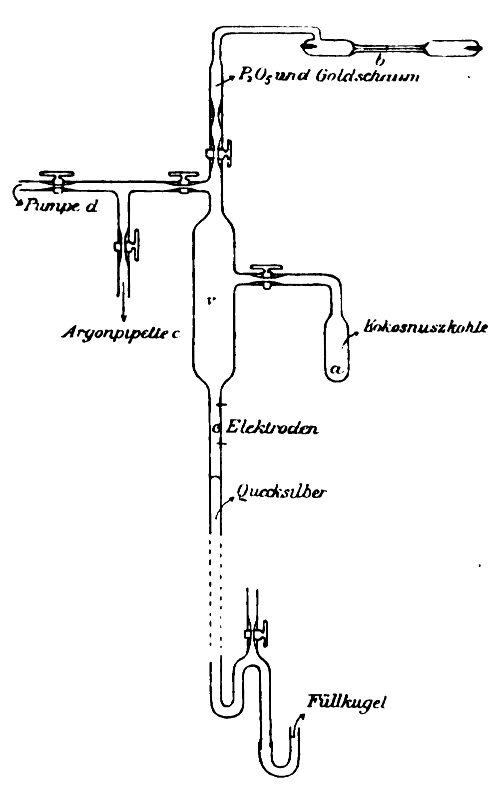
Der Gedanke liegt nicht fern, die Okklusionsfähigkeit der Kohle auch zur Darstellung reinen Neons (speziell zwecks Füllung von Spektralröhren) zu verwenden, und das haben wir in folgender Weise ausgeführt:

Von vornherein erschien es vorteilhaft, die atmosphärische Luft von ihren chemisch aktiven Bestandteilen auf dem bekannten Wege zu befreien, also zunächst ein größeres Quantum Argon aus der Luft herzustellen, und auf dieses das Okklusionsverfahren mit Kohle anzuwenden. Man gewinnt dadurch einen doppelten Vorteil: erstens ist man sicher, nicht Spuren von Stickstoff dem herzustellenden Neon beigemengt zu finden — in der Tat ergaben unsere ersten Versuche, daß man nicht darauf rechnen kann, reines Neon zu erhalten, wenn das zu absorbierende Gas noch durch Stickstoff verunreinigt ist —, und weiter gewinnt man auf diese Weise gleichzeitig ein von Neon befreites Argon, welches für physikalische Präzisons-

1) J. Dewar, Séparation directe, sans liquéfaction, des gaz les plus volatils de l'air. Ann. d. chim. et d. phys. (8) III. p. 12. 1904.

messungen natürlich wertvoll ist. Dieser Erwägung folgend haben wir bei unserer Neondarstellung Argon zugrunde gelegt, welches von Beimengung irgend welcher aktiven Elemente vollkommen gereinigt war.

Zu der weiteren Operation konstruierten wir den in nebenstehender Figur wiedergegebenen Apparat. Ein ca. 100 ccm großes, durch Einführen von Quecksilber veränderliches Volumen v ist verbunden



1. mit dem Kohlereservoir a (enthaltend ca. 5 g Kohle aus Kokosnußschale),
2. mit dem mit Neon zu füllenden Gefäß b (z. B. Spektralröhre),
3. mit der das Argon enthaltenden Pipette c,
4. mit der Quecksilberpumpe d,

unter Vorschaltung je eines Hahnes. Vor der Spektralröhre liegt ein kleines, mit Phosphorpentoxyd und Goldschaum gefülltes Röhrchen, welches etwaige Feuchtigkeit und Quecksilberdämpfe fernhalten soll.

Zunächst wird bei verschlossener Pipette unter kräftigem Erhitzen der Kohle der ganze Apparat möglichst sorgfältig mittels Quecksilberpumpe evakuiert, dann Pumpe, Kohlereservoir, Spektralrohr abgeschlossen und in das veränderliche Volumen v eine größere Menge Argon aus der Pipette eingelassen; öffnet man nun den Hahn zur Kohle, die auf die Temperatur der

flüssigen Luft gebracht ist, so wird das Argon von der Kohle absorbiert, das im Argon enthaltene Neon[1]) und die geringen Spuren Helium, die sich in der Luft finden, bleiben in *v* zurück. Nach einiger Zeit, ca. 10—15 Minuten, wird der Hahn zur Kohle geschlossen. Um kontrollieren zu können, ob sämtliches Argon absorbiert ist, haben wir zwei Elektroden in das Quecksilbersteigrohr *e* eingeschmolzen und untersuchen die zwischen ihnen übergehende Entladung eines Induktoriums spektralanalytisch. Nach Abschluß der Kohle drückt man mittels des Quecksilbers das Gas in die Spektralröhre. Durch dieses Verfahren des veränderlichen Volumens erreicht man, daß nur sehr wenig des wertvollen Gases in den Verbindungsröhren zurückbleibt und so dem weiteren Gebrauch verloren geht. Nach Schließen des Hahnes am Spektralrohr wird man vorteilhaft das Quecksilber wieder herunterlassen und auf diese Weise ein Vakuum herstellen, in welches nach Öffnen des Hahnes zur Kohle das darüber befindliche Neon einströmt; dieses drückt man wieder in die Spektralröhre und kann so fortfahrend nach Art einer Quecksilberpumpe den ganzen Raum über der Kohle, der wegen seiner tiefen Temperatur ziemlich viel Neon enthält, abpumpen, so daß auch dieses Quantum nutzbar gemacht wird.

Aus dem bisher Gesagten ist zu entnehmen, daß in dem so gewonnenen Neon noch Spuren von Helium enthalten sein müssen, und der Anblick der Spektralröhre durch ein Spektroskop läßt auch Andeutungen der helleren Heliumlinien erkennen. Um Neon vom Helium vollständig zu befreien, kann man sich die Tatsache zunutze machen, daß die Kohle bei höherem Druck, als dem weniger Millimeter, auch merklich Neon absorbiert[2]), wie Dewar dies von Wasserstoff nachweisen konnte, indem die Kohle Wasserstoff bei Atmosphärendruck sehr stark absorbiert, verhältnismäßig wenig aber bei sehr geringem Druck. Daß Neon sich nicht sehr davon verschieden

1) Nur äußerst geringe, wenn überhaupt merkliche Spuren werden bei dem geringen Druck durch die Kohle (in flüssiger Luft) okkludiert, unter dem sich Neon in dem verhältnismäßig großen Volumen *v* bei der Trennung befindet.

2) Eine diesbezügliche weitergehende Untersuchung ist in Vorbereitung.

verhalten werde, war von vornherein wahrscheinlich, da die normalen Siedepunkte von Neon und Wasserstoff nicht weit voneinander liegen. Es zeigte sich denn auch schon bei unseren ersten Versuchen, daß man über einen gewissen Druck nicht hinauskommt, falls man Neon in Verbindung mit Kohle läßt. Diese Erkenntnis bildete zum Teil die Veranlassung, weshalb wir bei der Trennung des Neon vom Argon dem Neon ein möglichst großes Volumen zu verschaffen suchten, so daß es während der Trennung unter sehr geringem Druck stand. Soll nun das Neon von den Spuren des Heliums befreit werden, so bringt man es bei möglichst geringem Volumen unter so hohem Druck mit Kohle (in flüssiger Luft) in Verbindung, daß es von der Kohle — bis zu einem gewissen Druck — okkludiert wird, schließt dann die Kohle ab und entfernt das zurückbleibende heliumhaltige Neon mit der Quecksilberpumpe. Das nach Entfernen der flüssigen Luft aus der Kohle sich loslösende Gas ist spektralanalytisch reines Neon.

Das gewonnene Gas haben wir sorgfältig spektralanalytisch untersucht — zum Vergleich dienten die inzwischen erschienenen Balyschen Messungen des Neonspektrums[1]) sowie eine im Physikalischen Institut zu Halle befindliche Neonröhre von Hilger (London)[2]) —, wir konnten auch bei Anwendung der von Lilienfeld[3]) angegebenen empfindlichen Prüfungsmethode eine hervorragende Reinheit konstatieren, dank der vortrefflichen Eigenschaft der Kohle. Es ist indessen wohl nicht unnütz, hinzuzufügen, daß eine solche Reinheit nur erzielt werden kann, wenn die einzelnen vorgeschriebenen Operationen mit größter Sorgfalt ausgeführt werden.

Den Druck, unter dem das Neon in den von uns untersuchten Spektralröhren steht, haben wir — da wir des un-

1) E. C. Baly, The Spektra of Neon, Krypton and Xenon. Phil. Trans. 202. p. 183. 1904.

2) Wie sich später herausstellte, enthielt die englische Röhre noch ziemlich viel Argon. Schaltete man nämlich eine Leydener Flasche ihr parallel, so ging das sonst orangerote Licht der Kapillare in ein intensiv blaurotes über, während gleichzeitig im Spektrum das zweite (blaue) Argonspektrum vorherrschend wurde. Noch kräftiger trat diese Erscheinung hervor, wenn man die von Lilienfeld angegebene Parallelschaltung einer Selbstinduktion benutzte.

3) J. E. Lilienfeld, Ann. d. Phys. 16. p. 931. 1905.

nützen Volumens und auch der Quecksilberdämpfe wegen ein empfindlicheres Manometer vermeiden mußten — aus den Dimensionen des Apparates, der verwendeten Menge Argon und dem von Ramsay und Travers angegebenen Gehalt von Neon in der Luft für diese Untersuchung genügend genau bestimmen können. Das Spektrum ist in eigentümlicher Weise vom Druck in der Spektralröhre abhängig.[1]) Bei etwa 3—4 mm Druck zeigt sich beim Durchgang der elektrischen Entladung eine charakteristische Graublaufärbung an den Elektroden, im Gegensatz zu dem sonst äußerst grell orangeroten Licht. Auch im Spektralapparat macht sich diese Änderung deutlich bemerkbar; es zeigt sich nämlich, abgesehen von dem sehr glänzenden Linienspektrum, ein fast kontinuierlich erscheinendes Spektrum. Mit anderen Worten: man sieht ein Linienspektrum auf hellem Untergrund. Bei abnehmendem Druck tritt dieser mehr und mehr zurück, und die Linien werden immer schärfer und glänzender. Es ist ein prachtvoller Anblick, die Unzahl von Linien im Spektralapparat beobachten zu können, die bei geringem Druck mit enormer Schärfe hervortreten, wie man es in anderen Fällen nicht kennt. Für spektralanalytische Zwecke ist es daher vorteilhaft, Spektralröhren mit nicht zu hohem Druck zu verwenden. Über weitere Einzelheiten des Spektrums soll an anderer Stelle berichtet werden.

Nachdem sich in der geschilderten Weise die gute Brauchbarkeit der Holzkohle zur Darstellung reinen Neons erwiesen hatte, erschien es uns nicht aussichtslos, durch gewisse Modifikationen der Methode auch die Trennung der übrigen im Argon noch befindlichen Edelgase, Krypton und Xenon, zu erreichen. Krypton, in atmosphärischer Luft im Verhältnis 1:20 Millionen[2]) enthalten, hat den normalen Siedepunkt $-151,7^{0}$ [3]); Xenon, in der Luft im Verhältnis 1:170 Millionen[2]) enthalten, hat den normalen Siedepunkt $-109,1^{0}$.[3]) Es war also zu vermuten, daß sich eine höhere Temperatur als die

1) Die im folgenden beschriebene Erscheinung hat auch Baly beobachtet.

2) W. Ramsay, Zeitschr. f. physik. Chem. **44**. p. 74. 1903.

3) W. Ramsay u. M. W. Travers, Phil. Trans. **107**. p. 72. 1901.

der flüssigen Luft, etwa — 120° oder — 80°, finden lasse, bei welcher Kohle Krypton und Xenon vollständig, Argon dagegen nur bis zu einem gewissen Druck absorbieren würde, so daß man durch Abpumpen allmählich sämtliches Argon aus der Kohle entfernen könne und diese nur noch ein Gemisch reinen Kryptons und Xenons festhalte. Nachdem wir diese Erwartung bestätigt gefunden hatten, war die nächste Aufgabe natürlich die, in analoger Weise auch Krypton und Xenon voneinander zu trennen.

Die Möglichkeit der Trennung des Krypton und Xenon vom Argon stellten wir durch folgenden Vorversuch fest: das abgeschlossene Kohlenreservoir enthielt von einer vorhergegangenen Neondarstellung noch Argon, in welchem sich auch Spuren von Krypton und Xenon befinden mußten. Wir brachten die Kohle durch Anwendung eines Gemisches von Kohlensäureschnee und Äther auf die Temperatur — 80° und pumpten mit der Quecksilberpumpe so scharf wie möglich ab, was allerdings viele Stunden in Anspruch nahm, da Kohle auch bei dieser Temperatur noch Argon bei ziemlich geringem Druck zu absorbieren vermag. Nach Fortnahme des Kohlensäureäthergemisches und Erwärmen der Kohle auf Zimmertemperatur lösten sich ganz geringe Spuren von Gas los, die wir in der früher angegebenen Weise in das angeschlossene Spektralrohr drückten. Mit großer Deutlichkeit traten im Spektrum, besonders an der negativen Elektrode, die bekanntlich Verunreinigungen am ersten zeigt, die helle gelbe und grüne, sowie einige blaue Kryptonlinien hervor, vielleicht auch Andeutungen von Xenonlinien, während die Argonlinien kaum zu bemerken waren. In der Kapillare des Spektralrohres war hauptsächlich noch Argon zu sehen, ein Zeichen, daß wir noch nicht genügend evakuiert hatten.

Indessen ermutigte dieser Vorversuch zu weiterem Vorgehen. Drei Punkte des Verfahrens hatten wir als verbesserungsbedürftig und verbesserungsfähig erkannt. Erstens erschien es wünschenswert, für die weiteren Versuche ein mit Krypton und Xenon angereichertes Argon zu verwenden, welches man erhalten kann, wenn man flüssige Luft verdampfen läßt und den letzten Rest zur Argondarstellung benutzt. Wir ließen also 3 Liter flüssige, sehr sauerstoffreiche Luft (aus einer Hampson-

schen Maschine[1])) ruhig verdampfen und fingen die letzten 3—4 cm^3 in einem Gasometer auf. Dieses an Argon, Sauerstoff, Krypton und Xenon verhältnismäßig reiche, noch etwa 10—15 Proz. Stickstoff enthaltende Gasgemisch wurde in gewohnter, jedoch den Umständen nach etwas modifizierter Weise von allen aktiven Bestandteilen vollkommen befreit und ergab etwa $^1/_4$ Liter Argon, welches größere Mengen von Krypton und Xenon enthalten mußte. Das Gemisch wurde wieder in einer Quecksilberpipette aufgefangen.

Die zweite Verbesserung bestand darin, daß wir die Kohle nicht, wie bei unserem Vorversuch der Bequemlichkeit halber, auf -80^0, sondern auf -120^0 temperierten; man erhält eine solche Temperatur, wenn man Äther durch Aufspritzen von flüssiger Luft zum Gefrieren bringt; der gefrorene Äther geht bei kräftigem Umrühren in eine breiige Masse über, die man auf ihrer Temperatur von -120^0 erhalten kann, wenn man von Zeit zu Zeit etwas flüssige Luft nachgibt. Es war zu vermuten, daß bei dieser Temperatur wesentlich mehr Krypton und Xenon festgehalten werde, als bei -80^0.

Die dritte Schwierigkeit bestand in dem langwierigen Abpumpen des Argons aus der auf -120^0 abgekühlten Kohle. Diese haben wir in einfacher Weise dadurch überwunden, daß wir ein anderes Quantum Kohle im Apparat auf die Temperatur der flüssigen Luft brachten, und von dieser das Argon okkludieren ließen. Wir veränderten also unseren Apparat dahin, daß wir noch ein zweites Kohlereservoir mit Hahnverschluß an das Volumen v ansetzten und es anfangs mit evakuierten. Zunächst ließen wir nun ein Quantum Argon aus der Pipette in v einströmen, öffneten den Hahn zum ersten Kohlereservoir, das sich auf der Temperatur -120^0 befand und durch welches das Krypton und Xenon vollständig, das Argon bis zu einem gewissen Druck absorbiert wurden. Darauf öffneten wir den Hahn zum zweiten Kohlereservoir, das die Temperatur der flüssigen Luft hatte und infolgedessen das noch im Volumen v vorhandene Gas sofort vollständig okklu-

1) Der Hampsonsche Prozeß der Luftverflüssigung ist an sich eine Fraktionierung, so daß man unter den günstigsten Umständen aus 1 Liter flüssiger Luft etwa 0,1 bis 0,3 cm^3 Xenon gewinnen kann. (Vgl. M. W. Travers, Experimentelle Untersuchung von Gasen 1905.)

dierte und ein hervorragendes Vakuum herstellte. In dieses Vakuum strömte aus dem ersten Reservoir sogleich wieder Argon ein, da es ja bei -120^0 nur bis zu einem gewissen Druck von der Kohle okkludiert werden kann, und ging nach Öffnen des Hahnes zum zweiten Reservoir in dieses über. Wir ließen, nachdem wir uns von dem regelmäßigen Verlauf dieses Vorganges überzeugt hatten, beide Reservoire offen, so daß das Argon dauernd von dem ersten in das zweite wandern mußte. Wie früher waren in das Steigrohr Elektroden eingeschmolzen, um mit Hilfe der elektrischen Entladung die Vorgänge verfolgen zu können. Lange Zeit zeigte das Rohr dasselbe Bild, erst nach $1^1/_2$—2 Stunden traten allmählich beim Durchgang der Entladung Fluoreszenzerscheinungen der Glaswand auf, die eine Abnahme des herüberwandernden Argons anzeigten. Nach weiteren ein bis eineinhalb Stunden schien uns das Vakuum gut genug zu sein. Wir schlossen den Hahn des zweiten Reservoirs und ließen das nach Fortnahme des -120^0 Bades aus dem ersten Reservoir frei werdende Gas in das angeschlossene Spektralrohr eintreten. Das Bild im Spektralapparat zeigte in einer unsere Erwartungen übertreffenden Reinheit das Spektrum des Kryptons. Da wir verhältnismäßig viel von diesem seltenen Gas gewonnen hatten, war der Druck im Spektralrohr so hoch, daß wir wie beim Neon den eigentümlichen hellen Hintergrund, über den die Spektrallinien gelagert sind, beobachten konnten. Parallelschaltung einer ziemlich großen Kapazität, dem großen Druck in der Röhre entsprechend, ergab das prachtvolle zweite, sehr linienreiche Kryptonspektrum. Es sei bemerkt, daß wir in dem verwendeten Argon nicht die geringsten Spuren von Neon gefunden haben, was ja in der eigentümlichen Darstellungsweise des Argons aus flüssiger Luft seine Erklärung findet.

Einigermaßen überrascht waren wir, bei dem beschriebenen Verfahren der Kryptondarstellung keine merklichen Andeutungen von Xenonlinien im Spektrum zu finden; wir hatten gefürchtet, es werde sich bei Fortnahme des Temperaturbades von -120^0 auch gleichzeitig das in der Kohle befindliche Xenon loslösen und die Darstellung reinen Kryptons sehr komplizieren. Xenon wird indessen außerordentlich zäh von Kohle festgehalten, so daß bei -80^0 Xenon sich noch nicht

merkbar loslöst. Um reines Krypton zu erhalten, läßt man die ursprünglich auf -120^0 temperierte Kohle nur bis -80^0 sich erwärmen; das dabei frei werdende Gas ist, wie unsere Beobachtungen gezeigt haben — zum Vergleich wurden wiederum die Balyschen Messungen und eine Kryptonröhre von Hilger herangezogen —, spektralanalytisch reines Krypton.

Größere Schwierigkeiten bereitete es anfangs, reines Xenon zu erhalten. Bei Erwärmung der Kohle auf höhere Temperaturen, etwa -15^0 bis 0^0, löste sich allerdings ein Gas ab, dessen Spektrum sämtliche Xenonlinien, daneben aber auch die helle gelbe und grüne Kryptonlinie zeigte. Erst bei Anwendung noch höherer Temperaturen gelang es, merklich reines Xenon in folgender Weise darzustellen: das Krypton-Xenongemisch ließen wir bei der Temperatur der flüssigen Luft zunächst in dem einen Kohlereservoir okkludieren, darauf die Kohle sich wieder allmählich erwärmen, während nun das andere Reservoir in flüssiger Luft tauchte und das aus dem ersten sich loslösende Gas, das Krypton und einen Teil des Xenons, aufnahm; nachdem bis auf etwa $+20^0$ erwärmt war, und sich kein Gas mehr loslöste, schlossen wir das in flüssiger Luft befindliche Reservoir ab und erhitzten das andere mit der Spiritusflamme; das dabei frei werdende Gas wurde in die Spektralröhre gedrückt. Schon der äußere Anblick der Entladung zeigte bei parallel geschaltetem Kondensator das dem Xenon charakteristische grüne Leuchten. Die Untersuchung des Spektrums bestätigte, daß wir spektralanalytisch reines Xenon gewonnen hatten.

Es sei zum Schluß noch eine, zum Teil auch von Baly hervorgehobene, den Edelgasen eigentümliche Eigenschaft erörtert. Bei Gegenwart dieser tritt nämlich im Entladungsrohr beim Durchgang der Entladung ein heftiges Zerstäuben der Aluminiumelektroden — stärker noch bei Platinelektroden — ein, was gleichzeitig eine Verminderung des Druckes in der Röhre zur Folge hat, so daß die Röhren nach längerem Funken unbrauchbar werden, da sie schließlich ein vollkommenes Vakuum zeigen. Macht sich dies schon bei Argon und Helium unangenehm bemerkbar, so doch namentlich bei Neon, Krypton und Xenon. Indessen konnten wir bei den vier ersten der genannten Gase diesen Übelstand durch Anwendung von Alu-

miniumelektroden in Zylinderform bedeutend vermindern. Bei Xenon jedoch nützen auch diese nichts. Schon nach ziemlich kurzem Gebrauch — meist bei parallel geschaltetem Kondensator — hatten mit Xenon gefüllte und mit Zylinderelektroden versehene Röhren, die anfangs einen Druck von 1—2 mm hatten, ein so hohes Vakuum, daß keine Entladung mehr hindurchging. Durch Erhitzen der Röhren an den Stellen, wo sich die Aluminiumspiegel niedergeschlagen hatten, konnten wir einen Teil des Xenons wieder frei machen, jedoch nur für wenige Augenblicke: ganz kurzes Funken erzeugte wiederum das frühere Vakuum.

Vorstehende Untersuchungen wurden im Physikalischen Institut der Universität zu Halle a. S. vom November 1904 bis Juni 1905 ausgeführt. Es sei uns gestattet, Hrn. Prof. Dr. E. Dorn für das den einzelnen Versuchen entgegengebrachte Interesse unseren besten Dank auszusprechen.

Zu großem Danke sind wir auch Hrn. Dr. E. Erdmann verpflichtet, der uns in liebenswürdiger Weise die flüssige Luft für alle Untersuchungen zur Verfügung stellte.

Charlottenburg-Halle, Juli 1905.

(Eingegangen 2. August 1905.)

8. *Versuche über Metallstrahlung;*
von F. Streintz und O. Strohschneider.

Erste Mitteilung.

(Hierzu Taf. II u. III, Figg. 1—11.)

(Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akad. der Wissensch. zu Wien. Mathem.-naturw. Kl. 114. Abt. IIa. Mai 1905.)

Die Metalle *Magnesium*, *Aluminium*, *Zink* und *Kadmium* besitzen die Eigenschaft, sich in blankem Zustande auf mit Jodkalium getränktem Papier abzubilden.[1]) Die Zeit, die zur Entstehung gut sichtbarer Jodbilder erforderlich ist, hängt wesentlich von der Natur der Metalle ab. Magnesium und Aluminium rufen bereits nach einer halben bis zwei Minuten, Zink nach ein bis zwei, Kadmium erst nach mehreren Stunden Bilder hervor. Es konnte festgestellt werden, daß die erforderliche Expositionsdauer in einem Zusammenhange mit der Stellung der Metalle in der elektrischen Spannungsreihe steht. Diese kann nach Ostwald[2]) mittels der Quecksilber-Tropfelektrode ermittelt werden. Bei Berührung von Quecksilber mit verdünnter Schwefelsäure, also in der Kombination $Hg|Hg_2SO_4$ in H_2SO_4 (1 *n*) bildet sich eine Potentialdifferenz von —0,99 Volt aus. Bestimmt man die elektromotorischen Kräfte der verschiedenen Metalle in den Normallösungen ihrer Sulfate gegen Quecksilber in seinem entsprechenden Salze und zieht von dem gefundenen Werte 0,99 Volt ab, dann erhält man die sogenannten Einzelpotentialdifferenzen der Metalle in ihren Lösungen. Auf diesem Wege ergeben sich für Magnesium + 1,24, für Aluminium + 1,03, für Zink + 0,525 und für Kadmium + 0,11 Volt. Die Spannungsreihe erscheint demnach in folgender Ordnung:

$$+ \ldots \mathrm{Mg},\ \mathrm{Al},\ \mathrm{Zn},\ \mathrm{Cd}, \ldots -.$$

1) F. Streintz, Physik. Zeitschr. 5. p. 736. 1904.

2) W. Ostwald, Grundlagen der anorgan. Chemie p. 645. 1900.

Der aus den Potentialdifferenzen berechnete ***elektrolytische Lösungsdruck*** dieser Metalle ist ein ungeheurer; er beträgt für Magnesium 10^{44} und für Kadmium 10^{7} Atmosphären. Einen nach etwa tausend Atmosphären zählenden Lösungsdruck besitzt noch ***Eisen***, während die Drucke von Kobalt, Nickel, Zinn, Blei bis herab zu den Edelmetallen unter einer Atmosphäre gelegen sind. Diese Metalle, das Eisen eingeschlossen, ließen Jodkalium unverändert.

Aus dem Ergebnisse wurde der Schluß gezogen, daß es die durch den elektrolytischen Lösungsdruck in die Umgebung entsendeten Metallionen sind, die die Zerlegung des Jodkaliums hervorrufen. Da eine Wirkung auch nachzuweisen ist, wenn Metall und Papier durch eine geringe Luftschicht voneinander getrennt sind, so muß angenommen werden, daß eine *Ionisierung* der dazwischenliegenden Luft erfolgt.[1]) Die Erscheinung hat somit den Charakter einer Strahlung und soll als *Metallstrahlung* bezeichnet werden.

Versuche mit Jodkaliumpapier sind vorteilhaft anzustellen, wenn die Wirkung schon nach kurzer Zeit ersichtlich gemacht werden soll. Die Methode hat aber den Nachteil, daß sich die hervorgerufenen Bilder nicht festhalten lassen, offenbar, weil das spurenweise abgeschiedene Jod bald verdampft. Um die entstehenden Bilder vorweisen zu können, haben wir für die nachstehend beschriebenen Versuche die gewöhnliche photographische Bromsilbergelatine-Glasplatte gewählt.[2]) Zunächst handelte es sich darum, die bereits mit Jodkalium angestellten Versuche zu überprüfen.

Die untersuchten Metalle waren als chemisch rein von der Fabrik E. Merck in Darmstadt bezogen worden und bestanden aus kleinen, rechteckigen Blechen, die in der Dunkelkammer sorgfältig blank gefeilt und sodann rasch und unmittelbar auf die Schichtseite der Glasplatte aufgelegt wurden. Nach 24 stündiger Einwirkung wurden die Bleche abgehoben. Die Platte hatte ein *latentes* Bild erhalten, das nach den gewöhnlichen Verfahren hervorgerufen und fixiert wurde. Fig. 1,

---

1) Dabei kann, wie Blaas und Czermak vermuten, Ozon und unter Umständen auch Wasserstoffsuperoxyd entstehen.

2) Auch Films und einige photographische Papiere zeigten sich verwendbar.

Taf. II, zeigt eine Kopie des Negativs von Magnesium (links), Zink und Aluminium (rechts). Man sieht zunächst, daß das Bild von Magnesium sehr kräftig, das von Zink schwach, aber immerhin deutlich begrenzt ist. Aluminium ist weniger hell wie Magnesium, aber bedeutend kräftiger als Zink. Der am oberen Rande des Magnesiumbildes befindliche dunkle Querstreifen sowie die senkrecht darauf stehenden gebrochenen Linien rühren daher, daß das Blech kleine Vertiefungen besaß, in die die Feile nicht eindrang; es war an diesen Stellen von der haftenden Oxydschicht nicht befreit worden.

Die zahlreichen Punkte in der Umgebung des Magnesiumbildes rühren von Feilspänen her, die auf die Schicht gefallen waren; jeder dieser Punkte besitzt einen kleinen Hof. Das von Aluminium erzeugte Bild enthält wellenförmige Streifen; sie verdanken ihre Entstehung derselben Ursache wie bei Magnesium. Am wenigsten eben war das Zinkblech; es war früher einmal erhitzt worden, wobei das Metall an einigen Stellen der Oberfläche schmolz.

In der Fig. 2, Taf. II, sind gleichfalls die „Porträts" der genannten Metalle enthalten, nur ist noch Kadmium hinzugetreten. Nicht als bloße Wiederholung des Versuches ist die Fig. 3, Taf. II, entstanden; wir hatten uns vielmehr damit die Aufgabe gestellt, Luft und Feuchtigkeit tunlichst fernzuhalten. Zu diesem Zwecke befanden sich die photographische Platte und die Bleche in einem geräumigen Trockengefäße, durch das ein Strom von gut getrocknetem Kohlendioxyd geleitet wurde. In dem Gase wurden die Bleche blank gefeilt und auf die Platte gelegt. Darauf wurde mittels einer Wasserluftpumpe das Gas entfernt und das Gefäß leer gepumpt. Die Berührungsdauer von Platte und Blechen dauerte wieder 24 Stunden. Die Bilder sind weniger dicht, die Kontraste zwischen ihnen geringer wie beim ersten Versuche. Einen Schluß auf den Einfluß der Feuchtigkeit zu ziehen, wird kaum statthaft sein. Es hat sich nämlich wiederholt gezeigt, daß die Bilder auch unter gleichen Verhältnissen nicht immer gleich geraten. Zudem kann man bei dem Versuche 3 wohl kaum von einem Ausschlusse der Feuchtigkeit reden. In erster Linie wird die photographische Schicht Wasser kondensiert enthalten. Aus diesem Grunde wurde die Platte durch trockenes

Jodkaliumpapier ersetzt. In der Tat wirken dann in vollkommen getrocknetem Kohlendioxydstrom selbst die Metalle Magnesium und Aluminium nicht mehr.

Um zu zeigen, wie sich die Erscheinung gestaltet, wenn zwischen Platte und Metall eine Schicht von Papier gelegen war, wurde ein Versuch mit Metallpulvern angestellt. In einen Streifen von Karton wurden kreisförmige Löcher eingeschnitten und darauf der Karton auf einer Seite mit Schreibpapier überzogen. Diese Seite wurde nun auf die Schicht flach aufgelegt. In die entstandenen Vertiefungen fielen die Pulver, die beim Feilen der Bleche entstanden. Nach 24 Stunden Expositionsdauer erhielt man ein Negativ, dessen Kopie in Fig. 4, Taf. II, vorliegt. Das Scheibchen oben rührt vom Aluminium-, das in der Mitte vom Zink-, das unten befindliche vom Kadmiumpulver her. Merkwürdigerweise wird hier das Zink von Kadmium geschlagen.

Aus den Versuchen mit Jodkaliumstärkepapier hatte sich ergeben, daß die Metalle ihre Wirksamkeit zum großen Teile einbüßen, wenn die abzubildenden Flächen längere Zeit der Luft ausgesetzt waren.

Wir haben zwei Versuche in dieser Richtung mit der photographischen Platte angestellt. Beim ersten Versuche (Fig. 5, Taf. II) wurde ein blankes Aluminiumblech, nachdem es durch 24 Stunden auf der Schicht gelegen war, verschoben, ohne neuerlich gefeilt zu werden und an der neuen Stelle wieder 24 Stunden liegen gelassen. In gleicher Weise wurde das Blech noch auf eine dritte und vierte Stelle gebracht und dieselben Zeiten sich überlassen. Das zweite Bild ist bereits sehr schwach, das dritte und vierte gerade noch erkenntlich. Der zweite Versuch wurde mit Magnesiumstreifchen, die auf Glas aufgeklebt waren, angestellt. Die Streifchen waren sämtlich vorsichtig blank geschabt worden, lagen aber verschieden lang auf der Schicht. Fig. 6, Taf. II, zeigt das Ergebnis. Das erste Bildchen links ist nach dreistündiger Einwirkung entstanden, die darauf folgenden nach 4, 5, 7, 10, 15, 20 und 29stündiger Berührungsdauer. Man sieht, daß die Dichte der Bilder mit der Expositionszeit nur wenig zunimmt, nur das letzte Bild macht als besonders kräftiges eine Ausnahme.

Um die Abnahme der Wirkung mit der Entfernung des

Metalles von der Schicht festzustellen, wurden zwei Ringe, ein kleinerer aus Magnalium, ein größerer aus Aluminium, schief auf die Platte gelegt, so daß sie an einer Stelle direkt auf der Schicht lagen, an einer gegenüberliegenden jedoch auf einem 0,5 mm dicken Streifen von Glimmer ruhten.

Die zwischen Metall und Platte liegende Luftschicht nahm also von 0 bis 0,5 mm zu. Die Ringe sind in Fig. 7, Taf. III abgebildet. Mit wachsender Entfernung verbreitern sich die Bilder, beim äußeren Ring von 2,5 bis auf etwa 5 mm, die Ränder werden unscharf. Es sieht also so aus, als ob eine *Zerstreuung* der Metallstrahlen durch die Luft erfolgt wäre. Ein zweiter Versuch (Fig. 7a, Taf. III) wurde mit dem Magnaliumring allein angestellt; hier betrug die Dicke des Glimmerstreifens etwa das Doppelte (1 mm). Man erhält aus Fig. 7, Taf. III auch den Eindruck, als sei durch das Glimmerstückchen eine Art von Spiegelung eingetreten, wenn nicht etwa herabgefallene Feilspäne die Ursache sind, daß in der nächsten Nachbarschaft des Glimmers die Ringstücke kräftiger erscheinen. Wir stellten daher einen dritten Versuch (Fig. 7b, Taf. III) mit beiden Ringen an, bei dem der Glimmer durch ein 0,5 mm dickes Plättchen aus Hartgummi ersetzt worden ist. Beachtenswert ist noch bei den Versuchen mit den Ringen, daß das ganze Feld wie mit Licht erfüllt erscheint; die Grenzen der isolierenden Streifen heben sich scharf und dunkel von der Umgebung ab.

In einem von Kahlbaum im Dezember vorigen Jahres in Basel gehaltenen Vortrage[1]) wurden Versuche vorgeführt, die einen Einfluß der Schwere auf die Intensität der Erscheinung dartun sollten. Nach Kahlbaum würde von einem Zinkdach eine Art von feinem Metallregen niedergehen. Da ein Einfluß der Gravitation recht unwahrscheinlich ist, so wurde ein Versuch gemacht, in der sie hätte zur Geltung kommen müssen. Ein Magnesiumstreifen wurde dreimal hintereinander blank in eine Kassette mit sehr starken Federn eingelegt. Die Platte lag beim ersten Male horizontal nach oben, beim zweiten nach unten, beim dritten war sie vertikal gestellt.

1) G. W. A. Kahlbaum u. J. Steffens, Physik. Zeitschr. **6**. p. 53. 1905.

Die Berührungsdauer war in allen Lagen genau dieselbe, 13 Stunden. Die Bilder, Fig. 8, Taf. III sind mit *o* (oben), *u* (unten) und *s* (seitlich) bezeichnet. Ein Unterschied in der Dichte ist nicht vorhanden.

Außer den bisher verwendeten Metallen gibt es bekanntlich noch einige, die stärker elektropositiv sind. Es sind dies die Alkalimetalle. Aus der Heftigkeit, mit der sie Wasser zersetzen, schließt man, daß die bekannteren unter ihnen in die Spannungsreihe zu stellen sind, wie folgt:

$$+ \ldots \mathrm{K}, \mathrm{Na}, \mathrm{Li} \ldots\ldots\ldots - .$$

Dem Lithium schließt sich rechts zunächst das Magnesium an. Wir haben versucht, auch diese Metalle photographisch abzubilden, zunächst mit Hilfe von trockener Kohlensäure auf die beim Versuche 3 erfolgte Weise. Kalium und Natrium wurden aber sofort stumpf, nur Lithium hielt sich längere Zeit blank. Die Metalle werden gewöhnlich in Steinöl aufbewahrt, um sie vor dem Angriffe feuchter Luft zu schützen. Trotzdem überziehen sie sich auch darin mit einer Kruste, weil das Steinöl etwas Luftsauerstoff aufnimmt. Diese Eigenschaft eröffnete die Aussicht, auch die Wirkung der Alkalimetallstrahlen nachzuweisen. Die photographische Platte kam in ein Bad von Steinöl, in dem die Metalle zerschnitten wurden. Sie wurden dann mit ihren Schnittflächen auf die Platte aufgelegt und mit Gewichten beschwert. Um einen Vergleich der Wirkung mit den anderen Metallen zu erhalten, waren auch diese auf die Platte gelegt worden. Nach 24 stündiger Berührungsdauer wurden sie abgehoben und die Platte mit Benzin und Weingeist gereinigt. Beim Entwickeln erhielt man deutliche Bilder der früher untersuchten Metalle. Um die nur schwer erkenntlichen Bilder der Schnittflächen der Alkalimetalle entstand auf dem Negativ ein breiter schwarzer Hof, der schon *vor* der Entwickelung deutlich sichtbar war (Fig. 9, Taf. III). Vermutlich verdankt er sein Entstehen einem direkten chemischen Angriff des Hydroxydes auf die Gelatine. Es handelte sich daher darum, die Berührungsdauer so zu wählen, daß die störende Hofbildung gerade noch vermieden wurde. An Stelle von Steinöl trat Petroleumäther. Fig. 9b und 9a, Taf. III stellen die Bilder von Kalium und Natrium nach dreistündiger,

Fig. 9c, Taf. III das von Lithium nach 15stündiger Berührung dar. Wir glauben zu dem Schlusse berechtigt zu sein, daß *die Intensitätsreihe der Bilder*, natürlich unter Berücksichtigung der Berührungsdauer, *sich mit der elektrischen Spannungsreihe deckt.* Auch die magnetischen Metalle *Kobalt, Nickel* und *Eisen* sind imstande, das Silbersalz zu schwärzen. Nur ist hierzu eine sehr lange Berührungsdauer erforderlich. Bei einem Versuche, der einen Monat in Anspruch nahm, erhielt man sehr gut ausgeprägte Bilder. Von einem Streifen aus blankem Kupfer, der neben den genannten Metallen gleichfalls auf die Schicht aufgelegt worden war, fand sich dagegen keine Spur einer Abbildung.

Die elektronegativen Metalle verhalten sich zur Platte passiv, *Silber* ausgenommen. Bei diesem Metalle tritt aber eine Umkehrung der Erscheinung auf; nicht die blanke, sondern die *matte* Fläche ist die wirksame (Fig. 10, Taf. III).[1]) Einer näheren Untersuchung muß es vorbehalten bleiben, um zu beurteilen, ob die Bildung der Schwefelverbindung Ag_2S die Wirkung hervorruft.

Wenn man eine Zinkplatte mit verdünnter Glyzerinlösung überzieht und mit einer Schicht von Ruß bedeckt, dann entsteht nach Czermak[2]) ein besonders kräftiges Bild des Rußes sowohl auf der photographischen Platte als auch auf einem mit Jodkaliumstärke getränkten Papiere. Führt man auf nicht blankem Magnesium oder Zink Zeichnungen mit Graphit aus, so bilden sie sich — aber erst nach Stunden! — vollkommen klar auf dem Jodkaliumpapiere ab.[3]) Wir haben auch nach dieser Richtung die Platte benutzt, sind aber zu dem Ergebnisse gekommen, daß hier eine ziemlich verwickelte, wahrscheinlich mit der Oxydationsgeschwindigkeit des Metalles im Zusammenhange stehende Erscheinung vorliegt, die einer sorgfältigen Prüfung unterzogen werden soll. Bald zeigte sich die mit Bleistift ausgeführte Schrift wirksam (Magnesium), bald wirkte sie isolierend (Aluminium und Kadmium).

---

1) Zur Erzielung eines besseren Kontrastes des Bildes zum Hintergrunde wurde dieser am Positiv hervorgehoben.

2) J. Blaas u. P. Czermak, Physik. Zeitschr. 5. p. 363. 1904.

3) F. Streintz, l. c.

Die Metalle hatten sich seit dem ersten Versuche ungefähr fünf Wochen lang in der Dunkelkammer befunden. Da der Verdacht rege ward, daß ihre Wirksamkeit in dieser Zeit abgenommen habe, so wurde zum Schlusse ein Versuch ausgeführt, um einen etwaigen Einfluß der *Belichtung* festzustellen. Von zwei gleichen Magnesiumblechen wurde das eine im Freien längere Zeit dem diffusen Tageslichte ausgesetzt, das andere verblieb in der Dunkelkammer; dann wurden die beiden Bleche, nachdem durch sorgfältiges Polieren nur eine äußerst dünne Schicht entfernt worden war, 24 Stunden lang exponiert. So ist die Fig. 11, Taf. III entstanden. Das links befindliche Bildchen lieferte das belichtete (*b*), das rechts stehende das unbelichtete (*n*) Blech. Die beiden Platten unterscheiden sich nicht voneinander. Dieser einzelne Versuch soll jedoch noch nicht als entscheidender angesehen werden für die wichtige Frage, ob das Licht die Erscheinung beeinflußt.

Die nächste Aufgabe wird vielmehr darin bestehen, darüber volle Klarheit zu gewinnen. Daran sollen Versuche gereiht werden über die Rolle, welche die Elektrisierung der Metalle spielt und endlich wird es sich darum handeln, zu untersuchen, ob eine Ablenkbarkeit der Metallstrahlen im magnetischen Felde nachweisbar ist.

(Eingegangen 20. August 1905.)

9. *Bemerkungen über erschütterungsfreie Aufstellung;*
von W. H. Julius.

Die Methode der erschütterungsfreien Aufstellung, welche darin besteht, daß man den zu schützenden Apparat unter Innehaltung gewisser Bedingungen an drei elastischen Drähten aufhängt, hat in den letzten Jahren vielfach Anwendung gefunden. Es sind jedoch von maßgebender Seite als Ausführungen dieser Methode gewisse Vorrichtungen beschrieben und abgebildet worden, die den Anforderungen nur teilweise entsprechen, indem wichtige Einzelheiten des Verfahrens dabei außer acht gelassen werden. Dieses veranlaßt mich, die wesentlichen Züge der Methode unter Hinweis auf frühere Mitteilungen hier noch einmal kurz zusammenzustellen.

Erste Bedingung. Die drei Drähte, an denen der Apparat aufgehängt ist, sollen von gleicher Länge und gleich stark belastet sein, und durch die Belastung merklich verlängert werden.[1])

Zweite Bedingung. Der Schwerpunkt des ganzen hängenden Körpers befinde sich in der horizontalen Ebene, welche durch die drei Punkte bestimmt ist[2]), in denen der Apparat auf den Ösen der Drähte ruht.

Dritte Bedingung. Diejenigen Teile des Apparates, auf deren Ruhe es hauptsächlich ankommt, sollen in der Nähe des Schwerpunktes liegen.[3])

Vierte Bedingung. Wenn es sich darum handelt, auch die Vertikalkomponenten der Erschütterungen möglichst abzuschwächen, so hat man nur einige Dezimeter der Aufhängedrähte durch Spiralfedern zu ersetzen, wodurch bei gleicher Belastung die Verlängerung sehr viel größer, und also der

---

1) W. H. Julius, Wied. Ann. **56**. p. 151. 1895.
2) l. c.
3) W. H. Julius, Zeitschr. f. Instrumentenk. **16**. p. 267. 1896.

Einfluß vertikaler Impulse im gleichen Verhältnisse geringer wird.[1])

Fünfte Bedingung. Die Eigenschwingungen des Apparates, die durch Berührung oder durch Luftströmungen angeregt werden, beruhigt man mittels in Flüssigkeit eingetauchter Flügel oder mit Wattebüscheln. Diese Dämpfungsvorrichtung soll ebenfalls in der Ebene des Unterstützungsdreiecks und des Schwerpunktes angebracht sein, damit die in ihr angreifenden Kräfte keine Drehungsmomente um horizontale durch den Schwerpunkt gehende Achsen hervorrufen können.

Bei unseren Überlegungen wurde der hängende Apparat (Stativ und Instrument zusammen) als *starrer Körper* betrachtet. Wenn diese Voraussetzung nicht mit genügender Annäherung erfüllt ist, und sich in dem aufgehängten Körper unter dem Einfluß der Erschütterungen stehende Wellen von merklicher Amplitude ausbilden können, so treten verwickeltere Verhältnisse ein. Es wäre dann z. B. möglich, daß in gewissen Knotenpunkten des Systems größere Ruhe als im Schwerpunkte herrschte. Solche Fälle würden eine absonderliche Betrachtung erfordern.

In dem vorzüglichen Lehrbuch der praktischen Physik von F. Kohlrausch findet sich nun leider eine in fast allen Teilen unrichtige Beschreibung des Aufhängeverfahrens vor (p. 48 der zehnten Auflage). Das Prinzip der Methode wird nicht erwähnt; die abgebildete Ausführung gestattet nicht, der zweiten und dritten Bedingung Genüge zu leisten; die vierte Bedingung bleibt unbeachtet; die Dämpfung erfolgt an unrichtiger Stelle, und es wird eine noch schlechtere Dämpfungsvorrichtung als bessere empfohlen. Auch die Bemerkung, es beschränke sich die Anwendung meiner Methode auf Instrumente, an denen man selten Manipulationen vorzunehmen hat, trifft

---

1) W. H. Julius, Handelingen van het Zesde Ned. Natuur- en Geneesk. Congres Delft, p. 428. 1897; Zeitschr. f. Instrumentenk. **18.** p. 85. 1898. Am Schlusse eines Aufsatzes über „Sensitive moving coil galvanometers" (Physic. Review **19.** p. 305—329. 1904) bespricht Hr. W. P. White mehrere Vorrichtungen zur erschütterungsfreien Aufstellung und sagt, es ließe sich die von mir angegebene durch die Anwendung von Federn verbessern. Spiralfedern wurden aber von mir schon in 1897 für gewisse Fälle empfohlen und benutzt.

offenbar nicht zu; denn es ist leicht eine Vorrichtung anzubringen, mit der man den Apparat durch einen einzigen Griff fest mit einem untergestellten Tische verbindet.

Die Aktiengesellschaft Siemens & Halske hat unter meinem Namen eine „erschütterungsfreie Aufhängung" des du Bois-Rubensschen Kugelpanzergalvanometers eingeführt (Listennummer 31567; vgl. Abbildung in Preisliste 11, 1903, auf p. 1130), welche jedoch mit der von mir angegebenen nur die Erfüllung der ersten oben erwähnten Bedingung gemein hat. Es fällt zwar bei jener Ausführung der Befestigungspunkt des Quarzfadens in die Ebene des Unterstützungsdreiecks; das hat aber keinen Sinn, wenn der Schwerpunkt nicht auch in dieser Ebene liegt, und diese letztere Bedingung ist nicht erfüllt. Außerdem kann man das ganze System schwerlich als „starren Körper" betrachten, weil in ihm die längs den Drähten fortgeleiteten Impulse an den freien Enden ziemlich dünner Stäbe angreifen. Die Dämpfungsvorrichtung schließlich befindet sich auch hier nicht an der günstigsten Stelle. Trotz ihrer Mängel wird vielleicht die Siemens & Halskesche Aufhängung in gewissen Fällen genügenden Schutz gewähren; das Optimum kann man aber mit derselben nicht erreichen. In dieser Hinsicht ist die von der Firma Kipp & Zonen in Delft ausgeführte, universal verwendbare Vorrichtung entschieden vorzuziehen.

Wenn man übrigens auf die *allgemeine* Verwendbarkeit eines hängenden Stativs verzichten und nur ein bestimmtes Instrument erschütterungsfrei aufstellen will, so kann man sich auch, mit Innehaltung aller wesentlichen Bedingungen, in einfacherer Weise z. B. folgendermaßen helfen:

Zwei starke dreieckige Brettchen werden durch drei in den Ecken angeschraubte Holzstangen zu einem derben Gestell vereinigt. Auf dem unteren Brettchen befestigt man in passender Weise den zu schützenden Apparat. Durch den Punkt, auf dessen Ruhe es hauptsächlich ankommt, denke man sich nun eine horizontale Ebene gelegt, wo diese die Holzstangen schneidet, werden in letztere die drei Haken zum Aufhängen eingesetzt. Das obere dreieckige Brett trägt in der Mitte einen vertikalen Messingstab, auf den sich ein Bleigewicht stecken läßt, dessen Masse eben ausreicht, um den

Schwerpunkt des Ganzen bis in die Unterstützungsebene zu heben.

Wenn nun der Apparat über einem Pfeiler oder einem Tische aufgehängt ist und mit diesem durch eine kräftige Klemmvorrichtung jederzeit schnell verbunden werden kann, ist man außerdem in der Lage, alle erforderlichen Manipulationen an dem Instrument bequem vorzunehmen.

Als Klemmvorrichtung benutze ich einen mit drei Füßen auf dem Pfeiler zementierten dreieckigen Rahmen (aus Metall oder Holz), der das Bodenbrett des hängenden Gestelles in etwa 1 cm Abstand rings umgibt. Durch eine Seite dieses Rahmens sind in horizontaler Richtung zwei Schrauben geführt, durch die gegenüberliegende Ecke eine dritte. Wenn die ersten zwei Schrauben so eingestellt sind, daß sie die Bodenplatte beinahe berühren, so genügen ein paar Umdrehungen der dritten Schraube, um das Gestell unverrückbar zu befestigen. Eine solche Klemmvorrichtung kann man überhaupt nicht entbehren, falls der Apparat an Spiralfedern hängt.

Drei Messingstangen, welche auf dem Rahmen in den drei Ecken befestigt sind, tragen in angemessener Höhe die Ölgefäße oder die Wattebüschel zum Dämpfen der Schwingungen.

Utrecht, August 1905.

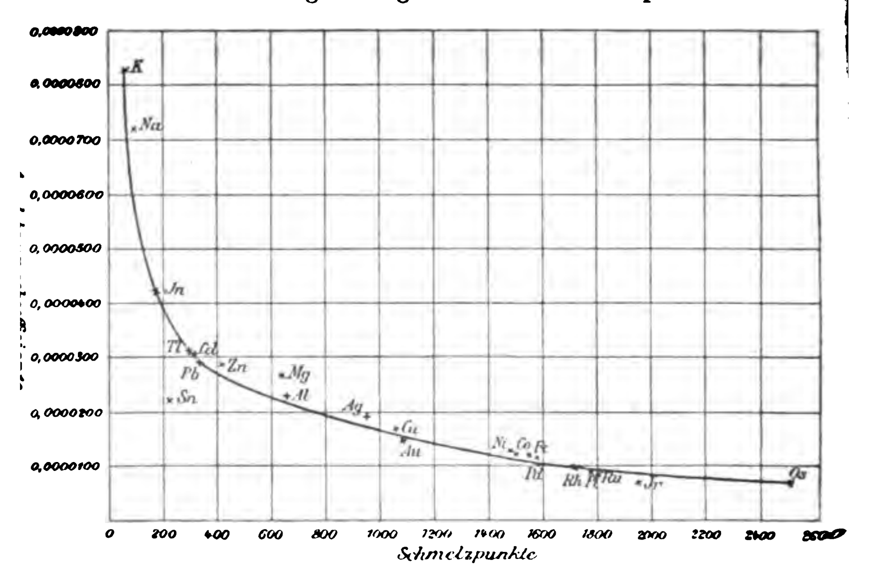
(Eingegangen 8. August 1905.)

10. *Über die Beziehung des Schmelzpunktes zur Wärmeausdehnung der Metalle;* *von J. v. Panayeff.*

Soweit mir bekannt, ist eine enge Beziehung der thermischen Ausdehnung der Metalle zu ihrem Schmelzpunkt bis jetzt nicht festgestellt worden; wenigstens wird dieselbe in den Lehrbüchern der Physik nirgends hervorgehoben.

Jede Tabelle der linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten zeigt jedoch die auffallende Tatsache, daß die bei höheren Temperaturen schmelzenden Metalle die kleinste Ausdehnung haben.

Die nachstehende, von mir zusammengestellte Tabelle von den Metallen, bei denen bis jetzt der Wärmeausdehnungskoeffizient bestimmt ist, hat meine Vermutung bestätigt, daß man diese Beobachtung als allgemeines Gesetz aussprechen kann.



Wie beigefügte Kurve veranschaulicht, sinkt der Ausdehnungskoeffizient stetig mit dem Steigen der Schmelzpunkte,

Metalle	Schmelzpunkt	Linearer Ausdehnungskoeffizient[1]) bei 40° α_{40}
Osmium	2500°	0,00000657
Iridium	1950	0,00000700
Rhodium	unt. 1800	0,00000850
Platina	„ (1780°)	0,00000899
Rhutenium	„	0,00000963
Palladium	1580	0,00001176
Eisen (weiches)	1550	0,00001210
Kobalt	1500	0,00001236
Nickel	1484	0,00001279
Gold	1064	0,00001443
Kupfer	1057	0,00001678
Silber	954	0,00001921
Aluminium	657	0,00002313
Magnesium	635	0,00002694
Zink	415	0,00002918
Blei	334	0,00002924
Kadmium	315	0,00003069
Thallium	295	0,00003100
(Zinn	228	0,00002234)
Indium	176	0,00004200
Natrium	96	0,00007200
Kalium	63	0,00008300

wenn man Zinn, das ja durch seine eigentümlichen Eigenschaften von den gewöhnlichen Metallen verschieden ist, unberücksichtigt läßt.

Eine bedeutendere Abweichung von dem Verlauf der Kurve zeigt dann nur Magnesium; alle anderen Metalle dagegen sinken mit ziemlich stetiger Regelmäßigkeit.

Natürlich muß hierbei die geringe Zuverlässigkeit mancher schon vor längerer Zeit bestimmten Ausdehnungskoeffizienten, welche, wie es besonders die neuere Entdeckung von C. E. Guillaume zeigt[2]), in ganz unerwartet hohem Maße von der Einheitlichkeit der Metalle abhängen kann, in Betracht gezogen werden. Ebenso müssen wir beachten, daß die Angaben der

1) Die Zahlen sind dem Chem. Kalender von Prof. Dr. E. Biedermann (1905) entnommen.

2) E. v. Lommel, Lehrb. der Physik 1904. p. 156.

Schmelzpunkte, besonders der Schwermetalle, die heute noch bisweilen um einige hundert Grad variieren, keine absolut sicheren sind; ferner, daß der Ausdehnungskoeffizient selber Temperaturfunktion ist.

Die uns vorliegenden Zahlenangaben können sich auch infolgedessen nicht vollständig mit der Kurve decken, trotzdem sie den neueren physikalischen Werken entnommen sind.

Ich habe es daher auch nicht für angebracht gehalten, mich bei meiner Untersuchung zu streng an die Kurve zu halten, und vermied es darum, jetzt mit mehr oder weniger Recht bestrittene Schmelzpunkte, so verführerisch sie bisweilen auch waren, anzugeben. So hätte z. B. der für Gold früher gebrauchte Schmelzpunkt von 1200° sich bedeutend besser bei Benutzung des augenblicklich gebrauchten Wärmeausdehnungskoeffizienten der Kurve angeschlossen; ob dieser aber ganz richtig bestimmt ist, dafür ist nach oben Gesagtem natürlich keine Gewähr gegeben. Bei wiederholter genauer Nachprüfung könnte er eventuell auch als größer festgestellt werden, so daß der neuere Schmelzpunkt von 1064° ebensogut in die Kurve passen würde.

Auf jeden Fall beweisen die angegebenen Zahlen, trotzdem sie, wie gesagt, nicht absolut zuverlässig sind, unzweifelhafte Abhängigkeit der Wärmeausdehnung der Metalle von ihrem Schmelzpunkte, die man in den kurzen Satz fassen kann:

Diejenigen Metalle, welche den höchsten Schmelzpunkt besitzen, haben den kleinsten Wärmeausdehnungskoeffizienten.

Vielleicht regt diese Mitteilung eine wiederholte Nachprüfung der hier als „richtig“ angenommenen Schmelzpunkte und Ausdehnungskoeffizienten an. Ich glaube bestimmt annehmen zu dürfen, daß sie die Richtigkeit des oben angeführten Satzes nur bestätigen und erweitern könnte. Rationeller wäre es vielleicht, nach den Ausdehnungskoeffizienten im gleichen Abstand von den Schmelzpunkten zu fragen; es wäre denkbar, daß sich diese als gleich ergäben.

Straßburg i. E., 12. Juli 1905.

(Eingegangen 17. Juli 1905.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1905. № 12.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 18. HEFT 2.

DER GANZEN REIHE 323. BANDES 2. HEFT.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.



LEIPZIG, 1905.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

ROSSPLATZ 17.

(Ausgegeben am 7 November 1905.)



Inhalt.

Seite

1. J. Stark, T. Retschinsky und A. Schaposchnikoff. Untersuchungen über den Lichtbogen 213
2. Balthasar Hartmann. Untersuchung über die Leistungsfähigkeit der Assmannschen Methode zur experimentellen Bestimmung des Verhältnisses $c_p/c_v = x$ der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen von Gasen . 252
3. A. Denizot. Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucaultschen Pendelversuches 299
4. Peter Nell. Studien über Diffusionsvorgänge wässeriger Lösungen in Gelatine 328
5. J. S. Sachs. Untersuchungen über den Einfluß der Erde bei der drahtlosen Telegraphie 348
6. E. Aschkinass. Elektrische Leitungsfähigkeit und Reflexionsvermögen der Kohle 373
7. A. L. Holz. Über Flüssigkeitsbewegungen, welche durch Rotation fester Körper verursacht werden 387
8. R. H. Weber. Permeabilitätsmessung an Stahlkugeln . . . 395
9. B. Walter und R. Pohl. Über das Eigenlicht des Radiumbromids 406
10. G. E. Leithäuser. Bemerkung zu der Arbeit des Herrn Becker: „Messungen an Kathodenstrahlen" 410

Manuskripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude,** zu senden. Seine Adresse ist **Berlin N.W. 7.** Neue Wilhelmstr. 16.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

1905. № 12.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 18.

1. *Untersuchungen über den Lichtbogen;*
von J. Stark, T. Retschinsky und A. Schaposchnikoff.

Inhalt: § 1. Theoretische Einleitung. (Elektrisierung an der kathodischen Strombasis; Stoßionisierung im kathodischen Lichtbüschel; Stoßionisierung in der Anodenschicht; Stoßionisierung in der positiven Lichtsäule; Geschwindigkeit der positiven und negativen Ionen; Innere elektromotorische Kräfte an den Elektroden; Ionentheorie der Charakteristik des Lichtbogens, Wechselstromlichtbogen.) § 2. Der Spannungsabfall in der Lichtbogensäule in Abhängigkeit von der umgebenden Gasatmosphäre. § 3. Die Methode des Querstromes angewandt auf den Lichtbogen. § 4. Verhältnis der Geschwindigkeiten der positiven und negativen Ionen. § 5. Methode zur Messung des Kathodenfalles. § 6. Kathodenfall und Stromstärke. § 7. Der Anodenfall in der Anodenschicht an kalter Anode. § 8. Der Anodenfall in der Anodenschicht an heißer Anode. § 9. Der Anodenfall im kathodischen Lichtbüschel an kalter Anode. § 10. Resultate.

§ 1. *Theoretische Einleitung.* — Über den Lichtbogen wurden in letzter Zeit zahlreiche experimentelle Untersuchungen angestellt, so von P. C. Hewitt[1]), E. Weintraub[2]), W. B. von Czudnochowski[3]), J. Stark[4]), J. Stark und L. Cassuto[5]), G. Granqvist[6]), L. Cassuto[7]), A. P. Wills[8]), C. D. Child[9]), E. Martiny[10]), S. Maisel[11]), W. S. Weedon[12]), W. Mitke-

1) P. C. Hewitt, El. 52. p. 447. 1904.
2) E. Weintraub, Phil. Mag. 7. p. 95. 1904.
3) W. B. von Czudnochowski, Physik. Zeitschr. 5. p. 99. 1904.
4) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 673. 1903; Physik. Zeitschr. 5. p. 81 u. p. 750. 1904.
5) J. Stark u. L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. p. 264. 1904.
6) G. Granqvist, Boltzmann-Festschrift p. 799. 1904.
7) L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. p. 263. 1904.
8) A. P. Wills, Phys. Rev. 19. p. 65. 1904.
9) C. D. Child, Phys. Rev. 19. p. 117. 1904; 20. p. 100. 1905.
10) E. Martiny, Verh. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 6. p. 199. 1904.
11) S. Maisel, Physik. Zeitschr. 5. p. 550. 1904.
12) W. S. Weedon, Trans. Am. Electroch. Soc. 5. p. 171. 1904.

witch[1]), W. Duddell[2]), C. W. Waidner u. G. R. Burgess[3]), M. v. Recklinghausen[4]), J. Pollak[5]), L. Lombardi und G. Melazzo[6]), E. Rasch[7]), H. Th. Simon[8]), J. Stark und R. Küch.[9])

Soweit in diesen Untersuchungen das Streben nach einer theoretischen Auffassung der beobachteten Erscheinungen hervortritt, ist es überall die Ionenhypothese, welche zur Grundlage einer Theorie des Lichtbogens gemacht wird. Der eine von uns (Stark) hat in den Hauptzügen nachstehende Theorie von dem Mechanismus des Lichtbogens entwickelt. Da die hier mitgeteilten experimentellen Untersuchungen nach bestimmten theoretischen Gesichtspunkten[10]) durchgeführt wurden, so seien diese hier im Zusammenhang noch einmal mitgeteilt.

Der Lichtbogen ist eine selbständige Strömung, als solche erzeugt er seine positiven und negativen Ionen in der Strombahn andauernd selbst. Um die Ionen, welche durch Elektrolyse oder Wiedervereinigung verschwinden, durch neue zu ersetzen, benützt er die vorhandenen Ionen; diesen erteilt er die zu ihrer Arbeitsleistung notwendige kinetische Energie, indem er sie in seiner Bahn genügend große Spannungsdifferenzen durchlaufen läßt.

Elektrisierung an der kathodischen Strombasis. — An der Kathode erzeugt der Lichtbogen seine negativen Ionen durch Elektrisierung.[11]) Durch die positiven Ionen, welche auf die kathodische Strombasis treffen, erhitzt er diese auf eine so

1) W. Mitkewitch, Journ. russ. phys.-chem. Gesellsch. 35. p. 507 u. 675. 1903; 36. p. 13 u. 259. 1904.

2) W. Duddell, Phil. Trans. 203. p. 305. 1904.

3) C. W. Waidner u. G. R. Burgess, Phys. Rev. 19. p. 241. 1904.

4) M. v. Recklinghausen, Elektrot. Zeitschr. 25. p. 1102. 1904.

5) J. Pollak, Physik. Zeitschr. 6. p. 277. 1905.

6) L. Lombardi u. G. Melazzo, Atti Ass. Elettrot. Ital. 9. p. 1. 1905.

7) E. Rasch, Physik. Zeitschr. 5. p. 375. 1904.

8) H. Th. Simon, Physik. Zeitschr. 6. p. 297. 1905.

9) J. Stark u. R. Küch, Physik. Zeitschr. 6. p. 438. 1905.

10) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 673. 1903; Le mécanisme de l'arc électrique, Mém. du volume „Les électrons“. Gauthier-Villars, Paris 1905.

11) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen. Leipzig 1902. p. 99; Ann. d. Phys. 12. p. 687. 1903.

hohe Temperatur, daß sie negative Elektronionen in großer Zahl ausstrahlt. Dies ist der charakteristische Vorgang, durch welchen sich der Lichtbogen von dem Glimmstrom, einer anderen selbständigen Strömung, unterscheidet. In der Tat haben alle dahinzielenden experimentellen Untersuchungen festgestellt, daß die kathodische Strombasis des Lichtbogens in allen Fällen auf Weißglut erhitzt ist, und daß der Lichtbogen nicht existieren kann, wenn das Auftreten der hohen Temperatur in seiner kathodischen Strombasis verhindert wird.[1]) Von diesem Gesichtspunkt gehen auch W. Mitkewitch und H. Th. Simon aus in ihrer Theorie des Lichtbogens.

Stoßionisierung im kathodischen Lichtbüschel. — Damit die positiven Ionen dauernd zur kathodischen Basis strömen und aus ihr durch Erhitzung negative Ionen frei machen können, müssen sie ihrerseits dauernd neu erzeugt werden in dem Raum zwischen Kathode und Anode. Dies geschieht nicht dadurch, daß die negativen Ionen ihrerseits die Anode hoch temperieren, so daß aus dieser die positiven Ionen kommen können.[2]) Denn der Lichtbogen ist bei kalter Anode möglich. Die positiven Ionen werden vielmehr innerhalb des Gas- oder Dampfraumes durch den Stoß der von der Kathode kommenden negativen Elektronionen erzeugt. Zu dieser Stoßionisierung benötigen die negativen Ionen ein Minimum kinetischer Energie, diese erlangen sie, indem sie auf ihrer freien Weglänge ein Minimum von Spannungsdifferenz frei durchlaufen. Der Spannungsabfall längs der Strombahn des Lichtbogens muß sich darum entsprechend der chemischen Art und der Dichte des Dampfes (Gases) so einstellen, daß er nicht unter ein gewisses Minimum sinkt. Andererseits kann er aber auch bei Konstanz jener zwei Faktoren nicht über dieses Minimum steigen; denn erfolgt einmal die Stoßionisierung, so hat Vermehrung der Stromstärke nur Vermehrung der Zahl der Ionen und darum keine Erhöhung des Spannungsabfalles zur Folge.

Der Lichtbogen besitzt drei Partien, in denen Ionisierung durch den Stoß negativer Ionen statthat. Die wichtigste davon

---

1) J. Stark u. L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. p. 264. 1904.

2) Vgl. C. D. Child, Int. electrical congress of St. Louis, 1904, section A.

ist das kathodische Lichtbüschel.[1]) Unmittelbar vor der Kathode werden in diesem die nach der Kathode abströmenden positiven Ionen erzeugt durch den Stoß der direkt aus der kathodischen Strombasis kommenden negativen Ionen. Von der Kathode weg bis in das Innere des Lichtbüschels müssen darum die negativen Ionen einen Spannungsabfall frei durchlaufen, welcher gleich ist ihrer Ionisierungsspannung für den betreffenden aus der hoch temperierten Kathode kommenden Metalldampf. Der Kathodenfall des Lichtbogens, jener Spannungsabfall, stellt also die Energie dar, welche im Minimum von einem negativen Elektronion (Kathodenstrahl) als Arbeit zur Ionisierung eines neutralen Atoms des Kathodenmetalles (Abtrennung eines negativen Elektrons) aufgewendet werden muß. Der Kathodenfall des Lichtbogens gewinnt demnach die Bedeutung einer physikalisch-chemischen Konstante des einzelnen chemischen Atoms. Als eine Ionisierungsspannung[2]) muß er in weiten Grenzen unabhängig sein von der mittleren Temperatur, dem Dampfdruck und der Stromstärke. Erhöhung der Stromstärke kann an der Kathode des Lichtbogens lediglich Vergrößerung der Strombasis bedeuten.

Stoßionisierung in der Anodenschicht. — Da in der Basis des kathodischen Lichtbüschels die negativen Ionen durch Elektrisierung in die Strombahn geschafft, in dem Lichtbüschel selbst die positiven Ionen durch Stoßionisierung erzeugt werden, so vermag dank diesem Wechselspiel von positiven und negativen Ionen die elektrische Strömung bereits selbständig zu bestehen, wenn die Anode so nahe der Kathode ist, daß sie in das Lichtbüschel taucht. Der Lichtbogen besteht in diesem Falle lediglich aus dem kathodischen Lichtbüschel, besitzt keine positive Lichtsäule und keine Anodenschicht. Wird indessen die Anode nicht von dem kathodischen Lichtbüschel bespült, so muß sich zwischen diesem und ihr noch eine andere Strompartie mit Stoßionisierung ausbilden. An der Anode selbst

1) J. Stark, Le mécanisme de l'arc électrique, Mém. du vol. „Les électrons". Gauthier-Villars, Paris 1905. Die hier gegebene theoretische Auffassung des Kathodenfalles hat an die Stelle der früheren Ansicht (Ann. d. Phys. 12. p. 688. 1903) zu treten.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 7. p. 420. 1902; Physik. Zeitschr. 5. p. 56. 1903.

entsteht dann die Anodenschicht mit Stoßionisierung durch die negativen Ionen. Infolge der Wiedervereinigung und infolge des Wegwanderns der positiven Ionen steigt unmittelbar an der Anode der Spannungsabfall. Er kann indes mit der Stromstärke rasch nur so weit steigen, bis er gleich der Ionisierungsspannung der negativen Ionen geworden ist; denn dann tritt unmittelbar an der Oberfläche der Anode Stoßionisierung des Metalldampfes durch die negativen Ionen ein. In diesem Falle stellt demnach der Anodenfall in der Anodenschicht die Ionisierungsspannung der negativen Elektronionen dar für das betreffende Anodenmetall.[1]) Dies gilt indes nur, wenn die Anode nicht ganz von der Strömung bedeckt ist. Ist sie ganz bedeckt, kann also die anodische Strombasis bei steigender Stromstärke nicht mehr weiter wachsen, so nimmt der Anodenfall mit dieser zu. Vorausgesetzt ist dabei ferner, daß an der Anode nicht infolge hoher Temperatur eine innere elektromotorische Kraft auftritt, wie weiter unten dargelegt ist. Der Anodenfall in dem kathodischen Lichtbüschel ist natürlich kleiner als derjenige in der Anodenschicht; denn in jenem wird der Dampf unmittelbar an der Anode durch die negativen Ionen ionisiert, welche bereits von der Kathode weg ihre Ionisierungsspannung durchlaufen haben.

Stoßionisierung in der positiven Lichtsäule. — Ist der Abstand zwischen Anode und Kathode so groß, daß er nicht von dem kathodischen Lichtbüschel und der Anodenschicht ausgefüllt wird, so liegt zwischen diesen beiden Schichten noch eine dritte Strompartie, in welcher Ionisierung durch den Stoß negativer Elektronionen statthat, die positive Lichtsäule. Ist diese geschichtet, so stellt der Spannungsabfall, welcher auf der einzelnen Schicht liegt, im Minimum wieder die Ionisierungsspannung der negativen Ionen dar. Zumeist ist aber die positive Säule im Lichtbogen ungeschichtet; die negativen Ionen bewegen sich also in dem einzelnen Querschnitt nicht in gleicher Phase in bezug auf die frei durchlaufene Spannungsdifferenz, sondern in allen möglichen Phasen. In diesem Falle läßt sich darum ihre Ionisierungsspannung nicht ermitteln, da

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 7. p. 436. 1902; Die Elektrizität in Gasen. Leipzig 1902. p. 167.

ihre freie Weglänge unbekannt ist. Indes stellt sich der Spannungsabfall auch in diesem Falle nach Maßgabe der Art und der Dichte des Dampfes auf einen festen Wert ein, den er nur bei Variation dieser beiden Faktoren verläßt. Bei konstanter chemischer Natur des Dampfes oder Gasgemisches nimmt in der positiven Säule des Lichtbogens der Spannungsabfall ab, wenn die Dichte des Dampfes kleiner wird, sei es infolge von Druckerniedrigung oder Temperaturerhöhung. Dieser Satz hat sich in allen Fällen bestätigt, in denen der Lichtbogen in einem evakuierten Gefäß ausschließlich in dem Dampf seines Elektrodenmetalles brannte. Die chemische Natur des Gases in der Strombahn kann dann geändert werden, wenn dieses ein Gemisch aus dem Dampf des Elektrodenmetalles und einem fremden Gas darstellt, wenn beispielsweise der Lichtbogen nicht in einem evakuierten Gefäß, sondern in einer Gasatmosphäre wie Luft oder Wasserstoff brennt. Je geringer in diesem Falle der relative Betrag des Dampfes in der Strombahn, je geringer also die Verdampfung der Elektroden ist, desto größer ist der Spannungsabfall in der positiven Säule des Lichtbogens. Die Verdampfung der Elektroden ist bei konstantem Abstand derselben beispielsweise um so kleiner, je kleiner die Leistung im Lichtbogen ist, also je kleiner bei konstanter Stromstärke der Gasdruck oder je kleiner bei konstantem Gasdruck die Stromstärke[1]) ist. Ferner ist sie um so kleiner, je mehr die Strombahn und die Elektroden durch das umgebende Gas abgekühlt werden; die gleiche Wirkung hat künstliche Abkühlung der Elektroden durch Wasser.[2]) Unter diesem Gesichtspunkt ist die Abhängigkeit der Elektrodenspannung des Lichtbogens von der Stromstärke zu erklären, wenn der Lichtbogen in einer Gasatmosphäre brennt. Wie man sieht, ist dieser Fall durch unkontrollierbare Versuchsbedingungen so kompliziert, daß er keinesfalls als Grundlage zur Aufstellung oder Prüfung einer Theorie des Lichtbogens dienen kann.

Geschwindigkeit der positiven und negativen Ionen. — Die negativen Ionen, welche im kathodischen Lichtbüschel, in der

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 679. 1903; J. Stark u. L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. p. 268. 1904.

2) J. Stark u. L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. p. 267. 1904.

positiven Lichtsäule und in der Anodenschicht das Gas durch ihren Stoß ionisieren, sind, wie bis jetzt stillschweigend vorausgesetzt wurde, Elektronionen oder, wie man sich auch ausdrücken kann, Kathodenstrahlen. Diese Ansicht ist schon früher[1]) ausgesprochen worden. Die positiven Ionen im Lichtbogen sind überwiegend Atomionen. Hieraus ist zu folgern, daß die negativen Ionen im Innern der Strombahn des Lichtbogens dank ihrer kleinen Masse eine größere spezifische Geschwindigkeit besitzen müssen als die positiven Ionen.

Innere elektromotorische Kräfte an den Elektroden. — Schon früher[2]) wurde darauf hingewiesen, daß die Ausstrahlung negativer Elektronionen aus der hoch temperierten Elektrodenoberfläche in den Dampfraum als innere elektromotorische Kraft an den Elektrodenoberflächen sich betätigen müsse. In der Tat ist die dampfförmige Strombahn des Lichtbogens als metallischer Leiter zu betrachten, da seine negativen Ionen mit derjenigen eines festen oder flüssigen Metalles identisch sind; die kathodische und anodische Strombasis des Lichtbogens stellen demnach Kontakt- oder Lötstellen zweier metallischer Leiter dar; die in ihnen auftretende innere thermoelektrische Kraft ist abhängig von der absoluten Temperatur der Kontaktstelle und von dem Zustand der zwei metallischen Leiter rechts und links von der Kontaktstelle. Da nun das hoch temperierte Metall der Elektrode mehr negative Elektronionen in den Dampfraum strahlt, als umgekehrt der Fall ist, so tritt in der hoch temperierten kathodischen Strombasis eine innere thermoelektromotorische Kraft auf im gleichen Sinne wie der elektrische Spannungsabfall; in einer hoch temperierten anodischen Strombasis ist diese innere elektromotorische Kraft zu dem Spannungsabfall entgegengesetzt gerichtet. Demgemäß arbeitet die innere elektromotorische Kraft an der Kathode des Lichtbogens unter Verbrauch von Wärme; an der hoch temperierten Anode dagegen arbeitet der Spannungsabfall entgegen der inneren Kraft unter Entwickelung von Wärme.

Da in der kathodischen Strombasis des Lichtbogens notgedrungen immer eine hohe Temperatur herrscht und diese

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 680. 1903.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 691. 1903; W. Mitkewitch, Journ. russ. phys.-chem. Gesellsch. 36. p. 18. 1904.

infolge der Konstanz des Kathodenfalles bei stationären Verhältnissen konstant ist, so ist die innere thermoelektrische Kraft an der Kathode notwendig immer vorhanden und kann nicht durch Variation der Temperatur variiert werden. Dagegen ist dies möglich an der Anode. Hier kann die Temperatur künstlich variiert werden. Erhöhung ihrer Temperatur auf Rot- oder Weißglut unter Konstanz der Verhältnisse vor ihr im Dampfraum muß den Anodenfall erhöhen infolge der Entwickelung der inneren elektromotorischen Gegenkraft. Bei konstanter hoher Temperatur der Anode muß aber diese innere Gegenkraft und damit auch der Anodenfall variieren mit dem Zustand des Dampfes vor der Anode; so muß der Anodenfall kleiner werden, wenn die Dichte des Dampfes steigt und sich somit dessen Zustand demjenigen des hoch temperierten Anodenmetalles nähert. Durch die Untersuchungen von W. Duddell (l. c.) ist die Existenz innerer elektromotorischer Kräfte an den Elektroden des Lichtbogens außer jeden Zweifel gesetzt.

Nach den vorhergehenden Ausführungen über die inneren elektromotorischen Kräfte an den Elektroden des Lichtbogens ist eine Einschränkung vorzunehmen an der oben dargelegten Ansicht, daß der Kathodenfall die Arbeit sei, welche die negativen Elektronionen zur Ionisierung eines neutralen Metallatoms im kathodischen Lichtbüschel verbrauchen. Es ist nämlich hierbei nicht berücksichtigt, daß die negativen Ionen beim Austritt aus der kathodischen Strombasis und beim Eintritt in das Gebiet des Kathodenfalles schon eine Anfangsgeschwindigkeit v_k besitzen. Ist darum μ die Masse des negativen Ions, ε seine Ladung in statischem Maße und K der Kathodenfall in Volt, so beträgt jene Ionisierungsarbeit

$$\tfrac{1}{2}\mu v_k^2 + \frac{\varepsilon \cdot K}{300}.$$

Es ist anzunehmen, daß $\frac{1}{2}\mu v_k^2$ klein ist gegen K, solange dies nicht viel kleiner als 5 Volt ist.

Ionentheorie der Charakteristik des Lichtbogens, Wechselstromlichtbogen. — Charakteristik einer Dynamomaschine heißt die Kurve, welche die Beziehung zwischen der Klemmspannung und der Stromstärke graphisch darstellt. Diese Bezeichnung ist auch auf die elektrische Strömung in Gasen übertragen worden. Das Ohmsche Gesetz stellt die Beziehung zwischen

der Stromstärke in einem festen oder flüssigen Leiter und der Spannungsdifferenz an seinen Enden (Elektrodenspannung) in einfacher Weise dar als Funktion der Dimensionen und einer spezifischen Konstante des Leiters. Nun ist bei einem Gas die Charakteristik in der Regel das Resultat einer Kombination von vielen einzelnen, zumeist verschiedenen Vorgängen innerhalb des gasförmigen Leiters. Infolgedessen besitzt in diesem Falle die Elektrodenspannung nicht mehr die einfache Bedeutung wie bei einem metallischen oder flüssigen Leiter; die Charakteristik einer Strömung in Gasen besitzt lediglich technischen Wert zur formalen Diskussion der Beziehung zwischen elektromotorischer Kraft, Stromstärke und Elektrodenspannung auf Grund des Ohmschen Gesetzes für den nicht gasförmigen Teil des Stromkreises. Über die charakteristischen Vorgänge im gasförmigen Leiter selbst vermag natürlich eine solche Diskussion nichts auszusagen.

Eine theoretisch-analytische Darstellung der Charakteristik einer elektrischen Strömung in Gasen kann nur das Resultat einer vorhergehenden Analyse der einzelnen Vorgänge im Gase sein. Es ist möglich gewesen, mit großer Annäherung eine Ionentheorie[1]) der Charakteristik der unselbständigen Strömung in einem Gase zu geben. Diese Theorie verknüpft die spezifischen Ionenzahlen n_p bez. n_n, die spezifischen Geschwindigkeiten v_p bez. v_n, die Ionenladung ε, den Koeffizienten der Wiedervereinigung α, die elektrische Spannung V, die Stromstärke i und die Raumkoordinaten zu einer Formel; sie macht dabei die Annahme, daß die Geschwindigkeit der Ionen in einem jeden Querschnitt proportional der hier herrschenden elektrischen Kraft sei, ferner setzt sie voraus, daß die Stärke der sekundären Ionisierung räumlich konstant sei.

Eine Ionentheorie der Charakteristik der selbständigen Strömungen hätte die Aufgabe zu lösen, die Elektrodenspannung darzustellen als Funktion der spezifischen Ionenzahlen, der Ionisierungsspannungen und der mittleren freien Weglängen der positiven und negativen Ionen, der Ionenladung, des Koeffizienten der Wiedervereinigung, der elektrischen

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. 47. p. 257. 1899; E. Riecke, Ann. d. Phys. 12. p. 52. 1903; G. Mie, Ann. d. Phys. 13. p. 858. 1904; vgl. T. Retschinsky, Physik. Zeitschr. 6. p. 472. 1905.

Spannung, der Stromstärke und der Raumkoordinaten. Dabei dürfte sie nicht mehr von der Annahme ausgehen, daß die Geschwindigkeit der Ionen proportional der Kraft sei, sondern müßte berücksichtigen, daß in den einzelnen Schichten der selbständigen Strömung die Ionen unter Beschleunigung Spannungsdifferenzen frei durchlaufen, so daß ihre Geschwindigkeit in einem Querschnitt abhängt von der Spannungsdifferenz, welche vor dem Querschnitt von ihnen frei durchlaufen wurde. Im Falle des Lichtbogens müßte eine Ionentheorie seiner Charakteristik in die Formel für die Elektrodenspannung auch noch aufnehmen die inneren elektromotorischen Kräfte in der anodischen und kathodischen Strombasis als Funktion der Temperatur und spezifischer Konstanten des Metalles und Dampfes. Würde eine solche Ionentheorie für den Lichtbogen in freier Luft entworfen, so müßte sie auf die thermische und chemische Inhomogenität längs der Stromlinien und in senkrechter Richtung zu ihnen Rücksicht nehmen.

Die wissenschaftliche Analyse der selbständigen Strömungen, speziell des Lichtbogens, kann sich nicht die Konstruktion der Charakteristik aus Ionenkonstanten zum ersten Ziele setzen; sie hat vor allem die einzelnen Vorgänge im Lichtbogen isoliert zu betrachten und in den frei durchlaufenen Spannungsdifferenzen wichtige neue Konstanten zu ermitteln.

Wie aus den vorhergehenden Darlegungen folgt, haben wir eine elektrische Strömung in einem Dampf zwischen zwei Elektroden nur so lange als Lichtbogen zu betrachten, als längs der Strombahn der für den Lichtbogen charakteristische und notwendige Spannungsabfall, vor allem sein Kathodenfall und die durch ihn bedingte hohe Temperatur der kathodischen Strombasis vorhanden ist. Wird der Spannungsabfall kleiner, so ist der Lichtbogen als erloschen zu betrachten; die noch vorhandene Strömung ist eine unselbständige Strömung, welche die von der Lichtbogenphase her noch vorhandenen Ionen in Bewegung setzt. Der Wechselstromlichtbogen setzt sich darum zusammen aus einer Phase selbständiger Strömung (Lichtbogen) und aus einer Phase unselbständiger Strömung; die zwei Phasen gehorchen ganz verschiedenen Gesetzen; in den Komplex der Variabeln, welche in der Charakteristik der zwei Phasen zueinander in Beziehung treten, tritt als neue Variable die Zeit auf.

§ 2. *Der Spannungsabfall in der Lichtbogensäule in Abhängigkeit von der umgebenden Gasatmosphäre.* — Wie oben theoretisch gefolgert wurde, ist in der positiven Säule des Lichtbogens, der in einer Gasatmosphäre brennt, der Spannungsabfall um so größer, je kleiner die Menge des Metalldampfes in der Säule ist, also beispielsweise je stärker das umgebende Gas die Elektroden abkühlt und je mehr es längs der Säule durch Abkühlung eine partielle Kondensation des Metalldampfes bewirkt. Über die Wirkung verschiedener Gasatmosphären auf den Lichtbogen liegen bereits einige Untersuchungen vor, so von Grove (1840), Herwig[1]), Stenger[2]), Arons[3]), Crew und Basquin[4]), Guye und Monasch.[5]) Es ist von einigen Autoren die Ansicht ausgesprochen worden, daß ein spezifisch chemischer Einfluß des Gases auf die Elektroden das Zustandekommen des Lichtbogens bedinge.[6]) Nach unserer Ansicht ist der Einfluß der Gasatmosphäre auf den Lichtbogen ein sekundärer und ausschließlich unter dem oben gegebenen Gesichtspunkt zu betrachten. Daß für die Existenz des Lichtbogens eine chemische Wirkung eines Gases an der Oberfläche seiner Elektroden prinzipiell nicht notwendig ist, wird allein durch die Tatsache bewiesen, daß für eine Reihe von Metallen (Hg, Cd, Zn, Pb, Bi, Sb) der Lichtbogen ausschließlich in ihrem Dampfe in gasfreien Quarzröhren zu brennen vermag.[7])

Um den Einfluß der Abkühlung durch die Gasatmosphäre an extremen Fällen zu zeigen, wählten wir als Elektroden Kohle und Kupfer, als Gase Kohlensäure und Wasserstoff von atmosphärischem Druck. Die thermischen Leitungsvermögen von Kupfer und Kohle verhalten sich ungefähr wie 1000 : 1, diejenigen von Kohlensäure und Wasserstoff wie 10 : 1.

Der Lichtbogen wurde erzeugt in einer Glaskugel von 11 cm Durchmesser; durch zwei vertikale Ansatzröhren waren in sie die Elektroden eingeführt, über diese und die Ansatz-

1) H. Herwig, Pogg. Ann. **149**. p. 523. 1873.
2) F. Stenger, Wied. Ann. **25**. p. 31. 1885.
3) L. Arons, Ann. d. Phys. **1**. p. 700. 1900.
4) H. Crew u. O. H. Basquin, Proc. Americ. Acad. **33**. p. 335. 1897/98.
5) Ch. E. Guye u. B. Monasch, Ecl. El. **34**. p. 305. 1903.
6) B. Monasch, Der elektrische Lichtbogen. Berlin 1904. p. 205.
7) J. Stark u. R. Küch, Physik. Zeitschr. **6**. p. 438. 1905.

röhren waren Gummischläuche luftdicht geschoben. In horizontaler Stellung waren außerdem noch zwei Röhren mit Hähnen angebracht. Die eine diente zum Einleiten, die andere zum Ableiten des Gases. Kohlensäure wurde aus einer käuflichen Bombe entnommen, Wasserstoff aus Schwefelsäure und Zink entwickelt; beide Gase wurden vor Eintritt in die Kugel durch Phosphorpentoxyd getrocknet. Vor dem Einleiten des Gases wurde die Kugel erst evakuiert, ebenso nach dem Einleiten mehrere Male, um die letzten Luftreste wegzuspülen. Während der Lichtbogen brannte, wurde ein langsamer Gasstrom durch die Kugel geleitet.

Die Kohleelektroden waren lange massive zylindrische Stäbe von 6 mm Durchmesser. Die Kupferelektroden waren 7 mm dicke, 20 mm lange zylindrische Stäbe, die an ihren abgewandten Enden in Kohlenstäben befestigt waren. Als elektromotorische Kraft dienten für die Versuche in Kohlensäure 220 Volt, für die Versuche in Wasserstoff 440 Volt Spannung des städtischen Netzes.

Wir teilen in den Tabb. I und II einige unserer Messungsreihen mit; in Fig. 1 sind sie graphisch dargestellt. Zu Tab. II

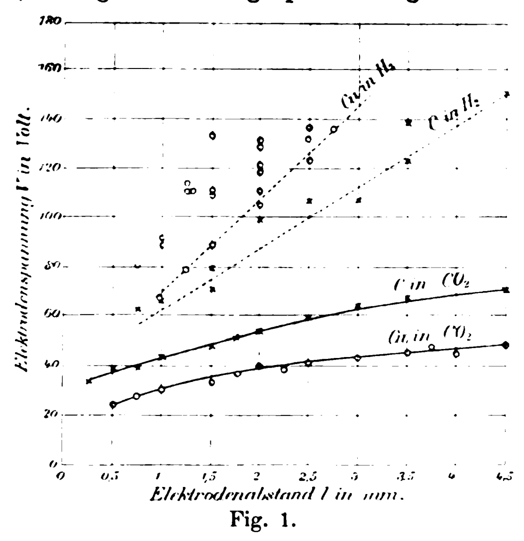


Fig. 1.

sei bemerkt, daß bei den Versuchen in Wasserstoff die Stromstärke nicht überall 3 Amp. betrug, sondern zwischen 3 und

5,5 Amp. variierte infolge der Schwierigkeit konstanter Einstellung.

Tabelle I.

Elektrodenspannung (Volt) des Lichtbogens zwischen Kohleelektroden bei 3 Amp. Stromstärke.

Elektrodenabstand mm	Bogen in CO_2	Bogen in H_2
0,25	32	—
0,5	39	—
0,75	39	61,6
1,0	43	66
1,5	47	71—79
1,75	50	—
2,0	53	88
2,5	59	106
3,0	63,5	106
3,5	67	123—128
4,5	70	150

Tabelle II.

Elektrodenspannung (Volt) des Lichtbogens zwischen Kupferelektroden bei 3 Amp. Stromstärke.

Elektrodenabstand mm	Bogen in CO_2	Bogen in H_2
0,5	24	—
0,75	27	81
1,0	30	66—88—90
1,25	—	79—110—110—114
1,5	33	88—110—110—132
1,75	35	—
2,0	40	106—110—119—119—132—132
2,25	38	—
2,5	40,5	123—132—136
2,75	—	136
3,0	43	—
3,5	45,5	—
3,75	47	—
4,0	44	—
4,5	48	—

Die vorstehenden Messungen besitzen natürlich nicht den Wert fest definierter quantitativer Resultate. Es sind indessen aus ihnen mit Sicherheit folgende qualitative Resultate abzulesen.

Das Spannungsgefälle in der positiven Säule des Lichtbogens, als Tangente an die V, l-Kurve ausgedrückt in Volt.cm^{-1}, ist bei gleicher Stromstärke für Kohleelektroden in Wasserstoff größer als in Kohlensäure, es beträgt für 2 mm Elektrodenabstandin jenem Falle 266, in diesem 100 Volt.cm^{-1}. Für die stärker sich abkühlenden Kupferelektroden ist der Unterschied noch größer; das Spannungsgefälle besitzt hier den Wert 373 bez. 60 Volt.cm^{-1}.

Die Schwankungen der Elektrodenspannung für denselben Elektrodenabstand sind gering für den Lichtbogen in Kohlensäure, beträchtlich für den Lichtbogen zwischen Kohleelektroden in Wasserstoff. Für Kupferelektroden in Wasserstoff sind die Schwankungen so groß, daß ein dauerndes Brennen des Bogens überhaupt nicht möglich ist. Bei den für diesen Fall mitgeteilten Messungen brannte der Lichtbogen im günstigsten Fall nur eine halbe Minute lang, ohne zu erlöschen. Diese Verhältnisse erklären sich auf Grund der Darlegungen, welche der eine von uns an anderer Stelle[1]) über zulässige und unzulässige Störungen des Lichtbogens gegeben hat. Wir verweisen für das Folgende auf die an jener Stelle gegebenen Figuren. Der Lichtbogen kann nämlich bei festem Elektrodenabstand verschiedene Punkte der Elektroden miteinander verbinden, also verschiedene Längen l besitzen; je größer seine Länge ist, desto größer ist dann seine Elektrodenspannung. Für bestimmte Werte der elektromotorischen Kraft E und des Vorschaltwiderstandes r kann er, ohne zu erlöschen, alle Längen l annehmen, deren zugehörige V, i-Kurven von der Widerstandsgeraden E, r geschnitten werden. Ist die kleinste Länge (Elektrodenabstand) l_0, die Zunahme der Länge Δl, dV/dl das Spannungsgefälle, so ist die Zunahme der Elektrodenspannung

$$\Delta V = \frac{dV}{dl} \cdot \Delta l.$$

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 693. 1903.

Für gleiche Schwankungen der Bogenlänge sind also die Schwankungen der Bogenlänge um so größer, je größer der Spannungsabfall in der positiven Säule ist. Entsprechend sind die zulässigen Schwankungen in der Bogenlänge um so kleiner, je größer dieses Spannungsgefälle ist. Die wirklichen Schwankungen in der Bogenlänge sind aber bedingt durch sekundäre Ursachen, vor allem durch den Auftrieb des erhitzten Gases, sie sind darum in Wasserstoff ebenso groß als in Kohlensäure, ja dort größer als hier infolge der größeren Wattleistung bei gleicher Stromstärke. Lediglich der kleinste Wert der Elektrodenspannung für einen bestimmten Elektrodenabstand kann diesem Abstand als Bogenlänge zugeordnet werden; alle größeren Werte entsprechen größeren Bogenlängen infolge der unvermeidlichen Schwankungen. Darum sind in der Fig. 1 nur die niedrigsten V, l-Punkte bei Cu in H_2 durch eine Kurve verbunden.

Von den gegebenen Kurven ist, wie im Vorbeigehen bemerkt sein mag, noch folgendes abzulesen. Das mittlere Spannungsgefälle in der Säule des Lichtbogens in einer Gasatmosphäre ist nicht unabhängig von dem Elektrodenabstand, es nimmt mit wachsendem Abstand ein wenig ab, da infolge der größeren Leistung die Elektroden[1]) von der Säule her stärker erwärmt werden und darum mehr Dampf aussenden. Die V, l-Kurven sind nämlich für Cu und C in CO_2 deutlich ein wenig gekrümmt.

Endlich sieht man, daß die Minimalspannung des Lichtbogens, die Elektrodenspannung für sehr kleine Bogenlänge (Summe aus Anoden- und Kathodenfall), für die gleichen Elektroden nur wenig von der Gasatmosphäre abhängig ist. Die Minimalspannung für Cu-Elektroden ist beträchtlich kleiner als diejenige für C-Elektroden.

§ 3. *Die Methode des Querstromes angewandt auf den Lichtbogen.* — Die Methode des Querstromes[2]) besteht in folgendem, wie kurz erinnert sein mag. In der Bahn eines Haupt- oder Längsstromes wird mit zwei Sonden eine Niveaufläche der

---

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 701. 1903.

2) Literatur vgl. J. Stark, Ann. d. Phys. 3. p. 492. 1900; Die Elektrizität in Gasen. Leipzig 1902. p. 236.

elektrischen Spannung (Potential) aufgesucht, indem die Sonden gegeneinander so lange verschoben werden, bis ihre Spannungsdifferenz Null geworden ist. Die Sonden werden darauf zu Elektroden gemacht, indem an sie eine elektromotorische Kraft gelegt wird; der dann zwischen ihnen fließende Strom heißt Querstrom. Vorausgesetzt, daß die Ionisation in der Umgebung der Sonden konstant ist, also nicht durch den Querstrom verändert wird, vorausgesetzt ferner, daß der Querstrom eine unselbständige Strömung ist, hängt seine Stärke nicht ab von dem Spannungsabfall des Längsstromes und kann darum als Maß für die Ionisation in der Umgebung der Querelektroden dienen. Es sei nämlich Φ der Spannungsabfall im Längsstrom bei Abwesenheit des Querstromes, speziell sei Φ_0 der Spannungswert der Niveaufläche, in welcher die Querelektroden liegen. Ferner sei $\varphi_1 - \varphi_2$ deren Spannungsdifferenz bei Abwesenheit des Längsstromes und konstant bleibender Ionisation. Die Stärke des Querstromes ist dann $i = k . [\varphi_1 - \varphi_2]$, wo k eine Funktion der Dimensionen und der Ionisation ist. Bei Gegenwart des Längsstromes tritt Superposition der Potentiale oder Spannungen ein, die Spannungswerte an den Querelektroden werden $\Phi_0 + \varphi_1$ bez. $\Phi + \varphi_2$. Da k als konstant vorausgesetzt wird, ergibt sich für den Fall der Superposition von Quer- und Längsstrom als Stärke des Querstromes wieder der gleiche Wert $i = k . [(\Phi_0 + \varphi_1) - (\Phi_0 + \varphi_2)] = k . [\varphi_1 - \varphi_2]$ wie vorher ohne Längsstrom.

Die Unabhängigkeit des Querstromes vom Längsstrom für die gemachten Voraussetzungen haben wir in folgender Weise experimentell geprüft. Auf eine Glasplatte wurde ein rechteckiges Stanniolblatt von 15,5 cm Länge und 3 cm Breite aufgeklebt, an seinen Schmalseiten wurde der Längsstrom zu- bez. abgeführt. Parallel zu den beiden Längsseiten waren zwei dicke gerade Stifte angebracht, auf diesen ließen sich die Querelektroden verschieben. Diese waren Drähte, ihre Enden, die auf das Stanniolblatt aufgesetzt werden konnten, waren linear geschärft und 2,5 cm voneinander entfernt. Es wurde zunächst der Längsstrom geschlossen, dann wurden die Querelektroden so lange gegeneinander verschoben, bis ein sie verbindendes Galvanometer (Empfindlichkeit $3 . 10^{-7}$ Amp. pro Skalenteil beim Öffnen und Schließen des Längsstromes keinen Ausschlag

mehr zeigte. Damit waren die Querelektroden auf eine Niveaufläche des Längsstromes gebracht. Darauf wurde dieser geöffnet und zwischen den Querelektroden durch Einschaltung eines Akkumulators eine Stromstärke von $21{,}9 \cdot 10^{-7}$ Amp. hergestellt. Diese Stromstärke blieb dann unverändert erhalten, mochte der Längsstrom in einer Stärke von 2,1 Amp. geschlossen, geöffnet oder kommutiert werden.

Der Querstrom wurde bisher nur zu vergleichenden Untersuchungen der Leitfähigkeiten in verschiedenen Querschnitten eines Längsstromes angewendet. Er kann auch dazu benutzt werden, um die Frage zu beantworten, ob die positiven oder negativen Ionen die größere spezifische Geschwindigkeit besitzen in einer Partie des Längsstromes. Hat man nämlich eine unselbständige Strömung in einem Gas, so stellt sich infolge des Wegwanderns der Ionen an den Elektroden ein Spannungsabfall her. Wie J. J. Thomson[1]), E. Riecke[2]) und G. Mie[3]) theoretisch gezeigt haben, bildet sich an derjenigen Elektrode der größere Spannungsabfall aus, von welcher die spezifisch schnelleren Ionen wegwandern; das Verhältnis von dem Anoden- zum Kathodenfall bei größerer Stromstärke kann als angenähertes Maß für das Verhältnis der spezifischen Ionengeschwindigkeiten dienen. Diese Folgerungen gelten aber, wie ausdrücklich betont werden muß, nur für die unselbständige Strömung. Bei den selbständigen Strömungen, so auch beim Lichtbogen, stellt sich der Spannungsabfall an den Elektroden nach prinzipiell anderen Forderungen ein. Aus dem Spannungsabfall an den Elektroden in selbständigen Strömungen darf nicht jener Schluß auf die spezifische Ionengeschwindigkeit gezogen werden.

Um über das Verhältnis der spezifischen Geschwindigkeiten der Ionen innerhalb einer selbständigen Strömung Aufschluß zu gewinnen, kann man die von dieser bewirkte Ionisation im Gase benützen, um eine unselbständige Strömung herzustellen. Aus deren Anoden- und Kathodenfall darf man dann auf die spezifische Geschwindigkeit der Ionen der selb-

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. 47. p. 257. 1899.
2) E. Riecke, Ann. d. Phys. 12. p. 52. 1903.
3) G. Mie, Ann. d. Phys. 13. p. 858. 1904.

ständigen Strömung schließen. Dies kann man auf zweierlei Arten erreichen. Entweder kann man das ionisierte Gas schnell aus der Bahn der selbständigen Strömung fortführen und in ihm dann eine unselbständige Strömung herstellen in Abwesenheit des Kraftfeldes der selbständigen Strömung. Die Fortführung des ionisierten Gases muß indes so rasch geschehen, daß die Temperatur und die Art der Ionisation sich nicht ändern; sonst ist nicht mehr der Schluß auf die spezifische Ionengeschwindigkeit in dem Gebiet der selbständigen Strömung gestattet.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, über die selbständige Strömung in einer ihrer Partien eine unselbständige zu lagern und deren Anoden- und Kathodenfall zu messen. Hierbei muß indes der Querstrom bereits so stark sein, daß er unmittelbar an seinen Elektroden die Ionisation erniedrigt und so einen Spannungsabfall herstellt. Dadurch beeinflußt er indirekt den Spannungsabfall des Längsstromes. Infolgedessen verlieren die Messungen und Folgerungen an quantitativer Strenge. Immerhin aber kann der Anoden- und Kathodenfall eines unselbständigen Querstromes dazu dienen, die Frage nach der Ungleichheit der spezifischen Ionengeschwindigkeiten zu entscheiden. Damit der Querstrom unselbständig bleibt, darf seine Elektrodenspannung nicht beträchtlich die Ionisierungsspannung der Ionen in der selbständigen Strömung überschreiten. Darum wählten wir sie in den nachstehenden Versuchen nicht größer als 8 Volt (Ionisierungsspannung in Quecksilberdampf rund 6 Volt).

§ 4. *Verhältnis der Geschwindigkeiten der positiven und negativen Ionen.* — Die eben besprochene erste Möglichkeit, Aufschluß über das Verhältnis der Ionengeschwindigkeiten zu gewinnen, läßt sich beim Quecksilberlichtbogen anwenden. Brennt nämlich dieser in verdünntem Quecksilberdampf in einer Lampe mit einem Kondensationsgefäß (Fig. 2, $^1/_{10}$ nat. Größe), so stürzt aus der Strombahn in dieses ein Dampfstrahl mit einer Geschwindigkeit [1]), welche bis zu derjenigen des Schalles unter den gegebenen Umständen wachsen kann. In diesem Dampfstrahl findet zwar bereits Abkühlung statt.

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 4. p. 441. 1903.

Immerhin aber befindet sich in ihm der Dampf noch angenähert in demselben Zustand wie in der Strombahn des Lichtbogens. Wir brachten über der Öffnung im Kondensationsgefäß symmetrisch zwei Platinelektroden E_1 und E_2 an. Sie waren 0,5 mm dicke Platindrähte, die aus Glasröhrchen auf eine Länge von 3 mm hervorragten, der Abstand ihrer Enden betrug 15 mm. Zwischen ihnen wurde mit Hilfe einer gut isolierten Batterie von 2, 4, 6 oder 8 Volt durch den Dampfstrahl ein unselbständiger Strom gesandt; indem nur ein geringer Vorschaltwiderstand diesem Strom gegeben wurde, konnte er relativ stark werden (bis zu 2.10^{-4} Amp.), auch wurde dadurch die ganze Spannung des Stromkreises in seinen dampfförmigen Teil verlegt.

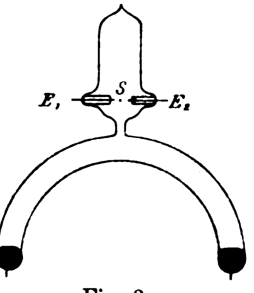


Fig. 2.

Zur Messung des Anoden- und Kathodenfalles diente in allen nachstehenden Fällen eine dritte Sonde (S), deren aus einem Glasröhrchen hervorragende Spitze befand sich immer in der Mitte zwischen den zwei Elektroden E_1 und E_2. Sie war mit dem einen Pole eines Elektrometers verbunden, dessen anderer Pol konnte entweder mit der Anode oder mit der Kathode des unselbständigen Stromes verbunden werden. Die Spannungsdifferenz (S_a bez. S_k) der Sonde gegen eine Elektrode enthielt darum nicht bloß den Spannungsabfall unmittelbar an der Elektrode (A bez. K), sondern auch noch den Abfall (G) längs einer Strecke im Gas. Es war also zu setzen

$$\frac{S_k}{S_a} = \frac{K + G}{A + G}.$$

Nun ergab sich dieses Verhältnis in allen Fällen größer als 1; darum ist

$$\frac{K}{A} > \frac{S_k}{S_a}.$$

Wenn wir darum im nachstehenden $S_k = K$ und $S_a = A$ setzen, so machen wir einen Fehler, der das Verhältnis der Geschwindigkeiten der negativen und der positiven Ionen im Verhältnis zum wirklichen Wert verkleinert.

Die Kurven der Fig. 3 geben einen Teil unserer Messungen an dem Dampfstrahl aus dem Quecksilberlichtbogen (3 Amp.) wieder. Die Werte der kathodischen Spannungsdifferenz sind als kleine Kreuze, diejenigen der anodischen Differenz als kleine Kreise eingetragen. Zu den ersteren ist die Stärke des unselbständigen Stromes (Einheit = 3.10^{-6} Amp.) geschrieben. Diese war infolge der Oszillationen des Dampfstrahles Schwankungen unterworfen. Beobachtet wurde von der Zeit unmittelbar nach der Zündung des Lichtbogens in Intervallen von 30 Sek., bis die Oszillationen des Dampfstrahles die Ablesungen störten. Die elektromotorischen Kräfte in den aufeinanderfolgenden Messungsreihen waren 2, 4, 6 und 8 Volt. Von den Kurven der Figur sind folgende Resultate abzulesen.

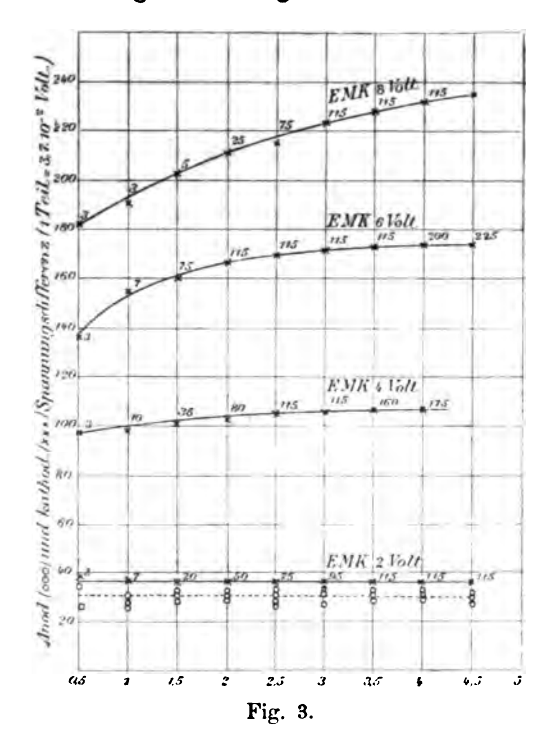


Fig. 3.

Die anodische Spannungsdifferenz ist unabhängig von der Stromstärke, die kathodische Differenz wächst mit der Stromstärke. Für eine elektromotorische Kraft von 8 Volt hat das

Verhältnis der kathodischen zur anodischen Differenz bei starkem Strom den Wert 238/32 = 7,4. ***In ionisiertem Quecksilberdampf, der aus der Strombahn des Lichtbogens kommt und sich von dem hier vorhandenen Dampf wenig unterscheidet, ist also der Kathodenfall mehr als 7,4 mal größer als der Anodenfall einer unselbständigen Strömung.*** In der Strombahn des Lichtbogens in verdünntem Quecksilberdampf ist demnach die spezifische Geschwindigkeit der negativen Ionen von einer höheren Ordnung als diejenige der positiven Ionen.

Auf den Lichtbogen in verdünntem Quecksilberdampf wandten wir auch die oben an zweiter Stelle besprochene Methode an zur Bestimmung des Verhältnisses der Ionengeschwindigkeiten. Wir lagerten nämlich auf den Lichtbogen einen unselbständigen Querstrom und bestimmten dessen anodische und kathodische Spannungsdifferenz. Hierzu diente uns die Röhre, deren Dimensionen in Fig. 4 in $1/5$ nat. Größe wiedergegeben sind. In 10 cm Abstand von der unteren Elektrode waren normal zu den Stromlinien des Lichtbogens die Querelektroden E_1 und E_2 angebracht. Es waren 0,4 mm dicke Platindrähte, welche aus engen Glasröhrchen auf eine Länge von 3 mm frei hervorragten. Ihre Enden hatten einen Abstand zu 10 mm; mitten zwischen ihnen lag das Ende einer Sonde S, die ebenso wie die Querelektroden zugerichtet war; sie stand normal zu diesen und befand sich auf der gleichen Höhe wie sie.

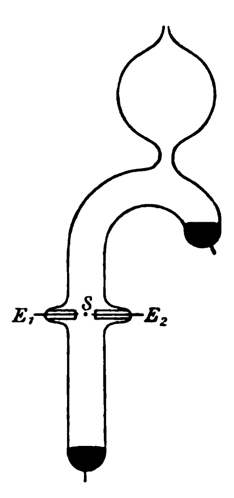


Fig. 4.

Zunächst wurde untersucht, ob die drei sekundären Platinelektroden E_1, E_2 und S auf einer Niveauebene des Lichtbogens lagen, indem mit dem Elektrometer die Spannungsdifferenzen $S - E_1$ und $S - E_2$ ermittelt wurden. Diese ergaben sich so klein, daß jene Frage bejaht werden konnte. Dann wurden E_1 und E_2 durch eine elektromotorische Kraft von 2, 4, 6 oder 8 Volt, einen Widerstand und ein Amperemeter bei guter Isolation miteinander verbunden, es wurde also ein unselbständiger Querstrom hergestellt. Dessen anodische und

kathodische Spannungsdifferenz wurde dann wieder elektrometrisch bestimmt; die Stromstärke des Lichtbogens wurde hierbei auf 3,1 Amp. gehalten. In Tab. III teilen wir eine von unseren Messungsreihen mit.

Tabelle III.

Elektr. Kraft Volt	Stromstärke 10^{-6} Amp.	Anod. Diff. S_a Volt	Kathod. Diff. S_k Volt
2,02	75	0,64	1,26
4,04	135	0,60	4,01
6,06	142	0,68	6,03
8,08	147	0,80	8,64

An dieser Tabelle fällt auf, daß die Summe aus S_a und S_k etwas größer ist als die elektromotorische Kraft des Querstromes. Diese Erscheinung dürfte sich aus dem oben besprochenen Umstand erklären, daß der Querstrom den Spannungsabfall des Längsstromes etwas ändert, indem er die Ionisation des Dampfes in der Nähe seiner Elektroden erniedrigt. Hiervon abgesehen, ist aus der Tabelle folgendes Resultat abzuleiten. Die kathodische Spannungsdifferenz des Querstromes im Lichtbogen in verdünntem Quecksilberdampf ist beträchtlich größer als die anodische Differenz, für 8 Volt elektromotorische Kraft ist das Verhältnis S_k / S_a ungefähr gleich 10. Demnach *ist der Kathodenfall einer unselbständigen Strömung in der Bahn des Lichtbogens durch verdünnten Quecksilberdampf von einer höheren Ordnung als der Anodenfall;* das gleiche gilt darum auch von der spezifischen Geschwindigkeit der negativen Ionen in bezug auf diejenige der positiven Ionen. Das gleiche Resultat wurde auf analogem Wege auch für den Querstrom in einem Glimmstrom durch verdünnten Stickstoff bereits früher[1]) gefunden.

Schließlich wandten wir die vorstehende Methode auch auf den Kohlelichtbogen in freier Luft an. In diesem Falle liegen die Verhältnisse für exakte Messungen sehr schwierig. Es lassen sich nämlich Schwankungen in der Orientierung des vertikalen Bogens nicht vermeiden; gleichzeitig ist der Spannungs-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. **13**. p. 380. 1904.

abfall in der positiven Säule größer als bei niedrigem Dampfdruck. Infolgedessen lassen sich die drei Sonden E_1, E_2 und S nur kurze Zeit angenähert auf einer Niveauebene des Lichtbogens halten; während weniger Beobachtungen kommen bereits beträchtliche Schwankungen der Niveauebene vor. Indes hat sich trotz der geringen Genauigkeit auch in diesem Falle ganz unzweifelhaft das gleiche Resultat wie für den Quecksilberlichtbogen ergeben.

Als Querelektroden benutzten wir bei dem Kohlelichtbogen in freier Luft 1,5 mm dicke Graphitstifte. Diese wurden, wie Fig. 5 ($^1/_4$ nat. Größe) zeigt, mittels Klemmschrauben an dicken Kupferstiften befestigt. Diese waren ihrerseits wieder in Klemmschrauben K_1, K_2, K_3 befestigt; diese saßen auf einem Rahmen RR aus dickem Messingblech; sie waren von ihm durch eine Zwischenlage aus Hartgummi (in der Figur gestrichelt) isoliert. Der Rahmen wurde zunächst so gegen den vertikalen Lichtbogen horizontal orientiert, daß die drei Sonden E_1, E_2, S innerhalb des Lichtbogens sich befanden und darum an ihren Enden glühten. Dann wurden rasch mit dem Elektrometer die Spannungsdifferenzen $S - E_1$ und $S - E_2$ bestimmt; waren sie klein und nahezu gleich, so wurde rasch an E_1 und E_2 die elektromotorische Kraft des Querstromes gelegt und in raschem Wechsel wurden dann S_a und S_k bestimmt, bis die Elektroden E_1 und E_2 infolge von Abbrand aus der heißen Strombahn heraustraten.

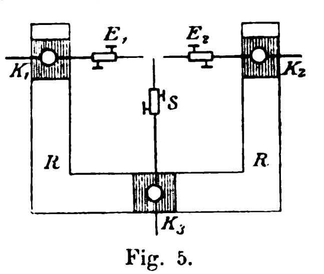


Fig. 5.

In den Tabb. IV und V p. 236 sind zwei Reihen als Beispiele der nach der vorstehenden Methode angestellten Beobachtungen mitgeteilt.

Aus diesen und den übrigen zahlreichen hier nicht mitgeteilten Messungen ergeben sich folgende allgemeine Resultate. Die anodische Spannungsdifferenz des Querstromes im Kohlelichtbogen in freier Luft ist infolge der Oszillationen von dessen Niveauflächen relativ großen Schwankungen unterworfen; sie beträgt für eine elektromotorische Kraft von 8 Volt im Mittel ungefähr 1 Volt. Die kathodische Spannungsdifferenz

Tabelle IV.

Stromstärke des Lichtbogens 7,5 Amp.
Elektr. Kraft des Querstromes 6,06 Volt.

Kathod. Differenz S_k in Volt	Anod. Differenz S_a in Volt
5,2	−0,2
6,8	+1,0
6,4	+1,0
7,0	+0,2

Tabelle V.

Stromstärke des Lichtbogens 8 Amp.
Elektr. Kraft des Querstromes 8,08 Volt.

Kathod. Differenz S_k in Volt	Anod. Differenz S_a in Volt
8,0	+2,4
8,0	+0,8
12,0	−0,8
8,0	+0,8

erfährt keine so großen prozentualen Schwankungen, sie wechselt nie ihr Vorzeichen; sie beträgt im Mittel ungefähr 7 Volt. *Demnach ist auch im Kohlelichtbogen in freier Luft der Kathodenfall eines unselbständigen Querstromes von einer höheren Ordnung als der Anodenfall*; das gleiche gilt auch hier wieder von der spezifischen Geschwindigkeit der negativen Ionen in bezug auf diejenige der positiven Ionen.

Nach den vorausgehenden Untersuchungen darf der experimentelle Beweis als erbracht gelten, daß die oben dargelegte theoretische Ansicht über die Natur *der negativen Ionen* richtig ist, daß *diese nämlich eine viel größere spezifische Geschwindigkeit als die positiven Ionen im Innern der Strombahn des Lichtbogens besitzen.* Der Grund ist in der Verschiedenheit der Masse der Ionen zu suchen. Die schnellen negativen Ionen im Lichtbogen sind Elektronionen (Kathodenstrahlen). Es sei daran erinnert, daß für die Ionen, welche vom Lichtbogen weg in die umgebende niedrig temperierte Gasatmosphäre durch ein elektrisches Feld getrieben werden können, nach C. D. Child[1]) ein anderes Verhältnis der spezifischen Geschwindigkeiten sich ergibt.

§ 5. *Methode zur Messung des Kathodenfalles.* — Unmittelbar an der Kathode des Lichtbogens ist ein großer Spannungsabfall vorhanden; vom kathodischen Lichtbüschel weg in der ungeschichteten positiven Lichtsäule ist der Spannungsabfall räumlich konstant. Die Spannungsdifferenz zwischen der

1) C. D. Child, Phys. Rev. 12. p. 137. 1901.

kathodischen Strombasis und dem Punkt im Lichtbüschel, von dem ab der Spannungsabfall räumlich konstant ist, sei der Kathodenfall des Lichtbogens genannt. Bei niedrigem Dampfdruck erweist sich der Spannungsabfall im kathodischen Lichtbüschel als so klein, daß die Spannungsdifferenz zwischen der Kathode und einem beliebigen Punkte des Lichtbüschels den Kathodenfall genügend genau darstellt.

Die Bestimmung des Kathodenfalles des Lichtbogens ist aus folgenden Gründen mit Schwierigkeiten verbunden. Auch wenn die kathodische Strombasis auf der Kathode unbeweglich fest liegt, wie es beispielsweise beim Kohlelichtbogen in freier Luft der Fall ist, läßt sich eine Sonde im Lichtbüschel nicht beliebig nahe an die Strombasis heranführen, weil sonst die Strömung gestört würde. Bei einem Abstand von einigen Millimetern zwischen Sonde und Strombasis geht darum in den zu messenden Kathodenfall immer ein Stück Spannungsabfall aus der Strombahn im Dampf ein. Ist die gemessene kathodische Spannungsdifferenz S_k, der Abstand zwischen Sonde und Strombasis l, das Gefälle in der positiven Säule dV/dl, der Kathodenfall K, so gilt

$$S_k = K + l \cdot \frac{dV}{dl}.$$

Setzt man darum $S_k = K$, so ist der Fehler um so größer, je größer $l.dV/dl$ ist. Dieser Fehler läßt sich dann bestimmen, wenn die kathodische Strombasis fest liegen bleibt; man ermittelt dann l und dV/dl, so daß sich $l.dV/dl$ berechnen läßt. An metallischen Kathoden in einer Gasatmosphäre von höherem Druck ist indes die kathodische Strombasis dauernd in einer ganz unregelmäßigen Wanderung über die Kathodenoberfläche begriffen; das gleiche ist immer dann der Fall, wenn der Lichtbogen im verdünnten Dampf seiner Elektroden brennt. In diesem Falle läßt sich darum l nicht bestimmen, es ist eine ganz unregelmäßig oszillierende positive Funktion der Zeit. Soll deshalb in diesem Fall die gemessene kathodische Spannungsdifferenz S_k den Kathodenfall genügend genau darstellen, so müssen die Versuchsbedingungen so gewählt werden, daß $l.dV/dl$ gegen K sehr klein ist. Dies erreicht man dadurch, daß man dV/dl, also den Dampfdruck, sehr klein macht. Aus diesem Grunde wählten wir bei allen nach-

stehenden Versuchen die Bedingungen so, daß während der Messung der kathodischen Spannungsdifferenz der Druck des Quecksilberdampfes klein blieb.

Die Untersuchung des Anoden- und Kathodenfalles an Quecksilberelektroden wurde ausgeführt an einer hoch evakuierten, dauernd an der Pumpe sitzenden Lampe, welche die in der Fig. 6 ($^1/_5$ nat. Größe) dargestellte Form hatte. Als Sonde diente ein Platindraht, der in ein Glasrohr von 5 mm äußerem Durchmesser eingeschmolzen war, sein aus ihm in die Lampe hervorragendes Ende war 2 mm lang und am Glas scharf horizontal abgebogen. Im Glasrohr selbst war der Platindraht in einem Kupferdraht festgemacht, dieser führte durch das Rohr nach außen zum Elektrometer. Das Rohr mit der Sonde konnte in einem Barometerrohr, wie es die Figur zeigt, vertikal verschoben werden. Der Abstand zwischen Sonde und Elektrodenoberfläche wurde mit Hilfe eines Fernrohres gemessen, das an Stelle des Fadenkreuzes eine Skala auf Glas besaß; ein Teilstrich derselben entsprach in der Regel 0,588 mm Sondenabstand. Das verwendete Quadrantelektrometer war ein Elster-Geitelsches mit großer Dämpfung; 1 mm Skalenteil Ausschlag entsprachen 7,4 bis 9,1 . 10^{-2} Volt; das Instrument wurde am Ende jeder größeren Messungsreihe neu geeicht. Die Elektrode E_1 lag an der Erde und dem einen Quadrantenpaar, die Sonde S an dem anderen Quadrantenpaar. Der Lichtbogen in verdünntem Quecksilberdampf wurde in allen Fällen durch Induktion [1]) gezündet.

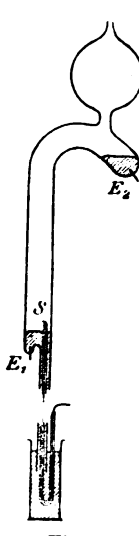


Fig. 6.

Bevor wir die Abhängigkeit des Kathodenfalles von der Stromstärke untersuchten, studierten wir die Bedingungen, die hierbei zu berücksichtigen sind. Wir untersuchten zunächst den Verlauf des Spannungsabfalles von der Kathode weg nach dem Innern der positiven Säule. Fig. 7 gibt zwei unserer Messungsreihen wieder. Der als Abszisse angetragene Abstand l ist der normale Abstand der Sonde von der Kathoden-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. **12**. p. 709. 1903; J. Stark u. R. Küch, Phys. Zeitschr. **6**. p. 438. 1905.

oberfläche, nicht der Abstand von der Strombasis; diese ist ja dauernd in einer unregelmäßigen Bewegung in horizontaler Richtung begriffen. Als Ordinate ist die kathodische Spannungsdifferenz zwischen Kathode und Sonde angetragen. Es hat nach den zwei Kurven der Fig. 7 den Anschein, als ob die kathodische Differenz S_k fast bis unmittelbar an die Oberfläche gemessen werden und als ob sie kleiner als 5 Volt sich ergeben könnte. Dies ist aber nur scheinbar. In dem gestrichelten Teil der Kurven finden nämlich zwischen Sonde und Oberfläche schnelle vorübergehende Berührungen statt unter momentanem Nullwerden von S_k; das Elektrometer gibt aber nur

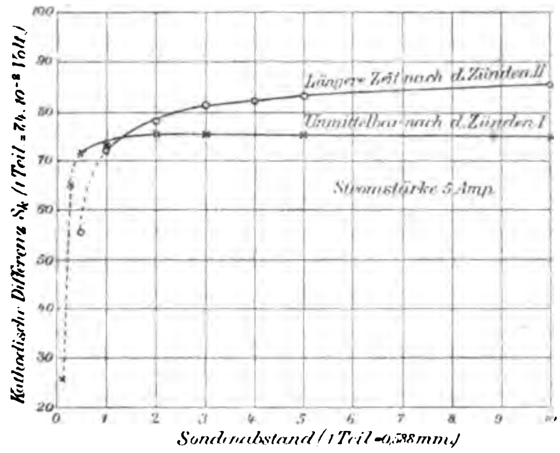


Fig. 7.

das Mittel aus den Amplituden von S_k; S_k kann darum kleiner werden als K. Die Berührungen zwischen Sonde und Oberfläche werden durch die unregelmäßigen vertikalen Schwankungen bewirkt, zu welchen die Oberfläche durch das Umherirren der kathodischen Strombasis und den Überdruck des Dampfes in dieser veranlaßt wird.

Die Kurve I zeigt, daß der Spannungsabfall in größerem Abstand von der Kathode sehr klein ist entsprechend dem kleinen Dampfdruck, der unmittelbar nach dem Zünden der kalten Lampe vorhanden ist. Die Kurve II wurde aufgenommen, nachdem die Lampe bereits längere Zeit gebrannt, nachdem also infolge Herstellung einer höheren Temperatur im ganzen

Raum der Lampe der Dampfdruck einen höheren Wert angenommen hatte. Wie man sieht, ist in diesem Falle das Spannungsgefälle dV/dl im Dampfraum größer, demgemäß auch

$$S_k = K + l \cdot \frac{dV}{dl}.$$

Läßt man darum bei größerer Stromstärke die Lampe erst stationär einbrennen und nimmt dann wieder die S_k, l-Kurve

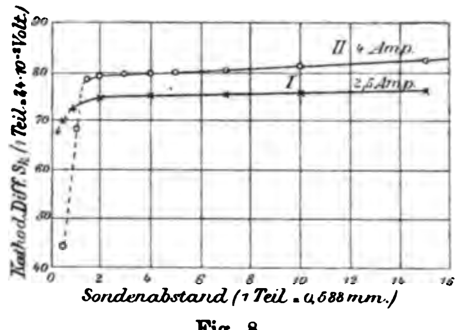


Fig. 8.

auf, so erhält man für die größere Stromstärke (Kurve II, Fig. 8) einen größeren Spannungsabfall als für eine kleinere Stromstärke (Kurve I, Fig. 8).

Über die Veränderung von S_k unmittelbar nach dem Zünden der kalten Lampe stellten wir noch eine Reihe von Beobachtungen an. Die Kurve I in Fig. 9 gibt eine Beobachtungs-

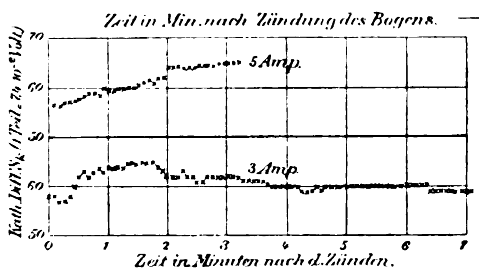


Fig. 9.

reihe wieder. Wie man sieht, nimmt bei kleiner Stromstärke (3 Amp.) die Differenz S_k mit der Zeit erst ein wenig zu, erreicht ein Maximum und stellt sich dann auf einen konstanten Wert ein. Diese Variation von S_k mit der Zeit geht parallel

gewissen Veränderungen in dem Zustande der Lampe. Einmal steigt unmittelbar nach dem Zünden der Dampfdruck des Quecksilbers, um nach einiger Zeit einen stationären Wert anzunehmen; dieser stationäre Wert wird um so früher erreicht, je kleiner die Stromstärke ist. Das kathodische Lichtbüschel ist unmittelbar nach dem Zünden in sehr schneller Bewegung begriffen, mit der Zeit aber mäßigt sich bei steigendem Dampfdruck diese Bewegung. Unmittelbar nach dem Zünden beschlagen sich die noch kalten Wände der Lampe und die Sonde mit kondensierten Quecksilbertröpfchen; bei steigender Temperatur verschwinden diese mit der Zeit. Welche von diesen Änderungen im Zustand der Lampe unmittelbar nach dem Zünden die zeitliche Variation von S_k veranlaßt, kann nicht sicher gesagt werden. Wird die Lampe mit größerer Stromstärke beschickt, so ändert sich der Zustand der Lampe infolge der höheren Temperatur rascher; jenes Maximum von S_k tritt nicht mehr auf, vielmehr nimmt S_k entsprechend dem steigenden Dampfdruck dauernd unmittelbar nach dem Zünden zu und stellt sich dementsprechend auf einen höheren stationären Wert ein als bei kleinerer Stromstärke. Ist die Lampe beim Zünden bereits warm, so tritt auch bei kleiner Stromstärke jenes Maximum nicht auf.

§ 6. *Kathodenfall und Stromstärke.* — Aus den vorstehenden Untersuchungen ergeben sich für eine quantitative Messung des Kathodenfalles folgende Resultate. Erstens muß man die kalte Lampe bei kleiner Stromstärke zünden und sie dann bei kleiner Stromstärke stationär einbrennen lassen (Fig. 8, Kurve I). Zweitens ist bei niedrigem Dampfdruck $d\,V/d\,l$ in einigem Abstand von der Kathode so klein, daß $S_k = K$ gesetzt werden darf; dementsprechend darf dann auch der Abstand der Sonde von der Kathode bis zu 10 mm variiert werden, ohne daß der Fehler $l . d\,V/d\,l$ merklich wird. Drittens darf bei größerer Stromstärke der stationäre Zustand bei der Messung von S_k nicht abgewartet werden; sonst wird mit steigendem Dampfdruck $l . d\,V/d\,l$ so groß, daß nicht mehr $S_k = K$ gesetzt werden darf (Fig. 8, Kurve II). Will man darum für größere Stromstärken K durch S_k messen, so muß man die Lampe erst bei kleiner Stromstärke zünden und stationär einbrennen lassen. Dann muß man schnell die Stromstärke erhöhen und S_k messen,

dann wieder schnell auf die kleine Stromstärke zurückgehen und durch erneute Messung von S_k kontrollieren, ob nicht unterdessen der Dampfdruck bereits störend groß geworden ist.

Demgemäß wählten wir folgende Methode. Es wurde zunächst die Sonde auf 3,3 mm Abstand von der Kathodenoberfläche eingestellt, dann zündete der erste Beobachter mit 3 oder 4 Amp., der zweite las darauf die Nullstellung des Elektrometers ab, der dritte notierte die Ablesung. Darauf wurde das Elektrometer an die Sonde gelegt; der zweite Beobachter nannte den Ausschlag A_1, wenn er konstant geworden; der dritte notierte ihn. Darauf stellte der erste schnell auf eine verabredete größere Stromstärke ein, las laut das Ampèremeter ab, unmittelbar darauf las auch der zweite laut den Ausschlag des Elektrometers ab; gleich darauf brachte der erste die Stromstärke wieder auf 4 Amp., las laut das Amperemeter ab, worauf sofort auch der zweite den Elektrometerausschlag A_2 ablas. Der dritte hatte unterdessen sämtliche Ablesungen notiert und kontrollierte zum Schlusse noch den Sondenabstand. Waren A_1 und A_2 nicht mehr als 2 mm verschieden, so konnte angenommen werden, daß während der ganzen Beobachtung der Dampfdruck so gut wie konstant geblieben war; im anderen Falle wurde die Beobachtung verworfen. Wir geben in folgender Tabelle ein Beispiel unseres Verfahrens.

Tabelle VI.

Beobachter	Handlung	Beobachter	Handlung
III	Sonde 6 Teile	II	693
I	zündet	III	notiert
I	4 Amp.	I	4 Amp.
II	Null 750	II	691
II	692 konstant	III	notiert
III	notiert	III	Sonde 6 Teile
I	30 Amp.		

Nach diesem Verfahren haben wir den Kathodenfall für 2—3—4—5—7—10—15—20—30—40—50 Amp. in mehrfacher Wiederholung bestimmt; für 50 Amp. haben wir nur zwei Beobachtungen angestellt; auch gelang es uns in diesem Falle nicht, wieder auf 4 Amp. zurückzugehen; kaum hatte

nämlich der zweite Beobachter das Elektrometer abgelesen, so sprang beidemal auch bereits die Röhre an der Einschmelzstelle einer Platinzuleitung.

Aus den vorstehenden Beobachtungen ergab sich nun mit Sicherheit folgendes allgemeine Resultat. Für alle Stromstärken im Bereich von 2—50 Amp. zeigte das Elektrometer, während es den Kathodenfall maß, unregelmäßige Schwankungen von ± 1 mm um den Ausschlag von 58 mm. *Im Bereich von 2 bis 50 Amp. ist darum der Kathodenfall des Lichtbogens in Quecksilberdampf an einer Quecksilberelektrode unabhängig von der Stromstärke und bis auf $\pm 1,7$ Proz. genau gleich 5,27 Volt.*

Gegenüber diesem quantitativen Resultat mag der Einspruch erhoben werden, daß vielleicht der Kathodenfall $K = 5,27$ Volt nicht genau den Spannungsabfall im Dampf zwischen Sonde und Kathode darstellt, sondern daß in ihm eine Spannungsdifferenz enthalten ist, welche durch die Verschiedenheit des Materiales von Sonde (Pt) und Kathode (Hg) bedingt ist. Nun ist zwar nach Warburg[1]) die sogenannte Voltadifferenz zwischen zwei verschiedenen Metallen im Vakuum bei Beseitigung einer an ihnen haftenden Wasserhaut nicht mehr vorhanden. Gleichwohl hielten wir es für nötig, den Einfluß des Sondenmateriales zu untersuchen, bevor wir an die vorstehenden definitiven Messungen gingen. Wir ersetzten zu diesem Zwecke die Platinsonde durch eine Quecksilbersonde. In ein Glasröhrchen wurde, wie Fig. 10 zeigt, in 2,5 cm Abstand von der Öffnung ein Platindraht eingeschmolzen. An dessen einem Ende war wieder der Kupferdraht befestigt, der durch das Sondenrohr nach dem Elektrometer leitete, das andere Ende ragte einige Millimeter in das offene Rohrende, dieses wurde mit Quecksilber gefüllt, dessen Kuppe diente dann als Sonde. Wir wiederholten mit dieser Hg-Sonde alle Beobachtungen, die wir mit der Pt-Sonde angestellt hatten; wir fanden weder in quantitativer noch qualitativer Hinsicht einen Unterschied zwischen den Resultaten mit den zwei Sonden. Aus diesem



Fig. 10.

1) E. Warburg, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1904. p. 850; H. Greinacher, Ann. d. Phys. 16. p. 708. 1905.

Grunde verwendeten wir zu den weiteren Messungen ausschließlich die Pt-Sonde.

§ 7. *Der Anodenfall in der Anodenschicht an kalter Anode.* — Entsprechend den drei verschiedenen Werten, welche die Theorie von dem Anodenfall des Lichtbogens fordert, stellten wir unter drei prinzipiell verschiedenen Versuchsbedingungen Beobachtungen über den Anodenfall an. Wir teilen zunächst unsere Messungen für den Fall mit, daß die Anode von der Anodenschicht auf ihrer ganzen Oberfläche bedeckt ist und eine relativ niedrige Temperatur hat. Dieser Fall liegt an einer Quecksilberanode bei niedrigem Dampfdruck vor. Die Messungen wurden in diesem Falle ganz analog wie diejenigen für den Kathodenfall ausgeführt. Es wurde die gleiche Pt-Sonde und die gleiche Röhre (Fig. 6) verwendet; nur diente die Elektrode E_1 nunmehr als Anode.

Der Anodenfall ist analog dem Kathodenfall als diejenige Spannungsdifferenz zu definieren, welche zwischen der anodischen Strombasis und demjenigen Stromquerschnitt vor ihr im Dampfraum liegt, von welchem ab das Spannungsgefälle räumlich konstant ist. Entsprechend dieser Definition hatten wir zunächst über die räumliche Variation der Spannung von der

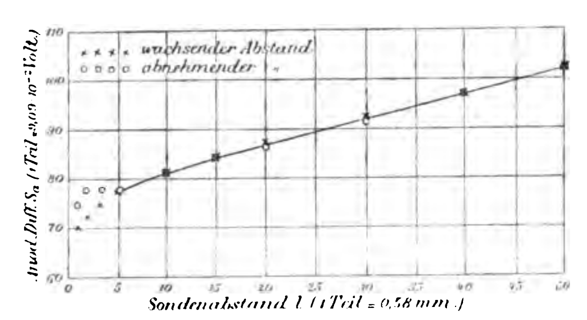


Fig. 11.

Anode weg Untersuchungen anzustellen. Man schien erwarten zu dürfen, daß man in dieser Hinsicht an der Anode exaktere Messungen ausführen könnte; denn hier liegt ja die Strombasis fest, indem sie bei niedrigem Dampfdruck die ganze Oberfläche bedeckt; die Niveauflächen müssen hier wenigstens bei Abwesenheit der Sonde Ebenen sein, die parallel der

Anodenoberfläche sind. Indes erfüllte sich diese Erwartung nicht. Bei zyklischer Variation des Sondenabstandes ließ sich eine Übereinstimmung der Spannungswerte für den gleichen Sondenabstand wohl für größere Abstände erzielen, aber nicht unmittelbar an der Anode selbst. Hier erfuhren die Niveauflächen offenbar durch die Gegenwart der Sonde und durch die von ihr bewirkte Deformation der Anodenoberfläche eine unregelmäßige Störung. In Fig. 11 ist eine derartige zyklische Variation mitgeteilt.

Wenn nun auch unmittelbar an der Anode die räumliche Variation der Spannung nicht genau verfolgt werden kann, so lehrt doch das Beispiel der Kurve in Fig. 11, daß selbst bei niedrigem Dampfdruck das Gebiet, in welchem der Anodenfall liegt, nicht weiter als 3 mm von der Anode weg sich erstreckt; um so mehr muß dies bei höherem Druck der Fall sein. Darum kann der Anodenfall A aus der gemessenen anodischen Spannungsdifferenz S_a gemäß der Gleichung

$$S_a = A + l \cdot \frac{dV}{dl}$$

durch Messung von l und dV/dl berechnet werden.

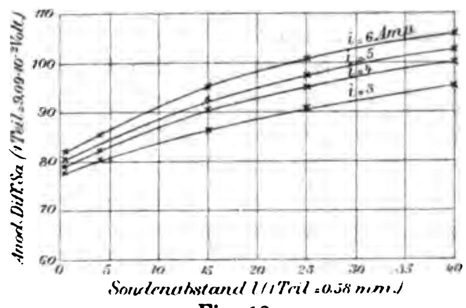


Fig. 12.

In Fig. 12 sind mehrere Messungsreihen der anodischen Differenz S_a und des Sondenabstandes l für verschiedene Stromstärken mitgeteilt. Durch Interpolation $\left(S_a = K\right)_{l=0}$ wurde aus ihnen die Tab. VII berechnet.

Tabelle VII.

Stromstärke Amp.	Anodenfall Volt
3	7,0
4	7,1
5	7,3
6	7,4

Tabelle VIII.

Stromstärke Amp.	Anodenfall Volt
3	6,4
4	6,5
6	6,7
8	6,9
10	7,0

Aus ihr folgt, daß *der Anodenfall an flüssigem Quecksilber bei ganz bedeckter Anodenoberfläche etwas mit der Stromstärke wächst.* Das gleiche folgt aus der Tabelle VIII, welche die anodische Spannungsdifferenz (Anodenfall) bei einem Sondenabstand von 2,3 mm für verschiedene Stromstärken bei schneller zyklischer Variation derselben wiedergibt. Aus beiden Tabellen berechnet sich *als Minimum des Anodenfalles* (für sehr kleine Stromstärke) *der Wert 6,35 Volt.*

Fig. 13.

Wir untersuchten weiter den Anodenfall an einer kalten Eisenanode. Diese war, wie Fig. 13 zeigt, ein zylindrischer, oben offener Behälter aus Eisen, seine Wandstärke betrug 1 mm; er wurde von einem Eisenstift axial von oben gehalten und war gefüllt mit Quecksilber; der Abstand zwischen ihm und der Glaswand betrug 0,5—1,3 mm. Seine untere Fläche diente als anodische Strombasis, sie war in allen Fällen ganz mit der Anodenschicht bedeckt. Infolge der Zirkulation des Quecksilbers blieb die Temperatur der anodischen Strombasis selbst bei 8 Amp. Belastung unter derjenigen der Rotglut. In Tab. IX ist eine Messungsreihe mitgeteilt; sie ist deswegen nicht ausgedehnt, weil die Röhre mangels eines Kondensationsgefäßes nicht lange mit Strom belastet werden durfte. Der Sondenabstand betrug 1,7 mm.

Tabelle IX.

Stromstärke Amp.	Anodenfall Volt
3	6,07
5	6,18
7	6,30

Wie aus der vorstehenden Tabelle und aus anderen Messungen hervorgeht, *nimmt der Anodenfall an einer niedrig temperierten Eisenanode in Quecksilberdampf mit der Stromstärke ebenfalls ein wenig zu. Er ist nahezu gleich dem Anodenfall an einer Quecksilberanode, aber immerhin deutlich kleiner.* Es ist zu erwarten, daß auch der Anodenfall des Lichtbogens in der

Anodenschicht ebenso vom Material der Anode abhängt, wie derjenige des Glimmstromes.[1])

§ 8. *Der Anodenfall in der Anodenschicht an heißer Anode.* — Zur Untersuchung des Anodenfalles in Quecksilberdampf an einer heißen Anode verwendeten wir Kohle als Anode. Als solche diente, wie Fig. 14 zeigt, ein vertikal gestellter 5 mm dicker, 8 cm langer Kohlenstift, er war umgeben von einem Glasrohr; der Abstand zwischen seiner Oberfläche und dessen innerer Wand betrug 1,5 mm; der Kohlenstift ragte 6 mm aus dem Glasrohr hervor; seinem Ende gegenüber befand sich in 1,5 mm Abstand die Platinsonde *S*. Die Lampe besaß kein Kondensationsgefäß; infolgedessen stieg in ihr der Dampfdruck ziemlich rasch mit der Zeit nach dem Zünden. In den Tabellen X und XI sind zwei unserer Messungsreihen wiedergegeben.

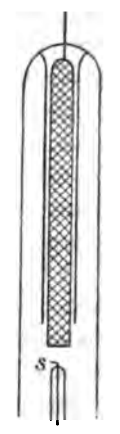


Fig. 14.

Tabelle X.

Stromstärke 3 Amp.

Zeit nach d. Zünden Sek.	Anodenfall Volt	Glühzustand der Anode
10	12,4	hellrot
20	11,1	
30	10,1	
40	9,8	
50	9,6	
60	11,1	
70	5,3	dunkel
80	5,0	
90	4,8	
100	4,7	

Tabelle XI.

Stromstärke 10 Amp.

Zeit nach d. Zünden Sek.	Anodenfall Volt	Glühzustand der Anode
5	13,6	gelb
10	13,3	
15	11,1	
20	7,0	dunkelrot
25	6,6	
30	6.6	
35	6,6	
40	6,6	

Die vorstehenden Tabellen lehren folgendes. *An einer glühenden Anode ist der Anodenfall des Lichtbogens größer als an einer niedrig temperierten. Die Erhöhung des Anodenfalles durch Temperatursteigerung der anodischen Strombasis hängt auch*

1) Cl. Skinner, Wied. Ann. 68. p. 752. 1899.

ab von der Dichte des Dampfes vor der Anode, sie ist um so kleiner, je größer die Dampfdichte ist. Da die Erhöhung der Dampfdichte demnach mit einer Erniedrigung der Anodentemperatur verbunden ist und da mit dieser sehr schnell der Anodenfall sinkt, so muß der Übergang des Anodenfalles von dem Werte an „heißer" zu dem Werte an „kalter" Anode ebenfalls sehr schnell erfolgen. Ferner sei noch darauf hingewiesen, daß auch hier der „kalte" Anodenfall von dem Material der Anode als abhängig sich erweist; während er an Hg 6,4, an Fe 6,07 beträgt, ist er an C 4,7 Volt bei 3 Amp. Stromstärke.

§ 9. *Der Anodenfall im kathodischen Lichtbüschel an kalter Anode.* — Um einen Lichtbogen zu gewinnen, der keine Anodenschicht und keine positive Lichtsäule besitzt, sondern nur aus dem kathodischen Lichtbüschel besteht, muß man die Anode der Kathode so nahe bringen, daß sie von dem kathodischen Lichtbüschel berührt wird. Wir konstruierten zu diesem Zwecke die in Fig. 15 dargestellte Lampe ($^1/_4$ nat. Größe). Als Anode diente wieder der bereits oben beschriebene zylindrische, mit Hg gefüllte Behälter aus Eisen, als Kathode flüssiges Quecksilber. Die Lichtbogenröhre setzte sich unten in einer engeren Röhre fort; über diese war ein dickwandiger Gummischlauch geschoben; in dessen anderes Ende war ein weites zylindrisches Glasgefäß (G) geschoben. Dieses war mit Quecksilber gefüllt. Durch Heben und Senken des Gefäßes G konnte in der Lichtbogenröhre das Niveau des Quecksilbers zum Steigen und Sinken gebracht werden. Die Platinsonde S diente dazu, den Anoden- oder Kathodenfall zu messen; sie war von der Anode 5 mm entfernt.

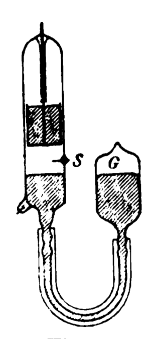


Fig. 15.

Wir operierten in folgender Weise mit der Lampe. Erst wurde G so weit gehoben, bis das kathodische Quecksilber die Eisenanode berührte; dann wurde G wieder gesenkt, so daß der Lichtbogen sich zündete. Indem G verschieden tief gesenkt wurde, wurde der Abstand zwischen Anode und Kathode variiert. Dieser Abstand konnte im allgemeinen nicht kleiner als 5 mm gewählt werden, weil sonst infolge der turbulenten Bewegung der Kathodenoberfläche vorübergehende Berührung

zwischen Kathode und Anode erfolgte. Nachdem schnell ein bestimmter Abstand zwischen Anode und Kathode hergestellt war, wurde rasch hintereinander Stromstärke, Elektrodenspannung oder Anoden- bez. Kathodenfall abgelesen, bis infolge zu großer Erhitzung der Strom unterbrochen werden mußte.

Da der Kathodenfall unabhängig von der Stromstärke ist und an einer Hg-Kathode in Hg-Dampf 5,27 $\pm$ 0,09 Volt beträgt, so kann man bei Abwesenheit der positiven Lichtsäule, also bei kleinem Elektrodenabstand, den Anodenfall aus der Elektrodenspannung E und dem bekannten Kathodenfall K berechnen gemäß der Gleichung $E = A + K$. Unter der Annahme, daß $K = 5{,}36$ Volt sei, ist in dieser Weise A in der nachstehenden Tabelle gemäß der Gleichung $A = (E - 5{,}36)$ Volt berechnet. E wurde mit einem aperiodischen Deprez-Zeiger-Voltmeter gemessen. Der Elektrodenabstand variierte zwischen 5 und 10 mm.

Tabelle XII.

Stromstärke Amp.	Elektrodenspannung Volt	Anodenfall Volt
3,6	8,5	3,14
4,4	8,6	3,24
5,7	8,7	3,34
6,4	8,8	3,44
9,3	9,0	3,64

Ein Vergleich der vorstehenden Tabelle mit der Tab. IX lehrt, daß *der Anodenfall an kaltem Eisen im kathodischen Lichtbüschel kleiner ist als in der Anodenschicht.* Daß auch in diesem Falle der Kathodenfall den Wert (5,27 $\pm$ 0,09) Volt besitzt, stellten wir noch sicher durch direkte Messungen von K mit Hilfe der Sonde. Es ergab sich K im Minimum zu 5,3 Volt. Indes waren die Elektrometerausschläge größeren Schwankungen unterworfen, als in den oben mitgeteilten Beobachtungen; dies rührte offenbar von den beträchtlichen Schwankungen der Niveauflächen und der Nähe des Anodenfalles her.

Weiter beobachteten wir die Elektrodenspannung für sehr kleinen Elektrodenabstand an einer Lampe, wie sie in Fig. 16

($^1/_3$ nat. Größe) dargestellt ist. Als Anode diente ähnlich der Eisenanode ein Aluminiumbehälter, der mit Quecksilber zur Kühlung gefüllt war. Er saß unmittelbar über der Öffnung des 5 mm weiten Ansatzrohres R, dieses war vor Beginn der Beobachtung nahezu bis oben mit Quecksilber gefüllt. Durch Neigen der Lampe wurde der Lichtbogen gezündet und unmittelbar darauf wurde seine Stromstärke und Elektrodenspannung abgelesen. Als kleinster Wert der letzteren wurde für 3 Amp. 8,2 Volt gefunden, woraus als Anodenfall im kathodischen Lichtbüschel an Al der Wert 2,84 Volt sich berechnet. Für 3,8 Amp. war A = 3,64 Volt.

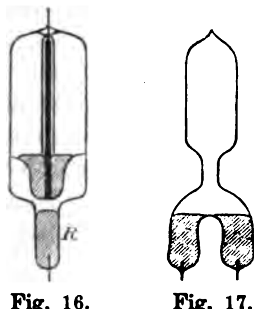


Fig. 16. Fig. 17.

Der Anodenfall A im kathodischen Lichtbüschel läßt sich nicht an einer Hg-Anode bestimmen. Denn die Anode läßt sich in diesem Falle nicht unmittelbar über der Kathode anordnen, sondern nur unmittelbar neben ihr, wie es Fig. 17 ($^1/_3$ nat. Größe) zeigt. In diesem Falle berührt darum das kathodische Lichtbüschel die Anode nicht; kommt es dieser einmal zufällig nahe, so wird es durch den von der Anode ausgehenden Dampfstrom sofort wieder zur Seite geblasen. Als kleinste Elektrodenspannung fanden wir für diese Lampe 12,5 Volt. Die Summe aus Kathodenfall (5,27 $\pm$ 0,09) und dem Anodenfall in der Anodenschicht an einer Hg-Anode (A = 7,0 nach Tab. VII) beträgt (12,27 $\pm$ 0,09) Volt.

§ 10. *Resultate.* — Im folgenden seien kurz die experimentellen Resultate der vorliegenden Untersuchung zusammengestellt.

Das Spannungsgefälle in der Lichtbogensäule ist für eine Gasatmosphäre aus Wasserstoff größer als für eine Atmosphäre aus Kohlensäure; für Kupferpole ist der Unterschied größer als für Kohlepole. Die Erscheinung erklärt sich aus der Abkühlung der Elektroden und der Lichtbogensäule durch die umgebende Gasatmosphäre.

Der Kathodenfall der unselbständigen Strömung in verdünntem Hg-Dampf, der aus dem Lichtbogen kommt, ist ungefähr 10 mal größer als der Anodenfall. Das gleiche gilt

für den unselbständigen Querstrom im Lichtbogen in verdünntem Hg-Dampf und im Lichtbogen zwischen Kohlepolen in freier Luft. Aus diesem großen Unterschied zwischen dem Anoden- und Kathodenfall der unselbständigen Strömung ist auf einen großen Unterschied der Geschwindigkeiten und der Massen der positiven und negativen Ionen im Innern des Lichtbogens zu schließen.

Der Kathodenfall des Lichtbogens in Hg-Dampf an einer Hg-Kathode ist unabhängig von der Stromstärke.

Der Anodenfall des Lichtbogens ist abhängig von einer Reihe Faktoren. Er wächst im allgemeinen etwas mit der Stromstärke, wenn die Anode ganz von der Strömung bedeckt ist.

In der Anodenschicht an kalter Anode ist der Anodenfall größer als in dem kathodischen Lichtbüschel an kalter Anode, kleiner als in der Anodenschicht an heißer Anode. Im letzten Falle steigt er mit der Temperatur der Anode und sinkt mit steigernder Dichte des Dampfes vor der Anode. Der Anodenfall in der Anodenschicht ist abhängig von dem Material der Anode.

Die vorstehenden Resultate befinden sich alle in Übereinstimmung mit den Folgerungen der Ionentheorie des Lichtbogens.

Zum Schlusse sei Hrn. Prof. Dr. E. Riecke auch an dieser Stelle Dank gesagt für die Unterstützung, welche er der vorstehenden Untersuchung gewährte.

Göttingen, Juli 1905.

(Eingegangen 22. Juli 1905.)

2. *Untersuchung über die Leistungsfähigkeit der Assmannschen Methode zur experimentellen Bestimmung des Verhältnisses $c_p/c_v = \varkappa$ der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen von Gasen;*

von Balthasar Hartmann.

(Auszug aus der Göttinger Dissertation.)

Einleitung.

Das Assmannsche[1]) Verfahren benutzt ein U-förmig gebogenes Glasrohr, gefüllt mit Quecksilber, über dessen beiden Spiegeln Gasmassen abgesperrt sind. Wenn man das Rohr einen Augenblick aus seiner Ruhelage bringt, gerät die Flüssigkeit unter dem Einflusse der Schwerkraft und der Gasdrucke in Schwingungen, die durch die Störung der inneren und äußeren Reibung gedämpft werden. Der Erfinder der Methode legt seinen Überlegungen die Annahme zugrunde, daß die Reibung unberücksichtigt bleiben darf, und setzt außerdem stillschweigend voraus, daß die Deformationen des Gases adiabatisch verlaufen. So findet er eine Relation, in der $\varkappa$ als eine Funktion nur der Schwingungsdauern der Quecksilbersäule bei geschlossener und offener Röhre und des Gasdruckes erscheint.

Von Assmann selbst liegen wirkliche Bestimmungen der Größe $\varkappa$ nicht vor; seine wenigen Beobachtungen sollten nur zur Orientierung dienen. Er beschränkt sich darauf, einige Winke zu geben für den Fall, daß später jemand seine Untersuchungen aufnehmen sollte, z. B. weist er auf die Notwendigkeit hin, behufs Verminderung des Reibungseinflusses eine möglichst weite Röhre anzuwenden.

Erst Müller[2]) hat nach der Methode gearbeitet. Er versucht zwar eine Reibungskorrektion anzubringen; weil er jedoch von der von Stefan[3]) ausgesprochenen unzutreffenden

1) C. Assmann, Pogg. Ann. 85. p. 1. 1852.
2) P. A. Müller, Wied. Ann. 18. p. 94. 1883.
3) J. Stefan, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. 46. II. p. 510. 1862.

Vorstellung ausgeht, als fände eine Verschiebung der einzelnen Quecksilberfäden gegeneinander dank der Kohäsion nicht statt, sondern allein eine Reibung der starr gedachten Flüssigkeitssäule an der Rohrwand, kommt er zu einer illusorischen Korrektion, die innerhalb seiner Fehlergrenzen liegt.

Die Frage, ob die Gaszustandsänderungen hinreichend adiabatisch sind, legt Müller sich nicht vor. Wasserstoff, dessen Untersuchung wegen seiner großen Wärmeleitfähigkeit und großen Beweglichkeit seiner Teilchen einen gewissen Aufschluß darüber gegeben hätte, befindet sich nicht unter den 21 von ihm untersuchten Gasen.

Berücksichtigt man noch, daß Müller eine in seiner Formel für $\varkappa$ auftretende Konstante des Apparates, den mittleren Querschnitt der von den Quecksilberspiegeln bei den Oszillationen passierten Rohrstücke, gleich dem Mittel der Rohr*end*querschnitte setzt, so werden seine Resultate nicht völlig einwandfrei erscheinen.

Etwa gleichzeitig mit Müller hat sich Hr. Geh. Regierungsrat W. Voigt mit der Ausarbeitung der Methode beschäftigt, beim Erscheinen von Müllers Arbeit (das mit seiner Übersiedelung nach Göttingen nahe zusammenfiel) jedoch seine Untersuchungen abgebrochen. Er fand im Gegensatz zu Müller immer viel zu kleine Zahlen für $\varkappa$ und wurde dadurch in dem Eindruck bestärkt, daß die Assmannsche Methode einer besonderen theoretischen Durcharbeitung bedürfte. Auf seine Veranlassung hin habe ich die Untersuchungen wieder aufgenommen. Die vorliegende Arbeit macht sich zur Aufgabe, Assmanns Methode auf ihre Leistungsfähigkeit hin zu prüfen. Zu dem Zwecke wird der Einfluß der vorhandenen Fehlerquellen teils auf experimentellem Wege beseitigt, teils durch theoretische Überlegungen soweit wie möglich berücksichtigt. Nebenbei wird sich ergeben, daß Müller mit nicht genau definierten Verhältnissen gearbeitet hat, insofern als bei seiner Experimentsanordnung die Dämpfung der Flüssigkeitsschwingungen nicht logarithmisch und die Schwingungsdauer nicht konstant ist, und daß er seine verhältnismäßig großen Zahlen für $\varkappa$ wahrscheinlich einer teilweisen Kompensation der Fehler verdankt, die infolge Vernachlässigung der Reibung und des Wärmeaustausches zwischen Gas und Umgebung entstehen.

I. Theoretischer Teil.

Statt eines U-förmigen ist der Theorie und Beobachtung ein kreisringförmiges Rohr zugrunde gelegt worden, wie es durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende, die Peripherie nicht schneidende Achse erzeugt wird. Das zu behandelnde Problem ist dann folgendes.

Eine in einem kreisringförmigen Rohr mit horizontaler Rotationsachse befindliche Quecksilbermasse, über deren Oberflächen zwei Gasmassen abgeschlossen sind, führt, durch einen äußeren Impuls aus ihrer Ruhelage gebracht, unter der Wirkung der Schwerkraft, der Gasdrucke und der auftretenden Reibungskräfte Schwingungen aus. Die Gasdrucke hängen ab von den durch die Oszillationen hervorgerufenen Verdichtungen und Verdünnungen, sowie von ihren Begleiterscheinungen, den Erwärmungen und Erkaltungen des Gases, deren Stärke mit dem Verhältnis $\varkappa = c_p/c_v$ der spezifischen Wärmen im Zusammenhang steht, und von dem unvermeidlichen Wärmeaustausch zwischen Gas und Gefäßwand. Gesucht wird die Beziehung zwischen den die Flüssigkeitsbewegung charakterisierenden Größen, eventuell Schwingungsdauer und logarithmisches Dekrement, und den wirkenden Kräften, um mittels dieser Beziehung $\varkappa$ durch Beobachtungsgrößen auszudrücken.

Behufs Erreichung des Zieles soll schrittweise vorgegangen werden.

1. Ableitung der dem Problem angepaßten Gleichungen.

Die hydrodynamischen Gleichungen.

Den Ausgangspunkt bilden die hydrodynamischen Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial x} + \dfrac{a}{s}\Delta u, \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial y} + \dfrac{a}{s}\Delta v, \\[2ex] \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial z} + \dfrac{a}{s}\Delta w. \end{cases}$$

Die darin vorkommenden Größen beziehen sich auf die Stelle x, y, z irgendeines rechtwinkligen Koordinatensystems X, Y, Z, und zwar bezeichnen u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten

parallel den Koordinatenachsen, t die Zeit, also du/dt, dv/dt, dw/dt die Komponenten der Beschleunigung, Φ das Potential der äußeren Kraft, Π eine Funktion des Druckes p, und zwar

$$(1') \qquad \Pi = \frac{p}{s},$$

s die Dichte, a den Koeffizienten der inneren Reibung.

Außer der Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten

$$(1'') \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

kommen noch die Grenz- und Oberflächenbedingungen hinzu. Gestützt auf unten (p. 281—283) erörterte Wahrnehmungen soll der Koeffizient der äußeren Reibung gleich unendlich gesetzt werden. Dann heißen die Bedingungen für die Rohrwand, wenn die darauf bezüglichen Größen durch einen darüber gesetzten Strich gekennzeichnet werden,

$$(1''') \qquad \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0.$$

Die Oberflächenbedingungen, d. h. die Gleichungen für die Gasdrucke, müssen aus dem Problem selbst mit berechnet werden.

Die Transformationsformeln zu Riemannschen Ringkoordinaten.

Der Ring und das Koordinatensystem X, Y, Z sollen so zueinander orientiert werden, daß die horizontal liegende Rotationsachse des Körpers (Fig. 1) in die Z-Achse fällt, die Mittelpunkte des erzeugenden Kreises in seinen beiden horizontalen Lagen auf die X-Achse zu liegen kommen und demgemäß die Y-Achse Durchmesser des Kreises in seinen vertikalen Lagen ausschneidet. Dann gelten für die Transformation der Koordinaten x, y, z zu Riemannschen Ringkoordi-

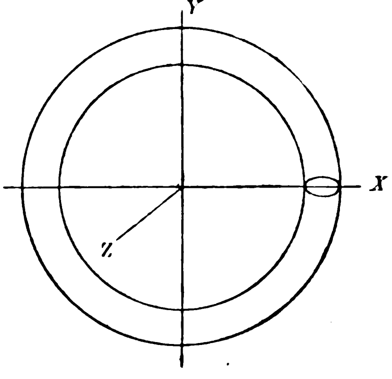


Fig. 1.

naten ε, λ, ϑ unter Vermittelung einer Variabeln ϱ und Benutzung einer Konstanten b folgende Formeln[1]):

(2) $$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta,$$

(2') $$\varrho + iz = b \frac{1 - \varepsilon e^{i\lambda}}{1 + \varepsilon e^{i\lambda}}.$$

Während ϱ den Radiusvektor vom Nullpunkte zu einem Punkt der Ebene XY und ϑ den Winkel zwischen ϱ und der X-Achse darstellt, sind *bei konstantem* ϑ die Variabeln ε und λ Parameter der Hälften zweier konjugierten Kreisbüschel in der Halbebene mit dem Neigungswinkel ϑ. ε liefert das Büschel mit imaginären, λ das mit reellen Schnittpunkten. Dem ersteren Büschel gehört auch der den Kreisring durch Rotation um die Z-Achse erzeugende Kreis an. Bezeichnet man die ϱ-Koordinate seines Mittelpunktes mit c, seinen Radius mit R und den ihm entsprechenden Parameter mit $\bar{\varepsilon}$, so gilt

(3) $$\bar{\varepsilon} = \frac{R}{c + b}, \qquad b^2 = c^2 - R^2.$$

Die zweite Gleichung (3) stellt die Bedeutung der Konstanten b fest als Tangentenabschnitt vom Nullpunkt zum Kreis.

Zur eindeutigen Bestimmung der Punkte ϱ, z genügt bei vorgeschriebenem ε das Intervall

(3') $$0 \leqq \lambda \leqq 2\pi.$$

Variables ϑ läßt sich durch die Rotation der beiden Kreisbüschel um die z-Achse zum Ausdruck bringen. Man erkennt, daß dadurch an Stelle jedes Kreises ein Kreisring oder eine Kugel tritt, je nachdem er dem Büschel mit imaginären oder mit reellen Schnittpunkten angehört.

Die Schnittkurven des Ring- mit dem Kugelflächensystem werden durch Wertepaare ε, λ dargestellt. Sie bestehen in einer Schar von Kreislinien, die man sich durch Rotation der den Kreisbüscheln ε, ϑ und λ, ϑ gemeinsamen Schnittpunkten ε, λ, ϑ erzeugt denken kann.

---

1) Vgl. B. Riemann, Math. Werke. 2. Aufl. Nr. XXIV; oder H. Weber, Part. Differentialgl. der math. Phys. 1. § 44.

Transformation der Grundgleichungen zu Polarkoordinaten. Integration über ϑ.

Bei Einführung der beiden Geschwindigkeitskomponenten

$$\varphi = \varrho \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \mathfrak{r} = \frac{d\varrho}{dt}, \tag{4}$$

in der Kreislinie ϱ, z und längs des Vektors ϱ bekommt man aus (1) durch Transformation mittels (2) und geeignetes Zusammenfassen der Gleichungen

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathfrak{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \frac{\varphi}{\varrho}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + w\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\mathfrak{r}\varphi}{\varrho} \\ &- \frac{a}{s}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\varphi}{\varrho^2}\right) = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\Phi + \Pi), \\ &\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} + \mathfrak{r}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \varrho} + \frac{\varphi}{\varrho}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \vartheta} + w\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial z} - \frac{\varphi^2}{\varrho} \\ &- \frac{a}{s}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial z^2} - \frac{\mathfrak{r}}{\varrho^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial \varrho}(\Phi + \Pi), \\ &\frac{\partial w}{\partial t} + \mathfrak{r}\frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{\varphi}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \vartheta} + w\frac{\partial w}{\partial z} \\ &- \frac{a}{s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}(\Phi + \Pi). \end{aligned} \right.$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (1'') entsteht

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \varrho} + \frac{\mathfrak{r}}{\varrho} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{5'}$$

Die quadratischen Glieder bis auf dasjenige mit dem Faktor φ^2 fielen fort, wenn die beiden Geschwindigkeiten $\mathfrak{r}$ und w, die nach (5') $\partial\varphi/\partial\vartheta$ bestimmen, gleich Null gesetzt werden dürften, also wenn sich die Teilchen auf den Kreislinien ϱ, z bewegten. Das ist jedoch keineswegs der Fall. Im Gegenteil erkennt man beim Beobachten der Oberfläche der schwingenden Flüssigkeit ausgeprägte Bewegungen der Teilchen vom Rohrinnern her gegen die Wand hin bei Aufwärts- und umgekehrt gerichtete bei Abwärtsbewegungen. Die Art und Stärke der Querströmung ist in jedem Augenblick durch die Gestalt der Oberfläche bedingt, die dadurch Veränderungen unterworfen ist, daß infolge der Reibung ein Teilchen sich um so weniger weit von der Ruhelage entfernt, je näher es der Rohrwand liegt. Der Neigungswinkel der Tangentialebene in einem Punkte ϱ, ϑ, z an die Oberfläche ist mit ϑ veränderlich, und sobald er eine gewisse Größe erreicht hat, wird das an der Stelle liegende Teilchen, analog den Reibungs-

erscheinungen bei Bewegung eines Massenpunktes auf einer Fläche, den Kreis ϱ, z in der Richtung der in der Tangentialebene liegenden Geraden größter Neigung verlassen. Dank der inneren Reibung des Quecksilbers werden die Querströmungen nicht auf die Oberfläche beschränkt bleiben. Indessen werden sie schon in geringer Entfernung von der Oberfläche unmerklich sein, so daß bei einem genügend langen Flüssigkeitsfaden $\varrho =$ konst., $z =$ konst. der Einfluß der Teilchen mit nicht verschwindenden Geschwindigkeiten $\mathfrak{r}$ und w auf die Gesamtzahl der Teilchen vernachlässigt werden darf. Auf einem solchen Ring werden also $\mathfrak{r}$ und w im Mittel unmerklich sein und ebenso alle anderen Größen, die sich analog verhalten, insbesondere die folgenden Glieder der ersten Gleichung (5)

$$\mathfrak{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}, \quad w\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\mathfrak{r}\varphi}{\varrho}$$

und außerdem noch mit Rücksicht auf die Kontinuitätsgleichung (5'), von deren drei letzten Gliedern dasselbe gilt,

$$\frac{\varphi}{\varrho}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}, \quad \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}.$$

Es sollen die beiden Flüssigkeitsoberflächen durch die Zeichen a und b unterschieden, z. B. mit ϑ_a und ϑ_b die ϑ-Koordinaten der zwei dem beliebigen Kreise ϱ, z angehörenden Punkte der Oberflächen bezeichnet werden. Multipliziert man die erste Gleichung (5) mit $d\vartheta/(\vartheta_b - \vartheta_a)$ und integriert partiell von ϑ_a bis ϑ_b, so ergibt sich bei Einführung des Mittelwertes

$$(6) \qquad \frac{1}{\vartheta_b - \vartheta_a}\int\limits_{\vartheta_a}^{\vartheta_b} \varphi \, d\vartheta = \varphi_0$$

das Resultat

$$(6') \qquad \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \frac{\mu}{s}\left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \varrho} - \frac{\varphi_0}{\varrho^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2}\right) = \Theta,$$

wobei Θ die auf die Masseneinheit bezogene, in bezug auf ϑ mittlere Kraft in der Richtung ϑ bezeichnet,

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Theta &= -\frac{1}{\varrho(\vartheta_b - \vartheta_a)}\int\limits_{\vartheta_a}^{\vartheta_b} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\Phi + \Pi)\, d\vartheta \\ &= -\frac{1}{\varrho(\vartheta_b - \vartheta_a)}(\Phi_b - \Phi_a + \Pi_b - \Pi_a). \end{aligned} \right.$$

Durch diese Operation ist die Abhängige φ_0, die praktisch allein von Interesse ist, separiert worden. Gelingt es nun noch, den Ausdruck für die Kraft Θ so zu gestalten, daß auch er $\mathfrak{r}$ und w nicht enthält, so kann man φ_0 ganz für sich behandeln.

Bestimmung des Ausdruckes für die Kraft Θ. Transformation zu Riemannschen Ringkoordinaten.

Rechnet man die Y-Achse nach oben positiv, so daß gilt

$$\Phi = + g y,$$

und benutzt für Π die Definition (1'), so erhält man für Θ zunächst

$$\Theta = - \frac{1}{\varrho(\vartheta_b - \vartheta_a)} \left[g(y_b - y_a) + \frac{1}{s}(p_b - p_a) \right]. \tag{7}$$

$y_b - y_a$ ist die doppelte vertikale Elongation des Flüssigkeitsfadens $\varrho =$ konst., $z =$ konst., die eine Funktion von ϱ, z oder auch bei anderer Auffassung von ϱ, z und $\mathfrak{r}, w$ ist. Nimmt man an, daß bei geeigneter Wahl der Länge des Flüssigkeitsringes, so daß die Bedingung

$$\vartheta_b - \vartheta_a = \pi \tag{8}$$

nahezu befriedigt wird, und bei Beschränkung auf hinreichend kleine Amplituden die Flüssigkeitsoberflächen durch die in ihrer Nähe stattfindenden Querströmungen trotz der mit der Entfernung von der Rohrachse variierenden Geschwindigkeit φ_0 in jedem Augenblick sehr nahezu in die Gleichgewichtsform gebracht wird, so ist $y_b - y_a$ für alle Ringe ϱ, z gleich und

$$y_b - y_a = 2\eta, \tag{9}$$

unter η die Elongation der Flüssigkeit verstanden. Ohne weiteres ist die Annahme zwar nicht gerechtfertigt, denn da das Quecksilber an der Rohrwand haftet, nehmen die Oberflächen unter der Wirkung der Kapillarität mannigfaltige Formen während der Oszillationen an. Wenn man aber an den von den Menisken passierten Rohrteilen das Anhaften des Quecksilbers verhindert, indem man (vgl. Orientierende Beobachtungen p. 281) etwas konzentrierte Schwefelsäure auf die Oberflächen gießt, so ist Gleichung (9) merklich gültig, auch bei Berücksichtigung der Krümmung der Oberflächen infolge von Kapillarität.

Zwischen η und φ_0 besteht eine Relation, der Ausdruck für die Gleichheit des Volumens der in der Zeiteinheit irgend einen Rohrquerschnitt passierenden Masse und des durch die Verschiebung der Oberflächen neu erfüllten Raumes. Bezeichnet man mit Q den Rohrquerschnitt und mit dQ sein Element, worin φ_0 als konstant anzusehen ist, so bekommt man mit Rücksicht auf (8) bei kleinen Amplituden

$$\int \varphi_0 \, dQ = Q \frac{d\eta}{dt}, \tag{9'}$$

integriert über Q. Durch diese Gleichung, verbunden mit der Anfangsbedingung

$$\eta = 0 \text{ für } t = 0, \tag{10}$$

den Zeitpunkt einer Gleichgewichtslage, ist die Größe η vollständig definiert. Sie soll daher jetzt mittels (9) in (7') eingeführt werden. Man findet

$$\Theta = -\frac{2g}{\varrho(\vartheta_b - \vartheta_a)}\left(\eta + \frac{p_b - p_a}{2gs}\right). \tag{11}$$

In der Wirklichkeit müssen jedoch auch noch infolge des praktisch nicht genau konstanten Rohrquerschnittes Querströmungen auftreten. Mit der Einführung des Mittelwertes φ_0 von φ wird vorausgesetzt, daß auch sie im Mittel nicht in Betracht kommen. Damit auch die Gleichung (9') für ein nicht überall gleichweites Rohr bestehen bleibt, hat man die Konstante Q der rechten Seite als den mittleren Querschnitt $\bar{Q}$ der bei den Oszillationen von den Flüssigkeitsoberflächen passierten Rohrstücke aufzufassen und unter dQ den mittleren Querschnitt eines Strom*fadens*, d. h. das Element *eines mittleren Querschnittes Q des ganzen Rohres* zu verstehen. Die Gleichung lautet dann

$$\bar{Q} \frac{d\eta}{dt} = \int \varphi_0 \, dQ, \tag{12}$$

integriert über Q.

Durch Einführung der Funktion

$$\psi = \sqrt{\varrho}\, \varphi_0 \tag{12'}$$

und Transformation auf die Koordinaten ε, λ mittels (2') gehen die Gleichungen (12) und (6') über in

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\bar{Q}} \int \frac{\psi}{\sqrt{\varrho}} \, dQ, \tag{13}$$

(14) $$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{\varrho^2}\frac{a}{s}\left[\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{4}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2}\right) - \frac{3}{4}\psi\right] = \sqrt{\varrho}\,\Theta.$$

ϱ hat man jetzt überall als Funktion von ε, λ zu deuten. (14), (11), (13), (10) sind die bei der Lösung des Problemes in Betracht kommenden Gleichungen.

In der Bestimmung der im Ausdruck für die Kraft Θ stehenden Gasdruckdifferenz $p_b - p_a$ besteht der thermodynamische Teil der theoretischen Betrachtungen. Um Komplizierungen zu vermeiden, sollen zunächst *adiabatische* Zustandsänderungen vorausgesetzt werden.

2. Lösung des Problemes im Falle adiabatischer Zustandsänderungen.

Berechnung der Kraft Θ.

Die Gase sollen zur Zeit des Flüssigkeitsgleichgewichtes die Räume V_a^0 und V_b^0 einnehmen. Dann sind ihre zu den Drucken p_a und p_b gehörenden Volumina V_a und V_b durch die Gleichungen gegeben

(15) $$V_a = V_a^0 + \bar{Q}\,\eta, \quad V_b = V_b^0 - \bar{Q}\,\eta,$$

wobei η die durch (13) und (10) definierte vertikale Verschiebung einer Flüssigkeitsoberfläche aus der Ruhelage ist und $\bar{Q}$ den Querschnitt der von den Flüssigkeitsspiegeln passierten Rohrstellen bezeichnet.

Bei Beschränkung auf genügend kleine Amplituden, um $(\bar{Q}/V^0\,\eta)^2$ neben 1 vernachlässigen zu dürfen, und bei Benutzung der Abkürzung

(15') $$\mathfrak{B} = \frac{2\,V_a{}^0\,V_b{}^0}{V_a{}^0 + V_b{}^0},$$

so daß also $\mathfrak{B}$ ein mittleres Gasvolumen bedeutet, liefert die Adiabatengleichung

(15'') $$p_b - p_a = 2\,\varkappa\,p^0\,\frac{\bar{Q}}{\mathfrak{B}}\,\eta,$$

unter p_0 den Anfangsdruck des Gases verstanden.

Wenn man p^0 durch die Höhe H einer Quecksilbersäule mit der Temperatur des oszillierenden Quecksilbers mißt und die Abkürzung

(16) $$2\,L^{(a)} = \frac{2\,g}{b\,(\vartheta_b - \vartheta_a)}\left(1 + \varkappa\,H\,\frac{\bar{Q}}{\mathfrak{B}}\right)$$

benutzt, so findet man aus (11) und (15″) für die Kraft Θ den Ausdruck

$$(16') \qquad \Theta = -\,2\frac{b}{\varrho}\,L^{(a)}\,\eta\,.$$

Auflösung der Differentialgleichungen. Integration über λ.

Wegen (16′) kann die Bewegungsgleichung (14) in der Form geschrieben werden·

$$(17) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} - \dfrac{1}{\varrho^2}\,\dfrac{a}{s}\left[\dfrac{(1-\varepsilon^2)^2}{4}\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon^2} + \dfrac{1}{s}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\,\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\right) - \dfrac{3}{4}\,\psi\right] \\ \qquad\qquad + \dfrac{b}{\sqrt{\varrho}}\,.\,2\,L^{(a)}\,\eta = 0\,. \end{cases}$$

Um die Integrale ψ und η der Gleichungen (17) und (13) zu suchen, soll von den Ansätzen ausgegangen werden

$$(18) \qquad \psi = \chi\,e^{q\,t}, \qquad \eta = P\,e^{q\,t},$$

worin P und q Konstante sind und χ eine Funktion von ε, λ bezeichnet.

χ ist in seiner Abhängigkeit von λ für das Problem ohne Interesse. Daher soll die durch Einsetzen von (18) in (17) nach Division durch e^{qt} entstehende Gleichung mit Beziehung auf (3′) mit $d\lambda/2\pi$ multipliziert und über λ von 0 bis 2π integriert werden.

Weil nach (2′) für den speziellen Fall, daß b und c unendlich werden, also das Ringsystem in ein konzentrisches Zylindersystem ausartet, jedes ε verschwindet, ist es für die weitere Behandlung der Gleichungen nützlich, statt ε eine andere Variable

$$(18') \qquad \sigma = \frac{\varepsilon}{f}$$

einzuführen und die Konstante f so zu wählen, daß auch im Falle verschwindender Rohrkrümmung σ endlich bleibt. Schreibt man für die Innenwand des Rohres als Parameter den Radius R des mittleren Rohrquerschnittes Q vor, also

$$(18'') \qquad \bar{\sigma} = R\,,$$

so hat nach (3) f den Wert

$$(18''') \qquad f = \frac{1}{c+b}\,.$$

Setzt man nun ein hinreichend schwach gekrümmtes Rohr voraus, also nach der zweiten Gleichung (3) neben R genügend

große Werte c und b — eine Voraussetzung, die praktisch auf dasselbe hinauskommt wie die oben geforderte Beschränkung auf kleine Amplituden —, so darf man nach (18‴) f^2 neben 1 vernachlässigen. Dann erhält man schließlich als Resultat der Integration über λ, weil man innerhalb der eingeführten Annäherung

(19) $$\sigma = r,$$

gleich dem Radius der Kreise des Büschels mit imaginären Schnittpunkten, die konzentrisch gedacht werden dürfen, setzen darf,

(20) $$\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr} + m^2\left(\omega + \frac{2L^{(a)}}{q}P\right) = 0.$$

Dabei ist m^2 die Abkürzung

(20′) $$m^2 = -q\,\frac{s}{a}$$

und ω bezeichnet die Funktion

(20″) $$\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\chi}{\sqrt{\varrho}}\,d\lambda,$$

die mit der Geschwindigkeit φ durch die Beziehung verknüpft ist

(20‴) $$\omega e^{qt} = \frac{1}{2\pi(\vartheta_b - \vartheta_a)}\int_0^{2\pi}\int_{\vartheta_a}^{\vartheta_b}\varphi\,d\vartheta\,d\lambda = \varphi_{00},$$

so daß φ_{00} eine Abkürzung für den Mittelwert von φ in bezug auf ϑ und λ ist.

Um nun auch noch die mit Hilfe der Ansätze (18) aus (13) entstehende Gleichung passend umzugestalten, hat man das Flächendifferential dQ in σ und λ auszudrücken und die Integration über λ auszuführen. Bei Beschränkung auf in f lineare Glieder und Berücksichtigung von (20″), (19) erhält man

(21) $$qP = \frac{2\pi}{Q}\int_0^R \omega\,r\,dr.$$

R bezeichnet den Radius des Querschnittes Q.

Bei der Ableitung der Gleichungen (20) und (21) erkennt man, daß die Flüssigkeitsbewegung durch die Rohrkrümmung innerhalb der durch die Vernachlässigung von f^2

neben 1 gegebenen Annäherung nur insofern beeinflußt wird, als Glieder mit λ auftreten, deren Mittelwert in bezug auf λ indessen verschwindet. In der Tat kommt man auf dieselben Gleichungen durch Anwendung der Grundgleichungen (1) und (1″) auf ein *zylindrisches Rohr.*

Um schließlich die Gleichungen (20) und (21) nach ω und P aufzulösen, braucht man nur zu setzen

$$\omega + 2\frac{L^{(a)}}{q} P = \Omega . \tag{22}$$

Dann erhält man aus (20) für Ω die Besselsche Funktion 0ter Ordnung mit dem Argument $m r$

$$\Omega = J_0(m r) . \tag{22'}$$

Für P bekommt man aus (21), wenn man (22) und (22′) benutzt und unter J_1 die Besselsche Funktion erster Ordnung versteht,

$$P = \frac{2 q}{q^2 \frac{\bar{Q}}{Q} + 2 L^{(a)}} \frac{J_1(m R)}{m R} . \tag{22''}$$

Mit Hilfe von (22′) und (22″) folgt nun aus (22)

$$\omega = J_0(m r) - \frac{4 L^{(a)}}{q^2 \frac{\bar{Q}}{Q} + 2 L^{(a)}} \frac{J_1(m R)}{m R} . \tag{22'''}$$

Dadurch ist ω bis auf die Konstante q bestimmt. Die Grenzbedingungen (1‴) dienen zur vollständigen Bestimmung. Sie drücken aus, daß die die Wände berührenden Teilchen für alle Zeiten ruhen, also

$$\bar{\omega} = 0 \quad \text{für} \quad r = R . \tag{23}$$

Daher bekommt man bei Benutzung der Abkürzung

$$L'^{(a)} = \frac{Q}{\bar{Q}} L^{(a)} \tag{23'}$$

aus (22‴) für q die Bestimmungsgleichung

$$q^2 + 2 L'^{(a)} = 4 L'^{(a)} \frac{J_1(m R)}{m R J_0(m R)} , \tag{24}$$

deren beide physikalisch in Betracht kommenden Wurzeln die Form haben

$$q = - \alpha \pm i \beta . \tag{24'}$$

Aus (24'), (22''), (18), (10) erkennt man, daß η bis auf eine unwesentliche Konstante von der Form ist

$$(24'') \qquad \eta = e^{-\alpha t} \sin \beta t .$$

η wird also durch eine gedämpfte Sinusschwingung dargestellt mit der Schwingungsdauer, der Dauer einer vollen Schwingung

$$(24''') \qquad T = \frac{2\pi}{\beta} .$$

Ebenso kann man nach (20''') die mittlere Geschwindigkeit φ_{00} in reeller Form darstellen. Dies ist jedoch für das eigentliche Ziel ohne Interesse.

Es bleibt nun noch die Aufgabe übrig, den Einfluß des Wärmeaustausches zwischen Gas und Umgebung auf den Schwingungsvorgang des Quecksilberringes zu berücksichtigen.

3. Erweiterung der Betrachtungen auf den Fall nichtadiabatischer Änderungen.

Einer wirklich befriedigenden Lösung dieser Aufgabe stellen sich Hindernisse entgegen, die nicht überwunden werden konnten.

Auf drei verschiedene Arten kann ein Wärmetransport zwischen Gas und Umgebung vermittelt werden: durch Leitung, Strahlung und Konvektion. Von vornherein leuchtet ein, daß der auf Strahlung zurückzuführende Anteil im vorliegenden Falle gegenüber dem von der Leitung herrührenden zu vernachlässigen ist. In der Tat wird unten noch auseinandergesetzt werden können, daß der Einfluß der Strahlung neben dem der anderen Wärmefortpflanzungsarten nicht in Betracht kommt.

Die Konvektion hat zweierlei Ursachen. Einerseits tritt sie als direkte Folge der Flüssigkeitsschwingungen auf, unabhängig von der Wärmeleitung. Andererseits werden auch durch die Druckausgleichung der infolge von Wärmeleitung verschieden temperierten Gasschichten Strömungen bedingt. Doch spielen die letzteren neben ersteren wohl nur eine untergeordnete Rolle.

Da sich für die Konvektion ein gesetzmäßiger Ansatz wohl nicht finden läßt, soll von ihrer Berücksichtigung insofern abgesehen werden, als angenommen wird, ihre Wirkung käme

auf eine Vergrößerung der Wärmeleitfähigkeit des Gases hinaus. Dann handelt es sich, wenn die Gasvolumina die Gestalt von Kugeln mit angesetzten Zylindern nach Art der Gefäße G in Fig. 2 haben, und der Zylinderraum neben dem Kugelraum genügend klein ist, um folgendes *thermodynamische Problem.*

Ein in einer starren Kugel befindliches Gasquantum wird durch periodisches Zu- und Abströmen nach dem Gesetz (15)

$$V = V^0 + \bar{Q}\eta \tag{25}$$

gleichförmig dilatiert. Es tauscht dabei mittels Leitung Wärme aus mit der sie einschließenden Glaswand, die ihrerseits auf dieselbe Weise mit der atmosphärischen Luft einen Wärmeaustausch unterhält. Der Gasdruck p ist durch die in Betracht kommenden Konstanten als Funktion der Zeit darzustellen.

a) Bestimmung der Gastemperatur.

Aufstellung der Gleichungen.

Man wird zunächst die Gastemperatur bestimmen, indem man dem Vorgang die durch die Berücksichtigung innerhalb des Gasvolumens vorhandener Wärmequellen und -senken, also im vorliegenden Falle der durch die Dilatation erzeugten Wärmewirkung erweiterte Fouriersche Wärmeleitungsgleichung für isotrope Körper zugrunde legt. Wenn, auf das Gas bezogen, γ_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, k die Wärmeleitungskonstante, beide in mechanischem Maße ausgedrückt, S die Dichte, δ die Dilatation und τ die absolute Temperatur bezeichnen, so heißt jene Gleichung

$$S\gamma_v \frac{\partial \tau}{\partial t} + p\frac{\partial \delta}{\partial t} = k\Delta\tau . \tag{26}$$ [1]

Um sie den besonderen Verhältnissen des Problems anzupassen, hat man die Dilatationsänderung $d\delta$ mittels (25) durch η auszudrücken. $d\delta$ und S sind infolge der ungleichmäßigen Temperierung der Gasschichten vom Orte abhängig, — es soll jedoch davon abgesehen werden, weil diese Wirkung erst in zweiter Linie in Betracht kommt. Bei Beschränkung auf hinreichend kleine Schwingungsweiten und Voraussetzung der An-

1) Vgl. W. Voigt, Thermodynamik 1. p. 347. (228).



wendbarkeit des Boyle-Gay Lussacschen Gesetzes und der für ideale Gase zwischen der Boyleschen Gaskonstanten B und den spezifischen Wärmen γ_p und γ_v bei konstantem Druck und konstantem Volumen in mechanischen Maße bestehenden Relation

$$B = \gamma_p - \gamma_v$$

kommt (26) auf die Form

(26')
$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + (\varkappa - 1)\tau^0 \frac{\bar{Q}}{V^0}\frac{d\eta}{dt} = \mathfrak{a}^2 \Delta \tau .$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{a}^2$ die Temperaturleitfähigkeit

(26'')
$$\mathfrak{a}^2 = \frac{k}{S\gamma_v},$$

die man als Konstante behandeln darf, wenn man im Korrektionsgliede von einer Abhängigkeit der Größen k und γ_v von der Temperatur τ noch absieht.

Für die in (26') vorkommende Größe η hat man den Wert (24'')

(26''')
$$\eta = e^{-\alpha t} \sin \beta t .$$

Die Verwendung dieser Gleichung, die nur für den Fall adiabatischer Zustandsänderungen abgeleitet ist, bedingt eine erlaubte Annäherung um so mehr, als das definitive Experiment auch im allgemeinen Falle gedämpfte Sinusschwingungen aufweist (vgl. p. 282).

Für die Temperatur der Wand, die mit τ_w bezeichnet werden soll, hat man die gewöhnliche Fouriersche Wärmeleitungsgleichung, also, wenn $\mathfrak{a}_w^2$ für die Wand dieselbe Bedeutung wie $\mathfrak{a}^2$ für das Gas hat,

(27)
$$\frac{\partial \tau_w}{\partial t} = \mathfrak{a}_w^2 \Delta \tau_w .$$

Zu (26') und (27) kommen noch die Grenz- und Anfangsbedingungen hinzu. Man bezeichne den Übergangsleitungskoeffizienten zwischen Gas und Wand mit h, den Wärmeleitungskoeffizienten der Kugelwand mit k_w, ihren inneren Radius mit $\mathfrak{R}$, ihren äußeren mit $\mathfrak{R}_a$, den Radiusvektor vom Kugelzentrum zu einem beliebigen Punkte mit r und zeichne die auf eine Grenze sich beziehenden Größen durch einen darüber gesetzten Strich aus.

Wenn die Kugelwanddicke $\mathfrak{R}_a - \mathfrak{R}$ genügend groß ist neben der Dicke derjenigen Wandschicht, die während der Gasdilatationen merkliche Temperaturschwankungen aufweist, und die Kugelwand vor äußeren Wärmeeinflüssen geschützt wird, so darf man der Bedingung für die Grenze $r = \mathfrak{R}_a$ die einfache Form geben

(27′) $$\bar{\tau}_w = \tau^0 \quad \text{für} \quad r = \infty.$$

Auch die Bedingungen für die Grenze $\mathfrak{R}$ sollen in vereinfachter Form benutzt werden. Für ruhende Gase, deren Verdünnung nicht unter eine gewisse untere Grenze herabsinkt, ist die äußere Leitfähigkeit h unendlich groß.[1]) Im vorliegenden Falle bedingen die Dilatationen allerdings Strömungen der Gasteilchen, so daß der Wert

$$h = \infty$$

nicht ohne weiteres zutrifft. Indessen können die in Angriff genommenen Überlegungen höchstens den Anspruch erheben, eine summarische Berücksichtigung des Wärmeaustausches zu bieten, weil sie ja von der Voraussetzung ausgehen, daß man sich die Wirkung der Konvektion durch eine Vergrößerung der Wärmeleitfähigkeit erzielt denken kann. Aus diesem Grunde soll von der Annahme $h = \infty$ Gebrauch gemacht werden. Dann gilt

(27″) $$\bar{\tau} = \bar{\tau}_w, \quad k \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial r} = k_w \frac{\partial \bar{\tau}_w}{\partial r} \quad \text{für} \quad r = \mathfrak{R}.$$

Ferner soll noch insofern eine Vernachlässigung eintreten, als man überall die durch Berücksichtigung des Wärmeaustausches und der Flüssigkeitsreibung auftretenden quadratischen Korrektionsglieder, also die mit k^2, α^2, $k\alpha$ proportionalen Größen, weil sie praktisch nicht in Betracht kommen, neben 1 fortläßt. Dann darf man in (26′) statt (26‴) einsetzen

(27‴) $$\eta = \sin \beta t.$$

Wählt man noch als Anfangsbedingung

(27⁗) $$\tau = \tau_w = \tau_0 \quad \text{für} \quad t = 0,$$

so wird das vereinfachte Wärmeproblem durch die Gleichungen (26′) und (27) bis (27⁗) zum Ausdruck gebracht.

1) S. M. Smoluchowsky, Wied. Ann. 64. p. 101. 1898.

Transformationen der Gleichungen.

Um es auf eine gewöhnliche Fouriersche Wärmeleitungsaufgabe ohne räumliche Wärmequellen mit der Anfangstemperatur Null zurückzuführen, wendet man die Transformationen an

(28) $$\begin{cases} \tau = \tau^0 - (\varkappa - 1)\tau^0 \frac{\bar{Q}}{V^0}\eta + \mathfrak{T}, \\ \tau_w = \tau^0 + \mathfrak{T}_w. \end{cases}$$

Um die Gleichungen der Kugelsymmetrie anzupassen, hat man den Anfangspunkt des Koordinatensystems XYZ in den Kugelmittelpunkt zu verlegen und zu setzen

(28') $$\mathfrak{T} = \frac{U}{r}, \quad \mathfrak{T}_w = \frac{U_w}{r}.$$

Für die Funktionen U und U_w erhält man die Gleichungen

(29) $$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathfrak{a}^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial U_w}{\partial t} = \mathfrak{a}_w^2 \frac{\partial^2 U_w}{\partial r^2},$$

(29') $$\begin{cases} \bar{U} - \mathfrak{R}(\varkappa - 1)\tau^0 \frac{\bar{Q}}{V^0}\eta = \bar{U}_w \\ k\left(\mathfrak{R}\overline{\frac{\partial U}{\partial r}} - \bar{U}\right) = k_w\left(\mathfrak{R}\overline{\frac{\partial U_w}{\partial r}} - \bar{U}_w\right) \end{cases} \quad \text{für } r = \mathfrak{R},$$

(29'') $$\lim_{r=\infty} \frac{U_w}{r} = 0,$$

(29''') $$U = U_w = 0 \quad \text{für} \quad t = 0.$$

Durch die Transformation (28') wird außerdem noch, damit die Temperatur im Kugelzentrum nicht unendlich ausfällt, die Nebenbedingung

(29'''') $$\bar{U} = 0 \quad \text{für} \quad r = 0$$

erforderlich.

Integration der Gleichungen.

Zwecks Lösung der Aufgabe sieht man von der Anfangsbedingung (29''') vorläufig ganz ab, d. h. man beschränkt sich auf den periodischen Teil der Wärmebewegung, dessen vollständige Integrale $U^{(\mathfrak{p})}$ und $U_w^{(\mathfrak{p})}$ heißen sollen.

Es soll ausgegangen werden von den partikulären Integralen der Gleichungen (29)

$$e^{-\mathfrak{a}^2\nu^2 t - i\nu r}, \quad e^{-\mathfrak{a}_w^2\nu_w^2 t - i\nu_w r},$$

$$\nu^2 = -2\mathfrak{p}^2 i, \quad \nu = (1 - i)\mathfrak{p},$$

$$\nu_w^2 = -2\mathfrak{p}_w^2 i, \quad \nu_w = (1 - i)\mathfrak{p}_w,$$

worin $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_w$ willkürliche reelle Konstante sind.

Die erste Gleichung (29') liefert die Relationen

(30) $$2\,\mathfrak{a}^2\mathfrak{p}^2 = \beta = 2\,\mathfrak{a}_w^2\,\mathfrak{p}_w^2.$$

Es existieren also zwei mögliche Werte für $\mathfrak{p}$ sowohl w für $\mathfrak{p}_w$, die sich nur durch die Vorzeichen unterscheid Definiert man $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_w$ durch die positiven Wurzeln

(30') $$\mathfrak{p} = +\sqrt{\frac{\beta}{2\,\mathfrak{a}^2}}, \quad \mathfrak{p}_w = +\sqrt{\frac{\beta}{2\,\mathfrak{a}_w^2}},$$

so bekommen die Integrale mit Rücksicht auf die Nebe bedingungen (29'''') und (29'') die Form

(30'') $$\begin{cases} U^{(\mathfrak{p})} = Ce^{-\mathfrak{p}r}\sin(\beta t - \mathfrak{p}r - c) - Ce^{+\mathfrak{p}r}\sin(\beta t + \mathfrak{p}r - \ldots \\ U_w^{(\mathfrak{p})} = C_w e^{-\mathfrak{p}_w r}\sin(\beta t - \mathfrak{p}_w r - c_w). \end{cases}$$

Zur Bestimmung der übrigbleibenden vier willkürlich Konstanten stehen die beiden Bedingungen (29') zur Verfügun Setzt man dort die Integrale (30'') ein, so müssen die Koef zientensummen von $\sin\beta t$ und $\cos\beta t$ verschwinden. So find man durch Elimination der Glieder mit C_w zwei Gleichung mit den beiden Unbekannten $C\cos c$, $C\sin c$, wodurch $U^{(\mathfrak{p})}$ vo ständig bestimmt wird.[1]) Durch Elimination der Glieder mit könnte man ebenso auch $U_w^{(\mathfrak{p})}$ finden.

$U^{(\mathfrak{p})}$ und $U_w^{(\mathfrak{p})}$ sind nur die periodischen Anteile zu und U_w, weil sie die Anfangsbedingungen (29''') nicht erfülle Daher sind die aperiodischen Glieder $U^{(\mathfrak{a})}$, $U_w^{(\mathfrak{a})}$ so zu wähle daß sie den Ausgleich der Temperaturverteilung wiedergebe

$$\begin{matrix} -U^{(\mathfrak{p})} \\ -U_w^{(\mathfrak{p})} \end{matrix} \quad \text{für } t = 0.$$

Man erhält dadurch für $U^{(\mathfrak{a})}$ einen Ausdruck, der für $k =$ natürlich verschwindet nnd für $t = \infty$ dasselbe Verhalten zei wie die Funktion $e^{-\mu^2 t}$ mit der reellen Konstanten μ.

Auf die Bestimmung dieses Integrales[2]) soll nicht ei gegangen werden, weil unten sich ergeben wird, daß es pra tisch nicht in Betracht kommt. Daher sollen $U^{(\mathfrak{a})}$ und ande im Verlauf der Rechnung daraus entstehende Formen au nicht durch die Bezeichnung unterschieden, sondern alle Fun

1) Vgl. Diss. p. 37 f.

2) Für den speziellen Fall $k_w = \infty$ vgl. H. Weber, l. c. 2. § 44

tionen mit einem analogen Verhalten wie $e^{-\mu^2 t}$ mit $f^{(a)}(t)$ bezeichnet werden.

Mittels (28), (28'), (30'') bekommt man für die Gastemperatur τ den Ausdruck

(30''') $$\begin{cases} \tau = \tau^0 - (\varkappa - 1)\tau^0 \frac{Q}{V^0}\eta + C\frac{e^{-n\frac{r}{\mathfrak{R}}}}{r}\sin\left(\beta t - n\frac{r}{\mathfrak{R}} - c\right) \\ \qquad - C\frac{e^{+n\frac{r}{\mathfrak{R}}}}{r}\sin\left(\beta t - n\frac{r}{\mathfrak{R}} - c\right) + f^{(a)}(t). \end{cases}$$

Dabei ist gesetzt

(31) $$n = \mathfrak{p}\mathfrak{R}.$$

b) **Berechnung des Gasdruckes p aus der Temperaturverteilung τ. Die mittlere Gastemperatur.**

Zur Bestimmung von p hat man an das Boyle-Gay Lussacsche Gesetz

$$p = BS\tau$$

anzuknüpfen, worin S und τ Funktionen des Ortes und der Zeit sind. Durch Multiplikation mit dk/τ, wo dk das Volumelement bezeichnet, und Integration über das ganze Gasvolumen V bekommt man

(31') $$p\int\frac{dk}{\tau} = \mathfrak{M}B,$$

unter $\mathfrak{M}$ die Gasmasse verstanden.

Behufs Bestimmung des Integrales $\int dk/\tau$ ist es rechnerisch von Vorteil, auf die Wärmeleitungsgleichung (26') zurückzugehen

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = -(\varkappa - 1)\tau_0\frac{\bar{Q}}{V^0}\frac{d\eta}{dt} + \mathfrak{a}^2\Delta\tau.$$

Durch Integration dieser Gleichung nach t und durch Verwandlung des Raumintegrales $\int\Delta\tau dk$ nach dem sogenannten Gaussschen Integralsatze in ein Oberflächenintegral bekommt man $\int dk/\tau$. Aus (31') folgt dann wegen $V = V^0 + \bar{Q}\eta$, wenn man Größen der Ordnung $\left(\frac{\bar{Q}}{V^0}\eta\right)^2$ neben 1 wieder fortläßt und unter O^0 die Oberfläche des Volumens V^0 versteht,

(31'') $$p = p^0 - p^0\frac{\bar{Q}}{V^0}\varkappa\eta + \frac{p^0}{\tau^0}\frac{O^0}{V^0}\mathfrak{a}^2\int\frac{\overline{\partial\tau}}{\partial r}dt.$$

Nebenbei erhält man für die durch

$$(31''') \qquad \tau_m = \frac{p\,V}{\mathfrak{M}\,B}$$

definierte mittlere Gastemperatur

$$(31'''') \qquad \tau_m = \tau^0 - (\varkappa - 1)\,\tau^0 \frac{\bar{Q}}{V^0}\,\eta + \frac{O^0}{V^0}\,\mathfrak{a}^2 \int \frac{\partial \tau}{\partial r}\,d\,t\,.$$

Das in (31'') und (31'''') stehende Integral ist mittels (30'') zu bestimmen.

Man erhält, wenn man die in den Korrektionsgliedern stehenden Größen O^0 und V^0 durch $\mathfrak{R}$ ausdrückt,

$$(32) \quad \begin{cases} p = p^0 - p^0\,\frac{\bar{Q}}{V^0}\left(\varkappa - \frac{3}{\beta\,\mathfrak{R}^2}(\varkappa - 1)\,\mathfrak{a}^2\,\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{R}}\right)\eta \\ \qquad - p^0\,\frac{\bar{Q}}{V^0}\cdot\frac{3}{\beta^2\,\mathfrak{R}^2}\,(\varkappa - 1)\,\mathfrak{a}^2\,\frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{R}}\,\frac{d\,\eta}{d\,t} + f^{(\mathfrak{a})}(t)\,, \end{cases}$$

$$(32') \quad \begin{cases} \tau_m = \tau^0 - (\varkappa - 1)\,\tau^0\,\frac{\bar{Q}}{V^0}\left(1 - \frac{3}{\beta\,\mathfrak{R}^2}\,\mathfrak{a}^2\,\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{R}}\right)\eta \\ \qquad - (\varkappa - 1)\,\tau^0\,\frac{\bar{Q}}{V^0}\cdot\frac{3}{\beta^2\,\mathfrak{R}^2}\,\mathfrak{a}^2\,\frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{R}}\,\frac{d\,\eta}{d\,t} + f^{(\mathfrak{a})}(t)\,. \end{cases}$$

Für die Abkürzungen $\mathfrak{Z}_1/\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Z}_2/\mathfrak{R}$ ergeben sich bei Vernachlässigung von e^{-2n}, $1/n_w$, n^2/n_w^2, unter n_w die Größe

$$(32'') \qquad n_w = \mathfrak{p}_w\,\mathfrak{R}$$

verstanden, die Werte

$$(32''') \qquad \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{R}} = n\left(1 - \frac{k\,n}{k_w\,n_w}\right), \quad \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{R}} = (n - 1)\left(1 - \frac{k\,n}{k_w\,n_w}\right).$$

c) Berechnung der Kraft Θ mittels p.

Aus (32) und (11) bekommt man für die auf den Quecksilberring wirkende Kraft, wenn man die Bezeichnung $\mathfrak{B} = 2\,V_a^0\,V_b^0/(V_a^0 + V_b^0)$ in (15') benutzt und genügend übereinstimmende Volumina V_a^0 und V_b^0 voraussetzt, um in den Korrektionsgliedern

$$V_a^0 = V_b^0 = \tfrac{4}{3}\,\pi\,\mathfrak{R}^3$$

setzen zu dürfen, bei Benutzung der Abkürzungen

$$(32'''') \quad \begin{cases} 2\,L = \frac{2\,g}{b\,(\vartheta_b - \vartheta_a)}\left[1 + H\,\frac{\bar{Q}}{\mathfrak{B}}\left(\varkappa - \frac{3}{\beta\,\mathfrak{R}^2}\,(\varkappa - 1)\,\mathfrak{a}^2\,\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{R}}\right)\right], \\ 2\,l = \frac{2\,g}{b\,(\vartheta_b - \vartheta_a)}\cdot H\,\bar{Q}\,\frac{9\,(\varkappa - 1)\,\mathfrak{a}^2}{4\,\pi\,\mathfrak{R}^5\,\beta^2}\,\frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{R}} \end{cases}$$

den Ausdruck

(33) $$\Theta = -2\frac{b}{\varrho}L\eta - 2\frac{b}{\varrho}l\frac{d\eta}{dt} + f^{(a)}(t).$$

Vergleicht man hiermit die Kraft (16')

$$\Theta = -2\frac{b}{\varrho}L^{(a)}\eta$$

für den adiabatischen Vorgang, so erkennt man, daß (33) für $a = 0$, d. h. $k = 0$ in der Tat mit (16') identisch wird. Der Einfluß des Wärmeaustausches auf Θ erscheint in drei Anteile zerlegt. Abgesehen von dem hinzutretenden aperiodischen Gliede tritt ein der Geschwindigkeit $d\eta/dt$ proportionaler und entgegengerichteter Kraftanteil $-2\frac{b}{\varrho}l\frac{d\eta}{dt}$ auf, während ein dritter Anteil

$$-\frac{b}{\varrho}(2L - 2L^{(a)})\eta$$

nach (16') und (32'''') der Verschiebung η proportional und gleichgerichtet ist.

d) Integration der Bewegungsgleichungen der Flüssigkeit.

Der Kraftausdruck (33) ist in (14) einzusetzen, um die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsringes im allgemeinen Falle zu erhalten. Es ist oben darauf hingewiesen, daß das aperiodische Glied des Ausdruckes mit wachsender Zeit abnimmt und schließlich für $t = \infty$ verschwindet. Je vollständiger der von ihm dargestellte Einfluß des Anfangszustandes der Temperaturverteilung verschwunden ist, also je mehr die Wärmebewegung rein periodisch geworden ist, mit um so größerer Berechtigung darf man das Glied ganz vernachlässigen, also setzen

(33') $$\Theta = -2\frac{b}{\varrho}L\eta - 2\frac{b}{\varrho}l\frac{d\eta}{dt}.$$

Dann ist es möglich, genau so wie im Falle adiabatischer Zustandsänderungen, aus den Ansätzen (18)

(33'') $$\psi = \chi e^{qt}, \quad \eta = P e^{qt}$$

die Lösung der Bewegungsgleichungen zu konstruieren, und zwar kann man sie aus der Lösung jenes speziellen Falles

direkt ablesen: man braucht nur $L + lq$ an Stelle von $L^{(a)}$ zu setzen. So findet man aus (24) bei Benutzung der (23') analogen Bezeichnungen

$$L' = \frac{Q}{\overline{Q}} L, \quad l' = \frac{Q}{\overline{Q}} l \tag{33''}$$

für q die Gleichung

$$q^2 + 2L' + 2l'q = (4L' + 4l'q)\frac{J_1(mR)}{mRJ_0(mR)}. \tag{34}$$

Bei Berücksichtigung des aperiodischen Gliedes in Θ sind jedoch die Ansätze (33'') nicht mehr brauchbar, und zwar ist wegen des Zusammenhanges, den die Gleichung (13) zwischen ψ und η darstellt, auch jeder von beiden für sich allein unmöglich. Dann kann also η nicht mehr durch die Gleichung (24')

$$\eta = e^{-\alpha t} \sin \beta t \tag{34'}$$

dargestellt werden. In praktischen Fällen, wo das Experiment zu entscheiden vermag, daß die Darstellung (34') für gewisse Oszillationen merklich genau richtig ist, muß man daraus den Schluß ziehen, daß die den Oszillationen vorangegangene Zeit genügt hat, um das aperiodische Glied auf eine unmerkliche Größe herabzudrücken. Dann darf man also Gleichung (34) anwenden, deren physikalisch in Betracht kommenden Wurzeln, wie schon aus (34') hervorgeht, von der Form sind

$$q = -\alpha \pm i\beta. \tag{34''}$$

4. Berechnung von $\varkappa$ und einiger für die Beurteilung der Assmannschen Methode wichtiger Größen aus den Gleichungen.

Man hat an die Gleichung (34), die in den Abkürzungen L' und l' nach (33'') und (32'''') die Größe $\varkappa$ enthält, anzuknüpfen. Und zwar sollen $2L'$ und $2l'$ aus (34) berechnet, ihre Werte gleich ihren aus (33'') und (32'''') gebildeten Ausdrücken gesetzt und die entstehenden Gleichungen, angewandt auf den Fall sowohl des geschlossenen als des offenen Rohres, zur Bestimmung von $\varkappa$ verwertet werden.

Zunächst soll (34) durch Sonderung des reellen vom imaginären Teile in zwei Gleichungen zerlegt werden, wobei in α, l und $1/m = 1 \Big/ \sqrt{-q\frac{s}{a}}$ quadratische Glieder vernachlässigt werden mögen. Bei Zugrundelegung der halbkonver-

genten Reihen[1]) für die Besselschen Funktionen und Benutzung der Bezeichnung

$$\zeta^2 = \frac{a}{2 s R^2}$$

ergeben sich die beiden Gleichungen

(35) $$2 L' = \beta^2 \left(1 + 2 \frac{\zeta}{\sqrt{\beta}}\right), \quad 2 l' = 2 (\alpha - \zeta \sqrt{\beta}).$$

Durch Anwendung der zweiten dieser Gleichungen auf den Fall des offenen Rohres kann man ζ durch β_0 und α_0, die beiden die Flüssigkeitsbewegung bei offenem Rohr charakterisierenden Konstanten, ausdrücken, und daher kann man statt (35) auch schreiben

(35') $$2 L' = \beta^2 \left(1 + 2 \frac{\alpha_0}{\sqrt{\beta_0 \beta}}\right), \quad 2 l' = 2 \left(\alpha - \alpha_0 \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}}\right).$$

Damit sind die durch (33''') und (32'''') hauptsächlich in Konstanten des Gases und des Apparates ausgedrückten Größen $2 L'$ und $2 l'$ nur durch Beobachtungsgrößen bestimmt. Schließlich sollen noch die ersten Gleichungen der beiden Paare (35'), (32'''') auf das offene Rohr angewandt werden. In (32'''') geschieht das dadurch, daß man

$$V_a^0 = V_b^0 = \infty$$

einsetzt. Bei Verwendung der Abkürzungen L'_0, L_0 für die L', L entsprechenden Ausdrücke erhält man

(35'') $$\begin{cases} 2 L_0' = \beta_0^2 \left(1 + 2 \frac{\alpha_0}{\beta_0}\right), \\ 2 L_0 = \frac{2 g}{b (\vartheta_b - \vartheta_a)}. \end{cases}$$

Durch passende Kombinationen der Gleichungen (35'), (35''), (32''') mit Beziehung auf (33''') bekommt man schließlich die Formeln

(35''') $$\varkappa = \frac{\mathfrak{B}}{H Q} \left(\frac{\beta^2}{\beta_0^2} - 1\right)\left[1 - 2 \frac{\beta^2}{\beta^2 - \beta_0^2} \frac{\alpha_0}{\beta_0} \left(1 - \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}}\right)\right] + \frac{3}{\beta \mathfrak{R}^2} (\varkappa - 1) \mathfrak{a}^2 \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{N}}.$$

(35'''') $$(\varkappa - 1) \mathfrak{a}^2 \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{N}} = \frac{1}{H Q} \cdot \frac{8 \pi \mathfrak{R}^5}{9} \frac{\beta^2}{\beta_0^2} \left(\alpha - \alpha_0 \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}}\right),$$

1) A. Gray and C. P. Mathews, A Treatise on Bessel's Functions, London 1895. p. 40, Gl. 92.

Letztere ist als Beziehung zwischen der Konstanten $\mathfrak{a}^2$ der Wärmebewegung und der ihr zu verdankenden Änderung der Konstanten α zu betrachten.

Es soll noch Gleichung (32') benutzt werden, um direkten Aufschluß über den Einfluß des Wärmeaustausches auf die Gastemperatur zu bekommen. Man erkennt, daß bei adiabatischer Dilatation die Temperaturoszillation $\tau_m - \tau^0$, die mit dem Index i versehen werden soll, um auf den idealen Vorgang hinzuweisen, gleich ist

(36) $$(\tau_m - \tau^0)_i = -(\varkappa - 1)\tau^0 \frac{\bar{Q}}{\mathfrak{B}} \eta .$$

Für ihren mit η proportionalen Korrektionsanteil, der zu den Zeiten verschwindender Flüssigkeitsgeschwindigkeiten die Gesamtkorrektion darstellt, erhält man bei Beziehung auf die Einheit, verglichen mit der in (35''') stehenden Wärmekorrektion $\Delta_k \varkappa$ zu $\varkappa$

(36') $$\delta_k \tau_m^{(\eta)} = -\frac{\Delta_k \varkappa}{\varkappa - 1} .$$

Um schließlich die Gleichungen zur praktischen Verwendung fertigzustellen, sollen statt β und β_0 mittels (24''') die Schwingungsdauern T und T_0 eingeführt werden. Benutzt man noch für $\mathfrak{Z}_1/\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Z}_2/\mathfrak{R}$ die Werte (32'') und für n und n_w die aus (31), (32''), (30') folgenden Ausdrücke und versteht unter $\mathfrak{a}_N^2$ die zum Normaldruck 76 cm gehörende Größen $\mathfrak{a}^2$, so bekommt man aus (35''') zur Bestimmung von $\varkappa$, wenn man den unkorrigierten Wert in $\varkappa'$ und die Reibungs- und Wärmekorrektion dazu in $\Delta_a \varkappa$ und $\Delta_k \varkappa$ abkürzt,

(37) $$\varkappa = \varkappa' + \Delta_a \varkappa + \Delta_k \varkappa ,$$

(37') $$\varkappa' = \frac{\mathfrak{B}}{H \bar{Q}} \left(\frac{T_0^2}{T^2} - 1 \right) ,$$

(37'') $$\Delta_a \varkappa = -\frac{\mathfrak{B}}{H \bar{Q}} \frac{T_0^2}{T^2} \cdot \frac{\alpha_0 T_0}{\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_0}} \right) ,$$

(37''') $$\Delta_k \varkappa = \frac{3}{2\mathfrak{R}} \sqrt{\frac{76}{\pi}} (\varkappa - 1)\mathfrak{a}_N \left(1 - \frac{k\,\mathfrak{a}_w}{k_w \mathfrak{a}_N} \sqrt{\frac{H}{76}} \right) \cdot \sqrt{\frac{T}{H}} .$$

Gleichung (35'''') erhält die Form

(38) $$\left\{ \begin{aligned} &(\varkappa - 1)\mathfrak{a}_N^2 \left(\frac{1}{\mathfrak{a}_N} \sqrt{\frac{\pi}{76}} \sqrt{\frac{H}{T}} - \frac{1}{\mathfrak{R}} \right) \left(1 - \frac{k\,\mathfrak{a}_w}{k_w \mathfrak{a}_N} \sqrt{\frac{H}{76}} \right) \\ &\qquad = \frac{1}{76 \bar{Q}} \frac{8\pi \mathfrak{R}^4}{9} \cdot \frac{T_0^2}{T^2} \left(\alpha - \alpha_0 \sqrt{\frac{T_0}{T}} \right) . \end{aligned} \right.$$

Für die Schwingungsdauern T und T_0 folgen aus (35'), (33'') (32'''), (35'') die Korrektionen

$$(38')\quad \left\{\begin{array}{l} \delta_a T = -\dfrac{\alpha_0 \sqrt{T_0\, T}}{\pi}\,, \qquad \delta_k T = -\dfrac{H \dfrac{\bar{Q}}{\mathfrak{B}} \dfrac{\Delta_k \varkappa}{2}}{1 + H \dfrac{\bar{Q}}{\mathfrak{B}} \varkappa}\,, \\[2ex] \qquad\qquad \delta_a T_0 = -\dfrac{\alpha_0 T_0}{\pi}\,. \end{array}\right.$$

Man erkennt, daß sowohl die Flüssigkeitsreibung als auch der Wärmeaustausch vergrößernd auf T einwirken.

Wie die Gleichungen (32'''), (33''), (35'), (35'') erkennen lassen, ist $T < T_0$ und daher wegen (38') die Reibungskorrektion $\delta_a T$, absolut genommen, kleiner als $\delta_a T_0$, weshalb diejenige zu dem in der Formel (37') für $\varkappa'$ auftretenden Quotienten T_0^2 / T^2 negativ ausfällt. So kommt es, daß die Wärmekorrektion zu $\varkappa$ positiv, aber die Reibungskorrektion negativ auftritt, obwohl beide in demselben Sinne auf die Flüssigkeitsschwingungen einwirken. Aus dem Umstande, daß die Wärme- und Reibungskorrektionen sich gegenseitig teilweise ausgleichen, ist es zu erklären, daß man bei Anwendung der Formel (37') ohne Rücksicht auf die Korrektionen in besonderen Fällen verhältnismäßig große Werte für $\varkappa$ erhalten kann, wie es in der Arbeit von Müller der Fall ist.

II. Experimenteller Teil.

1. Die Einrichtung des Apparates.

Ein annähernd kreisförmig gebogenes Glasrohr *r* (Fig. 2) mit vertikal auslaufenden Enden wird von einem Holzgestell aus einem horizontal liegenden und einem vertikal stehenden Brette *a* und *b* getragen, und zwar ist es auf *a* mit Gips festgekittet und an *b* mit Klammern befestigt. Das Ganze ist um eine Achse parallel der Kante *s* des Brettes *a* drehbar. Die Rohrenden sind mittels Siegellack in Messingzylinder *c* eingekittet, die sich oben zu mehrfach durchbohrten ebenen Kreisringscheiben *o* verbreitern, so daß die ebenso beschaffenen Fassungen der zylindrischen Ansätze zweier kugelförmigen Gefäße *G* vermittelst Hahnfett luftdicht darauf gesetzt werden können. Verrückungen der Gefäße werden durch in die Bohrlöcher passende Schrauben unmöglich gemacht.

Um die zur Gleichung (27') führenden Voraussetzungen sicherer zu erfüllen, um die Kugelwanddicke neben der Dicke der während der Oszillationen eine merkliche Temperaturschwankung zeigenden Wandschicht genügend groß zu machen, sind die Gefäßwände durch mehrmaliges Auftragen von in Spirituslack angerührtem Gips verstärkt, und um die Gefäße

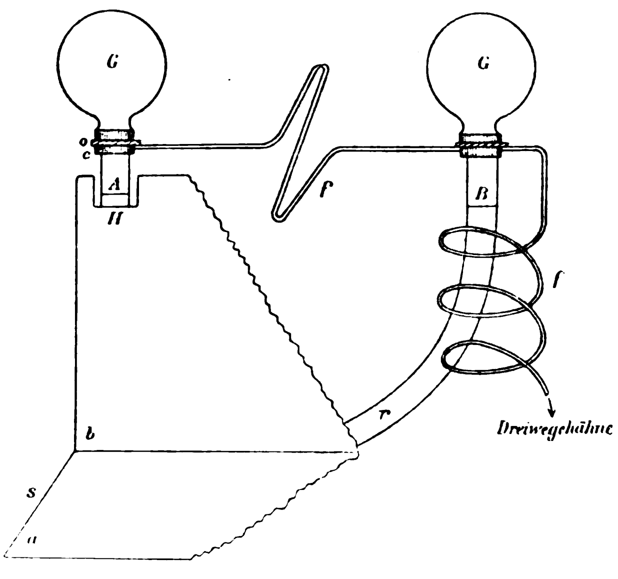


Fig. 2.

vor äußeren Wärmeeinflüssen zu schützen, ist das Ganze mit Watte umwickelt.

Das Rohr *r* ist, entsprechend der der Theorie zugrunde gelegten Voraussetzung (8), bis zu den Stellen *A* und *B* der vertikalen Endstücke mit Quecksilber gefüllt. Um die Räume über den Quecksilberoberflächen evakuieren und mit Gasen füllen zu können, sind in Durchbohrungen der Rohrfassungen, die über die Rohrenden ein wenig hervorragen, unmittelbar unter den Scheiben *o*, zwei kleine enge Messingröhrchen *e* (Fig. 3) eingelötet, die andererseits mit Siegellack in die Rohre *p* zweier Glashähne *h*

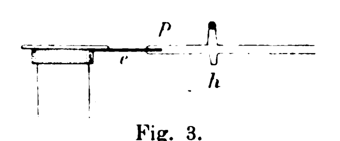


Fig. 3.

eingekittet sind. Die Hähne bilden die Enden einer verzweigten Glasfeder *f* (Fig. 2), die in ein längs der Drehungsachse des Apparates gelegenes Rohrstück endet. Die besondere Lage dieses Endstückes und die Federgestalt des Rohrteiles *f* haben den Zweck, die Spannungen, denen die Glasröhren bei einer Drehung des Apparates ausgesetzt sind, zu verringern bez. unschädlich zu machen. Zwei zusammengeblasene Dreiwegehähne stellen schließlich unter Vermittelung von Bleirohren die Verbindung her mit dem Trockenapparat und Gasometer, mit dem Manometer und mit einer Wasserstrahlpumpe, deren Feuchtigkeit durch ein vorgelegtes Trockenrohr am Eindringen in die Gefäße gehindert wird.

Zur Untersuchung der Flüssigkeitsoszillationen wurde ein photographisches Verfahren angewandt. Die das Quecksilber enthaltende Röhre ist auf der einen Seite der einen Niveaustelle *A* (Fig. 2) mit schwarzem Papier beklebt, das einen vertikalen schmalen Spalt hat. Durch eine Bikonvexlinse L_1 (Fig. 4) wird das Bild des Fadens *N* einer kleinen

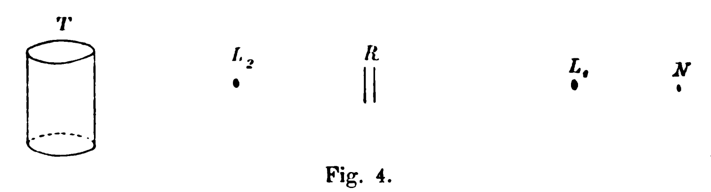


Fig. 4.

Nernstlampe in ihn hineingeworfen. Die oberhalb der Quecksilberoberflächen auffallenden Strahlen gehen durch das Rohr *R* hindurch, werden jenseits der Röhre durch eine zweite Bikonvexlinse L_2 nochmals konvergent gemacht und, zum Bilde vereinigt, auf eine mit photographischem Papier belegte rotierende Trommel *T* geworfen. Die so aufgenommenen Photogramme geben das Bild des oberhalb der schwingenden Quecksilberoberfläche gelegenen Spaltteiles. Der tiefste bei ruhendem Quecksilber unverdeckte Spaltpunkt, also der die Niveauhöhe der Quecksilberoberfläche angebende Punkt, wird in den Negativen durch eine helle horizontale Gerade, das Bild eines am Rohr in der rechten Höhe festgeklebten dünnen Drahtes markiert. Die Länge des Spaltteilbildes zwischen dieser Marke und dem zu irgendeiner Zeit tiefsten unverdeckten Spaltpunkt

entspricht der Verschiebung der Flüssigkeitsoberfläche aus der Ruhelage, der Elongation η.

Um aus den Spaltphotogrammen die Dauer der Oszillationen finden zu können, müssen noch Zeitpunkte darauf markiert werden. Zu diesem Zwecke ist an der dem Rohr abgewandten Seite des vertikalen Brettes *b* (Fig. 2) an der Stelle *H* unter dem Papierspalt der in einen Stromkreis eingeschaltete magnetische Hammer einer elektrischen Klingel angebracht. Statt des Klöppels der Klingel trägt er einen Kartonstreifen, der, bei geöffnetem Strom den Spalt freilassend, im Augenblick des Stromschlusses angezogen wird und ihn verdeckt. Der Draht des Stromkreises ist am Pendel einer Uhr hinabgelegt und endet in einer Platinspitze, die beim Durchgang des Pendels durch die Ruhelage die Kuppe eines, das andere Ende des Stromkreises bildenden, ein *U*-förmig gebogenes Röhrchen füllenden Quecksilberfadens berührt. Sobald dies geschieht wird der Stromkreis einen Augenblick geschlossen, der Kartonstreifen von dem Elektromagneten angezogen und dadurch der Spalt verdeckt. Durch dieses Spiel werden aus den Negativen der Spaltbilder vertikale helle Linien ausgeschnitten, deren Abstand bei Anwendung eines Sekundenpendels einer Sekunde entspricht.

Die mit dem photographischen Papier belegte Trommel wird nach Lösen eines Ankers durch ein Uhrwerk in Rotation versetzt, und zwar gestattet ihre Einrichtung die Geschwindigkeit in gewisser Weise zu variieren. Im wesentlichen sind zwei verschiedene Umdrehungsdauern benutzt worden, und zwar betrug sie durchschnittlich 40 Sek. bei geschlossenem Rohr, während sie bei offenem wegen der größeren Schwingungsdauer und der geringeren Dämpfung, welch letztere eine größere Anzahl Schwingungen zu benutzen gestattet, gleich etwa 60 Sek. gewählt wurde.

Zum Messen des Gasdruckes wurde in Ermangelung eines brauchbaren gewöhnlichen Manometers eine von Herrn Prof. Kaufmann vorgeschlagene, auf dem Prinzip der Quecksilberluftpumpe beruhende Einrichtung benutzt.

Da das photographische Verfahren eine Verdunkelung des Zimmers erfordert, wurde behufs Ablesung des Druckes eine Beleuchtung des Manometers nötig. Zwei an einem Stativ

verschiebbar angebrachte Glühlampen, die vom Kathetometertische aus regiert werden konnten, erfüllten diesen Zweck, machten indessen eine Vorrichtung erforderlich, die das Manometerrohr vor Strahlung schützte, um eine merkliche Temperatur- und Druckerhöhung des Gases während der Ablesung zu vermeiden.

Orientierende Beobachtungen.

Eine Untersuchung von bei offner Röhre aufgenommenen Photogrammen ergab das überraschende Resultat, daß die Flüssigkeitsschwingungen bei der angegebenen Anordnung des Experimentes durchaus nicht dem theoretischen Ergebnis entsprechen. Sie lassen sich durch die Gleichung

$$\eta = e^{-\alpha t} \sin \beta t$$

bei konstanten Werten α und β *nicht* darstellen. Vielmehr ergibt sich für die untersuchten Schwingungsweiten, kleiner als 1,5 cm, die im vorliegenden Falle genügend klein sind, um die Vernachlässigungen der Theorie zu rechtfertigen, mit abnehmender Amplitude eine Zunahme von α bis zu einem Maximum, das bei dem benutzten Rohr etwa für $^1/_3$ cm Schwingungsweite erreicht wird. Von hier an nimmt α innerhalb nur weniger Schwingungen rasch ab bis zu einem konstanten Wert, kleiner als jeder vorhergegangene andere Wert. Ein analoges Verhalten zeigt die Schwingungsdauer T. Sie nimmt anfangs zu, um nahezu mit α zusammen ein Maximum zu erreichen, und dann rasch ab zu einem konstant bleibenden Minimalwert, und zwar unterscheiden sich ihre Extremwerte etwa um $^1/_{10}$.

Bei genauer Beobachtung der Quecksilberoberfläche während der Oszillationen erkennt man, daß bei den den Charakter der Unstetigkeit tragenden Schwingungsweiten (etwa $^1/_3$ cm) fast in einem bestimmten Augenblick eine Art feste Reibung zwischen Quecksilber und Glaswand eintritt, insofern als das Quecksilber an der Wand völlig haften bleibt, so daß nur noch eine Verschiebung der inneren Fäden, nur noch eine Deformation der Oberflächen, deren Randkurven festliegen, möglich ist. Daher muß der merkwürdige Charakter der Schwingungen aus der äußeren Reibung erklärt werden können.

Aus Beobachtungen über den Ausfluß von Quecksilber aus Kapillarröhren hat Warburg[1]) den Koeffizienten der äußeren Reibung bestimmt, und zwar gleich unendlich gefunden.

In dem Einfluß der unendlich großen äußeren Reibung auf die Quecksilberoberfläche liegt der Grund für den auf den ersten Blick unerklärlichen Charakter der Schwingungen. Allerdings setzt die aufgestellte Theorie, die Gleichungen (1'''), eine unendliche Reibung voraus; indessen äußert sich deren Einfluß bei Quecksilber anders wie bei einer die Wand benetzenden Flüssigkeit, insofern als bei Oszillationen, z. B. einer Wassersäule, die während der ersten Schwingung die Wand berührenden Teilchen haften bleiben, während sie bei Quecksilber, dank der Kohäsion und Schwere der Teilchen, von der Wand oberhalb der Spiegel abgerissen werden, wodurch eine Überwindung der großen äußeren Reibungskraft an den von den Oberflächen passierten Rohrstücken bei jeder Schwingung von neuem erforderlich wird. Wegen der mit abnehmenden Amplituden abnehmenden lebendigen Kraft der schwingenden Masse ist der dem Loslösen der Flüssigkeitsteilchen von der Wand entgegen wirkende Widerstand um so erfolgreicher, je kleiner die Amplituden sind, bis die Teilchen schließlich ganz daran hängen bleiben und nur noch ein Schwingen der inneren Fäden möglich ist.

Ist die Erklärung richtig, so müssen die Schwierigkeiten fortfallen, sobald man die von den Flüssigkeitsspiegeln passierten Rohrstücke ölt, d. h. die äußere Reibung an jenen Stellen auf irgendeine Weise beseitigt. Auf den Rat des Herrn Geh. R.-R. Voigt hin wurde konzentrierte Schwefelsäure auf die Quecksilberkuppen gegossen, und in der Tat wurden dadurch Schwingungen erzielt, wie sie von der Theorie, Gleichung (34'), verlangt werden, mit einer bedeutend kleineren Dämpfung wie bei den Oszillationen ohne Wandölung mit Verschiebung auch der äußeren Fäden.

Bei den definitiven Beobachtungen nehmen also zwei auf die Quecksilberkuppen gegossene Schwefelsäuremengen an den Schwingungen teil. Die das Spaltbild erzeugenden Strahlen gehen durch sie hindurch.

1 E. Warburg, Pogg. Ann. **140.** p. 367. 1870.

Eine dünne Schwefelsäureschicht haftet an einer Wandstelle auch dann noch, wenn sich in dem Rohrteil schon wieder Quecksilber befindet, aber nach beendeten Schwingungen steigt allmählich auch der letzte Rest der Säure nach oben. Eine Verminderung der äußeren Reibung an dem von den Quecksilberoberflächen nicht passierten Rohrteil ist daher nicht zu befürchten. Mit Rücksicht auf die geringe Dicke der Säureschicht durfte die in den Gleichungen auftretende Konstante $\bar{Q}$, der mittlere Querschnitt des während der Oszillationen gehobenen Quecksilberzylinders, mit dem Rohrquerschnitt der Niveaustellen identifiziert werden.[1])

2. **Die Bestimmung der Konstanten des Apparates.**

Um $\bar{Q}$ zu bestimmen wurde zunächst die Säure und so viel Quecksilber aus dem Rohr herausgenommen, daß die Oberflächen etwa die äußersten Lagen der Kuppen bei den größten benutzten Schwingungsweiten hatten, und die Niveauhöhe des einen Spiegels mittels eines Kathetometers bestimmt. Dann wurde die doppelte der vorher herausgenommenen Masse zugegossen und die dadurch erzielte Höhenänderung des Spiegels festgestellt. Masse, dividiert durch das Produkt aus ihrem spezifischen Gewichte und der doppelten Höhendifferenz gibt den gesuchten Querschnitt. Diese Bestimmung wurde mehrmals, mitunter auch mit kleineren Quecksilbermassen, also für kleinere Schwingungsweiten wiederholt. Die Resultate sind

$\bar{Q}$ = 10,303
00
04
08
14
00
10
08
10,306

Die Volumina V_a^0 und V_b^0 ergaben bei beiderlei Gefäßen eine Übereinstimmung bis auf etwa 1 Proz. Sie wurden durch Aus-

---

1) Vgl. Diss. p. 60 f.

messen ihrer Teile mit Quecksilber bez. destilliertem Wasser unter Berücksichtigung der üblichen Korrektionen und der Abhängigkeit des Volumens des Quecksilberringes von der Temperatur bestimmt, und zwar wurden die Gaszylinder der Rohrenden mit Quecksilber, die kleinen Kugelgefäße sowohl mit Quecksilber wie mit Wasser, und die großen mit Wasser ausgemessen. Die Volumina der kleinen Ansatzstücke *e* und *p* (Fig. 3) bis zu den Glashähnen *h* wurden abgeschätzt, kommen indessen kaum in Betracht. Das durch die Schwefelsäure verdrängte Volumen wurde negativ in Rechnung gesetzt. Um zu vermeiden, daß sich infolge Anziehung von Feuchtigkeit durch die Schwefelsäure ein Fehler in das Volumen einschleicht, wurde die von ihr im Rohr eingenommene Höhe mit einer am Rohr angebrachten Marke bisweilen verglichen.

Die Säure mußte häufig aus dem Rohr herausgenommen und, nachdem die oberen Rohrteile ausgespült waren, durch reine ersetzt werden, weil nicht zu verhindern war, daß sie trübe und undurchsichtig wurde.

Die Höhe der Schwefelsäuremassen im Rohr betrug etwa 1,5 cm.

Das Gewicht der ganzen schwingenden Flüssigkeitsmasse schwankte bei den einzelnen Versuchen nur unmerklich. Es betrug 14 508 g.

3. Über die Beobachtungen und daran anschließende Berechnungen von $\varkappa$.

War nach Beendigung der Aufnahme das photographische Papier geborgen, so wurde häufig die Druckablesung wiederholt. Während sich der Gasdruck in dem Verbindungsrohr von Manometer und Kugelgefäßen Temperaturänderungen halber oft merklich geändert hatte, war er in den Gefäßen selbst, so weit wie erforderlich, stets konstant geblieben.

Für Gasdrucke, etwa gleich einer Atmosphäre, wurden für jedes der untersuchten Gase mehrere Photogramme aufgenommen. Dann wurde der Druck mittels der Wasserstrahlpumpe allmählich erniedrigt, und nach jeder neuen Verdünnung um etwa 6 cm eine Aufnahme gemacht. Es lohnte sich nicht, das Gas beliebig stark zu verdünnen, weil die Schwingungs-

dauer T derjenigen T_0 bei offener Röhre um so näher kommt, und damit, des Auftretens der Differenz $T_0^2 - T^2$ in Gleichung (37') wegen, der Einfluß der Beobachtungsfehler auf x um so größer wird, je kleiner der Gasdruck ist. Es ist mit zwei verschieden großen Gefäßpaaren gearbeitet worden. Vor Beginn und nach Beendigung der Versuche mit einem Gas und einer Gefäßart wurde ein Photogramm bei offener Röhre aufgenommen.

Zwecks Bestimmung der Schwingungsdauer der Flüssigkeitsmasse aus den Photogrammen wurden auf der die Niveauhöhe der Quecksilberoberfläche markierenden Geraden die Zeitpunkte der Durchgänge der Oberflächen durch die Gleichgewichtslage bestimmt. Und zwar diente zur Messung der Bruchteile der Sekunden ein zu einem Fuessschen Registrierapparat gehörender Glasmaßstab, bestehend aus mehreren Parallelen, die von einer Schar konvergierender Geraden und zwar von der mittleren unter einem rechten Winkel geschnitten werden. Von den parallelen Querlinien wurde diejenige ausgesucht, in deren Einheit die Sekundenstrecke des Photogramms aufging. In dieser Einheit wurden die gesuchten Strecken gemessen und mit der Sekundenstrecke verglichen. Nach Aneignung einer gewissen Übung im Ausmessen der Photogramme wurde T bei Luft und Kohlensäure, wofür in der Regel mindestens zwanzig Schwingungen benutzt werden konnten, bis auf etwa $^1/_2$ Promille genau gefunden. Bei Wasserstoff ist die Genauigkeit vielleicht nicht ganz so groß wie bei den anderen Gasen, weil infolge größerer Dämpfung die Anzahl der brauchbaren Schwingungen kleiner ist. Dagegen ist sie für die Periode T_0 größer.

Zur Bestimmung der Größe α, die nur ein Korrektionsglied gibt, genügte die Messung einer größeren Reihe von Schwingungsweiten mit Hilfe eines in halbe Millimeter geteilten Glasmaßstabes. So wurde α bis etwa auf 2 Proz. genau gefunden.

Zur endgültigen Berechnung der Größe x aus T und α dienten die Gleichungen (37) bis (37''), und zwar wurde die Elimination von k unter Annahme gleicher Wärmeaustauschskonstanten bei beiden Gefäßen durch Kombination der für beide berechneten x'-Werte ermöglicht. Dabei wurde so ver-

fahren, daß die berechneten Zahlen $\varkappa$ in ihren Mittelwerten für gleiche Drucke bei beiderlei Gefäßen in möglichst vollständige Übereinstimmung kamen.

Indessen wurde zunächst versucht, für jede der beiden Gefäßgrößen gesondert zum Ziele zu kommen. Mit Hilfe von Gleichung (38) wurde k aus den Beobachtungsgrößen berechnet und durch Einsetzen in (37''') die an $\varkappa'$ anzubringende Wärmekorrektion gefunden. Dabei fallen die k-Werte größer aus — für Luft unter Atmosphärendruck z. B. etwa $1^1/_2$ mal so groß — als die wahren Wärmeleitungskoeffizienten und für die großen Gefäße ergeben sich größere $\varkappa$-Werte als für die kleinen, sodaß erst ein noch bedeutend größeres k als das berechnete $\varkappa$ für beide Gefäßarten zur Übereinstimmung bringt. — Es ist versucht worden, die Verhältnisse zu klären durch Fallenlassen der Grenzbedingungen (27''), die verlangen, daß der Koeffizient h der äußeren Leitung unendlich ist. Indessen hat auch die Durchführung des Wärmeaustauschsproblemes für endliches h mit Berechnung der Konstanten k und h aus der auf beide Gefäßarten angewandten (38) analogen Gleichung zu keinem besseren Resultat geführt.

Auch der Versuch, einen Teil der Wärmeüberführung auf Strahlung zurückzuführen, die in erster Annäherung einen dem Unterschiede zwischen der mittleren Gastemperatur und der Wandtemperatur proportionalen Transport gibt, ist gescheitert. Dieser Wärmeaustausch fällt bei Berechnung des Strahlungskoeffizienten aus einer (38) analogen Gleichung sogar geradezu verschwindend aus, während das aus (38) berechnete k doch wenigstens teilweise die nicht durch Leitung transportierte Wärme korrigiert.

Wenn nun auch die Berechnungen der Konstanten k aus (38) und des Strahlungskoeffizienten aus der entsprechenden Gleichung naturgemäß sehr ungenau sind, es sich dabei nur um eine Schätzung der Größenordnungen handeln kann, so geht aus allem doch hervor, daß neben der Leitung zwar nicht Strahlung, wohl aber Konvektion eine wesentliche Rolle spielt, daß deren Wirkung aber nicht, wie oben angenommen ist, der Wirkung einer Vergrößerung des Wärmeleitungskoeffizienten gleichkommt. In Ermangelung irgendwelcher Gesetze über die Art und Weise der Konvektionswirkung wurden trotz

aller Bedenken die Gleichungen (37) bis (37‴) zugrunde gelegt. Von (38) wurde abgesehen. Es darf nicht übersehen werden, daß sich $\varkappa$ nach diesem Verfahren nur ungenau aus den $\varkappa'$-Werten berechnet. Bei Atmosphärendruck z. B. bedingt eine Änderung der $\varkappa'$ um nur 1 Promille eine Änderung von $\varkappa$ um schon etwa 1 Proz., und mit abnehmendem Drucke wird dieser Einfluß noch größer. Daher kann $\varkappa$ schon durch die zweifellos nicht genau erfüllte Annahme genau gleichen Wärmeaustausches bei beiden Gefäßen möglicherweise wesentlich beeinflußt werden.

Über die Beobachtungszahlen und die daraus berechneten Größen geben die Tabellen p. 288—293 Aufschluß.

4. Die Tabellen.

Jede ihrer Horizontalreihen bezieht sich auf einen bei geschlossenem Rohr angestellten Versuch. Vorangestellt sind die aus Beobachtungen mit offener Röhre zur Zeit vor Beginn bez. nach Beendigung einer Versuchsreihe gefundenen Größen T_0 und α_0, die mit $T_0^{(v)}$, $\alpha_0^{(v)}$ bez. $T_0^{(n)}$, $\alpha_0^{(n)}$ bezeichnet sind. Ihre Mittelwerte

$$\frac{T_0^{(v)} + T_0^{(n)}}{2}, \quad \frac{\alpha_0^{(v)} + \alpha_0^{(n)}}{2}$$

sind zu den Berechnungen von $\varkappa$ benutzt worden.

Die zu einem jeden Versuch gehörende Zimmertemperatur in Celsiusgraden ist mit u^0 bezeichnet. Die übrigen Bezeichnungen sind schon bisher verwandt worden: es bedeutet H den Gasdruck, $\mathfrak{V}$ das mittlere Gasvolumen $\mathfrak{V} = 2\, V_a^0 V_b^0 / (V_a^0 + V_b^0)$, T_0 und T die Schwingungsdauern bei offener und geschlossener Röhre, α_0 und α die entsprechenden Dämpfungsgrößen, und zwar die durch die Schwingungsdauern T_0 und T dividierten natürlichen logarithmischen Dekremente, $\varkappa'$ den unkorrigierten $\varkappa$-Wert, $\Delta_a \varkappa$ bez. $\Delta_k \varkappa$ die an $\varkappa'$ anzubringende Reibungs- bez. Wärmekorrektion. Außer $\varkappa$ sind ferner noch für einzelne Versuche die aus den Gleichungen (38′), (37‴) und (37), (36′) zu berechnenden *auf die Einheit bezogenen* Korrektionen angegeben, und zwar die Reibungskorrektionen $\delta_a T_0$ und $\delta_a T$ zu T_0 und T, die Wärmekorrektionen $\delta_k T$ zu T, $\delta_k \varkappa$ zu $\varkappa$ und $\delta_k^{(n)} \tau_m$ zur

1. Luft.

Die zur Füllung der Gefäße benutzte Luft wurde durch **Flaschen mit Kalilauge und konzentrierter Schwefelsäure und** durch ein mit Phosphorpentoxyd **gefülltes Rohr geleitet.**

a) Kleine Gefäße.

Für die Versuche 5 und 6 gilt: $T_0^{(v)} = 1{,}4680$ $\alpha_0^{(v)} = 0{,}0420$ $u^0 = 11{,}4^0$
$T_0^{(n)} = 1{,}4677$ $\alpha_0^{(n)} = 0{,}0414$ $u^0 = 10{,}0$

und für die übrigen: $T_0^{(v)} = 1{,}4673$ $\alpha_0^{(v)} = 0{,}0436$ $u^0 = 13{,}4$
$T_0^{(n)} = 1{,}4679$ $\alpha_0^{(n)} = 0{,}0422$ $u^0 = 13{,}6$

Nr.	H	$\mathfrak{B}$	u_0	T	α	$\varkappa'$	$-\Delta_a \varkappa$	$\Delta_k \varkappa$	$\varkappa$	$-\delta_a T$	$-\delta_k T$	$\delta_k \varkappa$	$-\delta_k^{(\eta)} \tau_m$	$-\frac{(\tau_m - \tau^0)_k}{\eta}$
1	74,71	867,6	15,5	0,9895	0,0959	1,3520	0,0089	0,0681	1,4112					
2	66	„	3	92	59	45	„	„	37	0,0080	0,0134	0,048	0,16	1,41
3	61	„	3	89	57	68	„	„	60					
4	58	„	1	96	73	40	„	„	32					
5	73,23	869,5	12,1	0,9956	51	24	0,0086	0,0680	18					
6	06	„	11,9	54	46	66	„	680	60					
7	70,26	867,6	14,9	1,0057	52	34	0,0088	697	43					
8	64,04	6	7	0313	51	1,3477	86	724	15					
9	58,43	7	13,8	0538	24	538	85	748	1,4201					
10	52,52	6	14,4	0822	23	450	83	785	1,4152					
11	47,33	6	15,5	1087	06	381	82	823	22	0,0087	0,0129	0,058	0,20	1,40
12	41,63	7	13,8	1385	0,0882	383	80	867	70					
13	35,74	7	6	1740	59	255	78	928	05					

b) Große Gefäße.

Für die Versuche 4, 5 und 6 gilt: $T_0^{(v)} = 1{,}4677$ $\alpha_0^{(v)} = 0{,}0414$ $u^0 = 10{,}0^\circ$

$T_0^{(n)} = 1{,}4682$ $\alpha_0^{(n)} = 0{,}0422$ $u^0 = 12{,}2$

Für die übrigen: $T_0^{(v)} = 1{,}4662$ $\alpha_0^{(v)} = 0{,}0433$ $u^0 =$?

$T_0^{(n)} = 1{,}4673$ $\alpha_0^{(n)} = 0{,}0436$ $u^0 = 13{,}4$

$-\delta_a T_0^{(n)} = 0{,}0102$

Nr.	H	$\mathfrak{B}$	u^0	T	α	$\varkappa'$	$-\Delta_a \varkappa$	$\Delta_k \varkappa$	$\varkappa$	$-\delta_a T$	$-\delta_k T$	$\delta_k \varkappa$	$-\delta_k^{(\eta)} \tau_m$	$-\frac{(\tau_m - \tau^0)_k}{\eta}$
1	73,58	2006,7	14,7	1,1922	0,0662	1,3638	0,0079	0,0565	1,4124					
2	73,58	„	14,7	21	670	44	„	„	30	0,0090	0,0070	0,040	0,14	0,61
3	73,57	„	14,6	20	661	53	„	„	39					
4	73,57	2008,6	12,6	22	649	69	0,0077	0,0563	55					
5	73,40	„	13,1	23	645	92	„	563	78					
6	73,13	„	11,8	39	650	38	„	562	23					
7	72,61	2006,7	15,7	48	665	44	0,0079	570	35					
8	70,14	„	15,7	1,2021	655	16	79	577	14					
9	64,04	„	15,3	204	645	68	78	594	1,4084					
10	58,48	„	15,1	364	641	17	77	614	1,4154					
11	52,61	„	15,1	553	629	1,3575	76	640	39					
12	46,40	„	13,5	761	614	44	75	664	33	0,0093	0,0059	0,047	0,16	0,61
13	40,53	„	13,6	965	609	13	74	707	46					
14	34,75	„	13,5	1,3176	598	1,3484	73	751	62					
15	29,28	„	13,2	1,3386	578	48	64	805	1,4089					

Für den Druck $H = 73{,}6$ ist $k = 0{,}00028$, $\frac{k}{k_t} = 4{,}8$.

$H = 46{,}4$ $k = 0{,}00023$, $\frac{k}{k_t} = 4{,}0$.

2. Kohlensäure.

Das Gas wurde durch Auskochen einer Lösung von reinem Natriumbikarbonat in Wasser entwickelt und mittels konzentrierter Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd getrocknet.

a) Kleine Gefäße.

$T_0^{(v)} = 1,4700$, $\alpha_0^{(v)} = 0,0882$, $u^0 = 20,0^0$.
$T_0^{(n)} = 1,4706$, $\alpha_0^{(n)} = 0,0879$, $u^0 = 20,2^0$.
$-\delta_a T_0^{(n)} = 0,0089$.

Nr.	H	$\mathfrak{B}$	u^0	T	α	$\varkappa'$	$-\Delta_a \varkappa$	$\Delta_k \varkappa$	$\varkappa$	$-\delta_a T$	$-\delta_k T$	$\delta_k \varkappa$	$-\delta_k^{(\eta)} \tau_m$	$-\frac{(\tau_m - \tau^0)_i}{\eta}$
1	75,00	868,7	21,1	1,0085	0,0694	1,2650	0,0073	0,0458	1,3035					
2	74,94	864,4	22,4	83	710	65	"	457	49					
3	94	868,7	21,3	81	688	80	"	"	64					
4	93	"	2	80	699	85	"	"	69					
5	89	864,4	22,5	80	692	88	"	"	72					
6	74	868,8	20,3	84	687	1,2700	"	"	84	0,0074	0,0094	0,034	0,15	1,07
7	64	864,4	22,2	90	703	1,2683	"	0,0456	66					
8	57	"	3	92	700	84	"	"	67					
9	66,91	868,5	21,6	1,0387	701	41	0,0072	0,0465	34					
10	60,78	5	4	0629	680	78	71	472	79					
11	57,91	4	9	0744	686	1,2700	70	477	1,3107					
12	52,29	6	20,6	1006	670	1,2650	69	486	1,3067					
13	47,26	6	7	1245	684	54	68	497	83	0,0078	0,0080	0,038	0,16	1,07
14	41,72	6	2	1528	678	59	67	511	1,3108					
15	36,51	6	3	1826	650	01	65	529	1,3065					
16	30,61	6	9	2188	688	1,2547	64	558	90					

$T_0^{(v)} = 1,4706,\quad \alpha_0^{(v)} = 0,0379,\quad u^0 = 20,2^0.$

$T_0^{(n)} = 1,4701,\quad \alpha_0^{(n)} = 0,0381,\quad u^0 = 21,0^0.$

Nr.	H	$\mathfrak{B}$	u^0	T	α	$\varkappa'$	$-\Delta_a \varkappa$	$\Delta_k \varkappa$	$\varkappa$	$-\delta_a T$	$-\delta_k T$	$\delta_k \varkappa$	$-\delta_k^{(\eta)} \tau_m$	$-\frac{(\tau_m-\tau_0)_i}{\eta}$
1	76,78	2007,8	20,0	1,1988	0,0526	1,2794	0,0066	0,0378	1,3106					
2	77	8	19,9	95	24	52	66	378	1,3064					
3	74,68	9	5	1,2047	31	72	66	379	85					
4	66	9	3	50	12	55	65	379	69	0,0080	0,0048	0,029	0,12	0,46
5	65	9	3	47	31	78	66	379	91					
6	01	8	20,3	66	11	64	65	378	77					
7	73,87	8	6	75	21	30	65	380	45					
8	80	8	6	73	21	54	65	380	69					
9	68,72	9	19,8	1,2209	15	66	65	381	82					
10	61,17	8	20,2	2427	04	32	64	387	55					
11	54,48	8	4	2627	01	27	63	392	56					
12	53,06	8	2	2669	07	37	62	395	70					
13	46,78	8	6	2870	01	11	62	401	50	0,0083	0,0037	0,031	0,13	0,46
14	40,45	8	7	3083	0,0479	1,2667	61	413	19					
15	34,13	8	4	3298	76	2701	61	429	69					
16	27,46	8	21,7	3543	76	2672	60	453	65					

Für den Druck $H = 75,0$ ist $k = 0,00031,\quad \frac{k}{k_i} = 9,0$

$H = 25,0\quad k = 0,00014,\quad \frac{k}{k_i} = 4,0.$

3. Wasserstoff.

Einer aus der Fabrik von Elkan in Berlin bezogenen **Flasche wurde elektrolytisch hergestellter Wasserstoff entnommen** und vor der Füllung der Gefäße durch Kaliumper**manganatlösung, konzentrierte Schwefelsäure und durch ein mit** Phosphorpentoxyd **gefülltes Rohr geleitet.**

a) Kleine Gefäße.

Für die Versuche 1, 2, 6, 7 gilt: $T_0^{(v)} = 1,4680$ $\alpha_0^{(v)} = 0,0433$ $u^0 = 12,6^0$

$T_0^{(n)} = 1,4687$ $\alpha_0^{(n)} = 0,0414$ $u^0 = 14,6$

Für die übrigen: $T_0^{(v)} = 1,4687$ $\alpha_0^{(v)} = 0,0414$ $u^0 = 16,6$

$T_0^{(n)} = 1,4686$ $\alpha_0^{(n)} = 0,0431$ $u^0 = 13,1$

Nr.	H	$\mathfrak{B}$	u^0	T	α	$\varkappa'$	$-\Delta_a \varkappa$	$\Delta_k \varkappa$	$\varkappa$	$-\delta_a T$	$-\delta_k T$	$\delta_k \varkappa$	$-\delta_k^{(\eta)} \tau_m$	$-\frac{(\tau_m - \tau^0)_i}{\eta}$
1	77,12	868,3	11,7	0,9925	0,1592	1,2989	0,0085	0,1279	1,4183	0,0083	0,0255	0,090	0,31	1,41
2	75,61	868,1	11,8	81	„	73	85	296	84					
3	57	867,7	13,4	86	0,1600	60	84	302	78					
4	34	8	12,4	98	0,1596	42	84	299	57					
5	32	8	14,5	92	90	77	84	299	92					
6	02	868,2	12,2	1,0003	70	70	85	302	87					
7	74,94	2	11,8	011	73	46	85	303	64					
8	71,95	867,6	14,5	123	79	29	83	342	88					
9	65,99	7	13,6	370	32	1,2835	81	415	69					
10	60,40	7	13,4	607	11	786	80	492	98		0,0265			
11	54,52	6	15,4	888	0,1455	657	78	599	78	0,0085	0,0270	0,113	0,36	1,43
12	48,57	6	14,5	1,1179	07	585	76	715	1,4224					
13	41,90	6	15,0	1,1545	0,1332	423	74	876	25					

b) Große Gefäße.

$T_0^{(v)} = 1{,}4681$, $\alpha_0^{(v)} = 0{,}0439$, $u^0 = 13{,}0^0$

$T_0^{(n)} = 1{,}4680$, $\alpha_0^{(n)} = 0{,}0433$, $u^0 = 12{,}6^0$.

$-\delta_a T_0^{(n)} = 0{,}0101$.

Nr.	H	$\mathfrak{B}$	u^0	T	α	$\varkappa'$	$-\Delta_a \varkappa$	$\Delta_k \varkappa$	$\varkappa$	$-\delta_a T$	$-\delta_k T$	$\delta_k \varkappa$	$-\delta_k^{(\eta)} \tau_m$	$-\frac{(\tau_m - \tau^0)_i}{\eta}$
1	76,74	2006,8	13,8	1,1909	0,0926	1,3185	0,0078	0,1063	1,4170	0,0091	0,0134	0,075	0,25	0,62
2	74	7	14,3	05	32	209	78	65	96					
3	65	8	13,6	13	37	172	78	64	58					
4	64	8	8	09	28	202	78	64	88					
5	63	8	5	10	32	197	78	64	83					
6	59	8	4	13	35	182	78	65	69					
7	72,81	8	3	1,2011	14	206	78	95	1,4223					
8	66,79	8	3	2194	08	103	76	0,1154	181					
9	61,02	8	5	2364	0,0872	074	76	216	214					
10	56,39	8	4	2515	65	2979	74	272	177	0,0093	0,0131	0,090	0,30	0,61
11	50,38	8	3	2711	42	2902	73	356	185					
12	44,68	8	4	2903	01	2834	72	451	213					

Für alle untersuchten Drucke ist $k = 0{,}0011$, $\frac{k}{k_i} = 2{,}8$.

Gastemperaturänderung $\tau_m - \tau^0$ bei verschwindender Dilatationsgeschwindigkeit ($d\eta/dt = 0$). Auch die Konstante k des Wärmeaustausches, ihr Verhältnis k/k_i zur wirklichen Wärmeleitfähigkeit k_i [1]) und die nach (36) berechnete Temperaturoszillation $(\tau_m - \tau^0)_i/\eta$ bei adiabatischem Vorgange, bezogen auf 1 cm Schwingungsweite, sind mitunter noch angegeben, weil auch sie zur Beurteilung der Methode dienlich sind.

Die zu $\varkappa'$ gehörenden Reibungskorrektionen $\Delta_a \varkappa$ sind neben $\Delta_k \varkappa$ von nur bescheidener Größe. Indessen beträgt die Änderung $\delta_a T_0$ der Schwingungsdauer T_0 infolge des störenden Einflusses der Reibung immerhin etwa 1 Proz. und diejenige $\delta_a T$ von T mindestens $^3/_4$ Proz. Jedoch erst ihrem Unterschiede, vervielfacht durch die der Berechnung zugrunde liegende Formel, verdankt man $\Delta_a \varkappa$.

Der die Korrektion $\Delta_k \varkappa$ oder ihren auf die Einheit bezogenen Wert $\delta_k \varkappa$ bedingende Wärmeaustausch wird durch die Temperaturkorrektion $\delta_k^{(\eta)} \tau_m$ zum Ausdruck gebracht, deren Werte aussagen, daß zu den Zeiten verschwindender Dilatationsgeschwindigkeit, wo die Quecksilberoberflächen ihre äußersten Lagen erreicht haben, bei Kohlensäure und Luft $^1/_8$ bis $^1/_5$, bei Wasserstoff sogar etwa $^1/_3$ aller durch Kompression erzeugten Wärme in die Gefäßwände hineingegangen ist. Es kann auffallen, daß neben $\delta_k^{(\eta)} \tau_m$ die Wärmekorrektion $\delta_k T$ zur Schwingungsdauer T nur klein ist und sogar für Wasserstoff bei den kleineren Gefäßen wenig mehr als $2^1/_2$ Proz. beträgt. Dazu soll bemerkt werden, daß selbst für den völlig isothermen Vorgang als Korrektion $\delta_k T$ für Wasserstoff unter Atmosphärendruck bei den kleineren Gefäßen nur etwa 8 Proz. berechnet werden. Verglichen mit $\delta_k T$ ist die dadurch hervorgerufene Korrektion $\delta_k \varkappa$ zu $\varkappa$ allerdings stark vervielfacht, immerhin aber wesentlich kleiner als die Temperaturkorrektion $\delta_k^{(\eta)} \tau_m$.

Die Zahlen k/k_i für das Verhältnis des Wärmeaustauschskoeffizienten k zur reinen Wärmeleitungskonstanten k_i gestatten in gewissem Sinne eine Vergleichung der durch Konvektion und Leitung ermöglichten Wärmetransporte. Berück-

1) Nach A. Winkelmann, Wied. Ann. **44**. p. 429. 1891.

sichtigt man, daß die Korrektion $\delta_k \varkappa$ mit $\sqrt{k}$ proportional ist, so erkennt man an den Zahlen k/k_i, daß der auf die Konvektion entfallende Anteil an $\delta_k \varkappa$ der Größenordnung nach gleich dem Anteil der reinen Wärmeleitung ist. Bei Atmosphärendruck ist ersterer nur für Wasserstoff kleiner als letzterer, während er für Luft etwa ebenso und für Kohlensäure sogar doppelt so groß ist. Wenn er jedoch auch nicht gegen den Anteil der großen Wärmeleitungswirkung des Wasserstoffs anzukommen vermag, absolut genommen ist der Konvektionsanteil an $\delta_k \varkappa$ bei Wasserstoff am größten und bei Kohlensäure am kleinsten. Die verschieden große Beweglichkeit der Teilchen der verschiedenen Gase macht es vielleicht erklärlich, daß die Zahlen k/k_i mit abnehmendem Drucke, bei Kohlensäure am stärksten, bei Wasserstoff innerhalb der untersuchten Drucke anscheinend nur unmerklich abnehmen. In gewissem Zusammenhange damit steht die verschiedene Abhängigkeit von $\delta_k T$ verschiedener Gase vom Drucke.

Die starken Konvektionswirkungen, verglichen mit der nur bescheidenen Temperaturoszillation $(\tau_m - \tau^0)_i/\eta$, die sich auf 1 cm Schwingungsweite bezieht, zeigen, daß die Konvektionsursache nicht die verschiedene Temperatur der Gasschichten sein kann, sondern in den durch die Flüssigkeitsschwingungen, die Gasdilatationen, direkt hervorgerufenen Geschwindigkeiten der Gasteilchen zu suchen ist. Die zur Beobachtung dienenden Schwingungsweiten der Quecksilberoberflächen sind zwar nur klein; um jedoch Oszillationen überhaupt hervorzurufen, ist ein starker Impuls, eine bedeutend größere Anfangsamplitude erforderlich, so daß durch die ersten Schwingungen wohl beträchtliche Strömungen im Gase hervorgerufen werden können.

Es soll noch das Interesse auf die sich aufdrängende Frage gelenkt werden, ob sich auf dem Wege einer weiteren Ausgestaltung des Experimentes eine Verminderung des Wärmeaustausches, eine Zuverlässigkeit der Resultate erreichen läßt. Soviel scheint vorhergesagt werden zu können, daß die beiden am nächsten liegenden Versuche, mit Hilfe noch größerer Gefäße, oder durch Verminderung der Temperaturleitfähigkeit a_w^2 der Gefäßwände zum Ziele zu gelangen, einen wesentlichen Vorteil nicht zu bringen vermögen. Man ist

in der Wahl der Gefäße beschränkt, denn einerseits wird nach (37') der Einfluß der Beobachtungsfehler auf $\varkappa'$ um so größer, je größer die Gefäße sind, weil dann T und T^0 um so weniger voneinander abweichen; andererseits nimmt mit abnehmender Gefäßgröße die Dämpfung zu und damit die Anzahl der benutzbaren Schwingungen ab. Aber auch dann, wenn man annimmt, daß mit Rücksicht auf den Einfluß der Beobachtungsfehler noch größere Gasmengen als die benutzten sich als brauchbar erweisen, so lassen sich damit, wie man aus den Formeln und Tabellen schließen muß, wesentlich zuverlässigere Resultate nicht finden. So sind z. B. erst Gefäße von 16 Liter Inhalt im stande, $\Delta_k \varkappa$ auf die Hälfte der für die benutzten größeren Gefäße gefundenen Korrektion, also für Luft unter Atmosphärendruck auf etwa 2 Proz. herabzudrücken. Etwa dieselbe Gefäßgröße wäre nötig, um den durch die Berechnung in $\varkappa$ eingehenden Fehler auf die Größe des ihn hervorrufenden, in $\varkappa'$ enthaltenen Fehlers zu reduzieren. Ferner müßte, um auf dem Wege einer Bekleidung der inneren Gefäßwände die Korrektion $\Delta_k \varkappa$ nur auf etwa $^2/_3$ ihrer gefundenen Beträge zu vermindern, das gewählte Material die Temperaturleitfähigkeit a^2 des Gases haben.

5. Wiederholung einiger Ergebnisse.

Assmanns Methode in derjenigen Anordnung, die von ihrem Erfinder gegeben und von Müller zu Bestimmungen der Größe $\varkappa$ angewandt worden ist, leidet unter drei zu unterscheidenden Fehlerquellen, unter dem störenden Einfluß

1. der äußeren Reibung zwischen Quecksilber und Rohrwand an den von den Spiegeln zu passierenden Rohrstellen,
2. der oberflächlichen Reibung am übrigen Rohrteil und der inneren Reibung des Quecksilbers,
3. des Wärmeaustausches zwischen dem Gas und der Gefäßwandung

auf die Oszillationen der Quecksilbermasse.

Der erste Übelstand bedingt unvollständig definierte Verhältnisse, insofern als die Schwingungen sich nicht durch eine Funktion von der Form $e^{-\alpha t} \sin \beta t$ mit konstanten Werten α und β darstellen lassen.

Die Beseitigung dieser Schwierigkeit ist gelungen durch eine Art Ölung der betreffenden Rohrstücke mit konzentrierter Schwefelsäure, die auf die Quecksilberoberflächen gegossen wurde.

Sowohl der zweite wie der dritte Übelstand äußert sich, verglichen mit dem idealen, d. h. völlig reibungslosen und adiabatischen Vorgange, in einer durch Dämpfung hervorgerufenen Vergrößerung der Schwingungsdauer. Indessen wirken Reibung und Wärmetransport auf die Größe $\varkappa$, dank einer Kombination der Schwingungsdauern bei offener und geschlossener Röhre, in entgegengesetztem Sinne ein, erstere vergrößernd, letztere verkleinernd, so daß beide sich teilweise ausgleichen.

Bei Müllers Versuchen mit Luft scheint die Kompensation der beiden Fehler, begünstigt durch eine nur geringe Rohrweite und durch die erste Fehlerquelle, ziemlich vollständig gewesen zu sein. So erklären sich seine verhältnismäßig großen Resultate.[1]

Durch Aufstellung einer Theorie der Flüssigkeitsbewegung, die den störenden Einfluß der Reibung, soweit es physikalisch erforderlich ist, berücksichtigt, ist es gelungen, den zweiten Übelstand zu überwinden. Dank der großen Weite des benutzten Rohres fallen die berechneten Reibungskorrektionen nur bescheiden aus.

---

1) Müllers verhältnismäßig kleine $\varkappa$-Werte für Kohlensäure scheinen ihre Ursache in der Beschaffenheit seines Gases zu haben, denn es muß auffallen, daß mehrere Beobachter für Luft annähernd übereinstimmende, dagegen für Kohlensäure bei nahezu gleichen Temperaturen und Drucken sehr verschiedene Resultate gefunden haben. Vielleicht liegt die Ursache in der mehr oder weniger vollständigen Trockenheit des von den verschiedenen Beobachtern benutzten Gases. Es soll dazu bemerkt werden, daß der Verfasser aus einigen bei Beginn der Arbeit mit nur mangelhaft mittels Chlorcalcium getrockneter Kohlensäure unter Atmosphärendruck angestellten Versuchen bei Benutzung der später für trockenes Gas unter demselben Druck bei denselben Gefäßen berechneten Wärmekorrektion $\Delta_k \varkappa$ nur 1,28 findet, während das gut getrocknete Gas 1,30 liefert. Es ist jedoch kein Gewicht hierauf zu legen, weil es sich nur um vereinzelte Versuche handelt, die ohne Beachtung der nötigen Vorsichtsmaßregeln angestellt wurden. Die Heranziehung der für trocknes Gas gefundenen Korrektion ist auch bedenklich.

Die Berücksichtigung des Wärmeaustausches konnte indessen, weil er sehr bedeutend ist und zum großen Teil auf Konvektion beruht, in Ermangelung mathematischer Gesetze für Konvektionswirkungen nicht zur vollen Befriedigung erledigt werden.

Wenn die Methode zur einwandfreien Bestimmung von x nicht geeignet ist, so liegt die Ursache in dem überaus großen Wärmeaustausch, und zwar namentlich an der Wärmefortpflanzung durch Konvektion.

Der Verfasser schuldet herzlichen Dank Hrn. Geheimrat Prof. Dr. W. Voigt, der ihn zur vorliegenden Arbeit angeregt, ihm seine eigenen Apparate gütigst zur Verfügung gestellt und ihn bei der Ausführung in nie ermüdendem Interesse jederzeit freundlichst unterstützt hat. Auch Hrn. Prof. Dr. W. Kaufmann ist er für die bereitwillige Förderung der Arbeit zu großem Dank verpflichtet.

Göttingen, Physik. Inst. der Univ.

(Eingegangen 5. August 1905.)

3. *Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucaultschen Pendelversuches; von A. Denizot.*[1])

Die Theorie des Foucaultschen Pendelversuches[2]) hat zuerst Binet[3]) auf gewisse Differentialgleichungen zurückgeführt, die aus allgemeineren, von Poisson[4]) entwickelten Gleichungen hervorgehen und außer der Schwere und Fadentension noch die sogenannte zusammengesetzte Zentrifugalkraft von Coriolis enthalten; mit anderen Worten, das zuerst von Foucault ausgesprochene Sinusgesetz wird theoretisch als eine Folge dieser fingierten Kraft angesehen. Mit der von Binet gegebenen, auf Prinzipien der Dynamik beruhenden Beweisführung waren zwar Liouville[5]) und Poinsot[6]) nicht einverstanden, ihren anderen, auf geometrischer Anschauung basierenden Beweis haben sie jedoch nirgends ausführlicher mitgeteilt. Seitdem sind die von Binet angewandten Differentialgleichungen allgemein als Grundlage für die Theorie des Foucaultschen Pendelversuches angenommen und der Ausgangspunkt vieler theoretischer Arbeiten in dieser Richtung geworden.

Nun zeigt einerseits eine allgemeine Theorie der Coriolisschen Kraft, auf welche doch das von Foucault beobachtete Phänomen zurückgeführt wird, daß im vorliegenden Falle mit der Änderung der Bewegungsrichtung auch der Richtungssinn der Coriolisschen Kraft geändert wird und daher die Erscheinung einer fortwährenden Drehung der Bewegungsebene des Pendels in ein und demselben Sinne so nicht erklärt werden kann. Andererseits repräsentieren die von Binet gerade ver-

1) Vgl. A. Denizot, Physik. Zeitschr. 6. p. 342. 1905.
2) L. Foucault, Compt. rend. 32. p. 135. 1851.
3) J. Binet, Compt. rend. 32. p. 157 u. 197. 1851.
4) S. D. Poisson, Journ. de l'École Polyt. 26. p. 15. 1838.
5) J. Liouville, Compt. rend. 32. p. 159. 1851.
6) L. Poinsot, Compt. rend. 32. p. 206. 1851.

nachlässigten Glieder gewisse Zentrifugalkräfte, die imstande sind, eine solche Drehung des sich bewegenden Körpers um eine gewisse Achse zu deuten und somit das von Foucault ausgesprochene Gesetz darzustellen. Auf eine Unzulänglichkeit der Binetschen Gleichungen infolge der weggelassenen Glieder hat übrigens O. Röthig[1]) bereits aufmerksam gemacht; indes sind diese unberücksichtigten Glieder bis jetzt niemals Gegenstand eines eingehenderen Studiums gewesen.

In dieser Abhandlung wird zunächst eine allgemeine Theorie der relativen Bewegung gegeben, in welcher das Theorem von Clairaut und Coriolis in einer meines Wissens in der Literatur noch nicht kekannten Art und Weise interpretiert wird; hierbei wird die fingierte „*force d'entraînement*“ in drei einzelne fingierte Kräfte zerlegt. Alsdann folgt eine Anwendung der allgemeinen Sätze auf die Bewegung eines Körpers an der Oberfläche der rotierenden Erde. Es wird gezeigt, daß man einen Teil der „force d'entraînement“ zusammen mit der Erdattraktion als die auf den Körper an dem betreffenden Orte wirkende Schwere auffassen und den anderen Teil der fingierten Hilfskraft zur theoretischen Erklärung der Drehung der Bewegungsebene eines Pendels sowie der vielfach umstrittenen südlichen Abweichung eines frei fallenden Körpers benutzen kann; gleichzeitig werden Gründe angegeben, warum die zweite, durch das Theorem von Clairaut und Coriolis gegebene Hilfskraft (*la force centrifuge composée*) die Drehung eines Pendels nicht bewirken kann.

I. Allgemeine Theorie der relativen Bewegung.

Es werde ein im Raume absolut festes $O'(x'y'z')$ und ein bewegliches Koordinatensystem $O(xyz)$ vorausgesetzt, und es soll die Bewegung eines Körpers in dem durch das bewegliche Koordinatensystem gegebenen Raume betrachtet werden. Alsdann lehrt das Theorem von Clairaut und Coriolis[2]), daß man die relative Bewegung eines Massensystems ebenso

1) O. Röthig, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **24.** p. 153. 1879.

2) Clairaut, Histoire de l'Acad. Roy. d. Sciences, Mém. de Math. et de Phys. Paris p. 1. 1742; Coriolis, Journal de l'École Polytechnique **21.** p. 268. 1832; **24.** p. 142. 1835; J. Bertrand, ibid **32.** p. 149. 1848.

wie die absolute behandeln kann, wenn man zu den auf jeden Massenpunkt tatsächlich wirkenden Kräften noch gewisse fingierte Hilfskräfte hinzufügt, nämlich 1. eine gleiche und derjenigen entgegengesetzte Kraft, welche den Massenpunkt mit dem beweglichen Koordinatensystem fest verbinden würde (*la force d'entraînement*) und 2. die zusammengesetzte Zentrifugalkraft (*la force centrifuge composée*).

§ 1. Zu irgend einer Zeit t sei nun die Lage eines Massenpunktes in bezug auf das feste und bewegliche rechtwinklige Koordinatensystem durch folgende Transformationsgleichungen gegeben:

$$(1)\quad \begin{cases} x' = x_0 + a x + b y + c z, \\ y' = y_0 + a' x + b' y + c' z, \\ z' = z_0 + a'' x + b'' y + c'' z. \end{cases}$$

Die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Anfangspunktes O des beweglichen Koordinatensystems, sowie die Cosinus a, b, c, . . . werden als bekannte Funktionen der Zeit t vorausgesetzt.

Unter Berücksichtigung der bekannten Relationen zwischen den neun Cosinus der Transformationsgleichungen (1) sowie der Substitutionen:

$$(2)\quad \begin{cases} c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt} = -b\frac{dc}{dt} - b'\frac{dc'}{dt} - b''\frac{dc''}{dt} = p, \\ a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt} = -c\frac{da}{dt} - c'\frac{da'}{dt} - c''\frac{da''}{dt} = q, \\ b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt} = -a\frac{db}{dt} - a'\frac{db'}{dt} - a''\frac{db''}{dt} = r \end{cases}$$

folgen, wie bekannt, die Relationen:

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{da}{dt} = rb - qc, & \frac{db}{dt} = pc - ra, & \frac{dc}{dt} = qa - pb, \\ \frac{da'}{dt} = rb' - qc', & \frac{db'}{dt} = pc' - ra', & \frac{dc'}{dt} = qa' - pb', \\ \frac{da''}{dt} = rb'' - qc'', & \frac{db''}{dt} = pc'' - ra'', & \frac{dc''}{dt} = qa'' - pb''. \end{cases}$$

§ 2. Die Ableitung der Bewegungsgleichungen kann in einfacher Weise mittels der Lagrangeschen Gleichungen geschehen.

Ist die lebendige Kraft der Masseneinheit

$$(4)\quad T = \tfrac{1}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2),$$

so gilt für die x-Koordinate die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) - \frac{dT}{dx} - X = 0, \tag{5}$$

wo X die von außen wirkende Kraft in Richtung der x-Koordinate bedeutet.

Werden die Transformationsgleichungen (1) nach der Zeit t differentiiert und wird dann der Ausdruck (4) gebildet, so erhält man:

$$\tag{6} \left\{ \begin{aligned} 2T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &+ \left(\frac{dx_0}{dt} + x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{dy_0}{dt} + x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{dz_0}{dt} + x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt}\right)^2 \\ +2(a\,\dot{x} + b\,\dot{y} + c\,\dot{z})&\left(\frac{dx_0}{dt} + x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt}\right) \\ +2(a'\,\dot{x} + b'\,\dot{y} + c'\,\dot{z})&\left(\frac{dy_0}{dt} + x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt}\right) \\ +2(a''\dot{x} + b''\dot{y} + c''\dot{z})&\left(\frac{dz_0}{dt} + x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt}\right). \end{aligned} \right.$$

Unter Benutzung der Beziehungen (2) und (3) folgt aus diesem Ausdruck:

$$\frac{dT}{d\dot{x}} = \dot{x} - ry + qz + a\frac{dx_0}{dt} + a'\frac{dy_0}{dt} + a''\frac{dz_0}{dt} \tag{7}$$

und

$$\tag{8} \left\{ \begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= (q^2 + r^2)x - pqy - prz + r\dot{y} - q\dot{z} \\ &\quad + \frac{da}{dt}\frac{dx_0}{dt} + \frac{da'}{dt}\frac{dy_0}{dt} + \frac{da''}{dt}\frac{dz_0}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Indem nun (7) und (8) zu Gleichung (5) vereinigt werden, ergeben sich die Bewegungsgleichungen:

$$\tag{9} \left\{ \begin{aligned} \ddot{x} = X &- \left(a\frac{d^2x_0}{dt^2} + a'\frac{d^2y_0}{dt^2} + a''\frac{d^2z_0}{dt^2}\right) \\ &+ \{(q^2 + r^2)x - pqy - prz\} - \left(z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt}\right) \\ &- 2(q\dot{z} - r\dot{y}); \end{aligned} \right.$$

analog und durch zyklische Vertauschung der Größen p, q, r sowie x, y, z erhält man die entsprechenden Gleichungen

für die Richtungen y und z. Die drei ersten Klammern auf der rechten Seite repräsentieren die erste Zusatzkraft in dem Theorem von Coriolis und das letzte Glied ist der Ausdruck für die zweite Zusatzkraft.

Im folgenden werde die Bedeutung der einzelnen, auf der rechten Seite der Gleichungen (9) stehenden Glieder näher erörtert.

§ 3. Zunächst können in den Ausdrücken

$$(10)\quad \begin{cases} X_0 = -\left(a\dfrac{d^2 x_0}{d t^2} + a'\dfrac{d^2 y_0}{d t^2} + a''\dfrac{d^2 z_0}{d t^2}\right), \\ Y_0 = -\left(b\dfrac{d^2 x_0}{d t^2} + b'\dfrac{d^2 y_0}{d t^2} + b''\dfrac{d^2 z_0}{d t^2}\right), \\ Z_0 = -\left(c\dfrac{d^2 x_0}{d t^2} + c'\dfrac{d^2 y_0}{d t^2} + c''\dfrac{d^2 z_0}{d t^2}\right) \end{cases}$$

die Glieder $d^2 x_0/d t^2$, $d^2 y_0/d t^2$, $d^2 z_0/d t^2$ als Kräfte aufgefaßt werden, die auf die im Koordinatenanfang O befindliche Masseneinheit wirken, die Ausdrücke (10) sind dann die Projektionen dieser fingierten Kräfte auf die beweglichen Achsen. Es sollen daher die Ausdrücke (10) als *die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft* bezeichnet werden.

§ 4. Um die Bedeutung der weiteren Glieder in (9) zu erkennen, vergegenwärtige man sich zunächst, daß

$$(11)\quad \begin{cases} u = q z - r y, \\ v = r x - p z, \\ w = p y - q x \end{cases}$$

die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit des mit dem beweglichen Koordinatensystem fest verbunden gedachten Punktes x, y, z um die *instantane*, durch den Koordinatenanfang O gehende *Achse* sind. Die Größen p, q, r sind also die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das bewegliche Koordinatensystem um die instantane Achse dreht; die Winkelgeschwindigkeit selbst ist

$$(12)\quad \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

wobei die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, wenn der Richtungssinn der Drehung positiv ist. Die Größen

$$\frac{p}{\omega}, \quad \frac{q}{\omega}, \quad \frac{r}{\omega}$$

sind die Richtungskosinusse der instantanen Achse zur Zeit t. Wird auf der instantanen Achse eine Strecke $\overline{OK} = \omega$ abgetragen und sind deren Projektionen auf die beweglichen Achsen OX, OY, OZ bez. gleich p, q, r, so wird durch die Strecke $\overline{OK}$ die Achse der augenblicklichen Rotation repräsentiert. Wird der Betrachtung ein Koordinatensystem, dessen $+x$-Achse nach vorn, $+y$-Achse nach rechts und $+z$-Achse nach oben geht, zugrunde gelegt, so wird einem Beobachter, der sich in der $+z$-Achse mit den Fußspitzen im Koordinatenanfang, mit dem Gesicht nach vorn befindet, der positive Drehungssinn in Richtung von rechts nach links erscheinen.

§ 5. Die Bedeutung der in der zweiten Klammer stehenden Ausdrücke in den Gleichungen (9) wird erkannt, wenn der Ausdruck für die lebendige Kraft der Rotationsbewegung des Punktes mit der Masse $m = 1$ um die instantane Achse aufgestellt wird. Mit Berücksichtigung von (11) erhält man:

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2}\{(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2\}. \tag{13}$$

Wird diese Betrachtung auf ein starres Massensystem ausgedehnt, so ist die Rotationsenergie um die instantane Achse gleich $\frac{1}{2} J\omega^2$, wo J das *Trägheitsmoment* der rotierenden Masse in bezug auf die instantane Achse ist und *das instantane Trägheitsmoment* heißen möge. Auch für einen einzigen Punkt sei daher für (13) geschrieben:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} p^2(y^2 + z^2) + \frac{1}{2} q^2(x^2 + z^2) + \frac{1}{2} r^2(y^2 + x^2) \\ - qryz - prxz - pqxy. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Werden in bezug auf diesen Ausdruck die partiellen Differentialquotienten nach den einzelnen Koordinaten gebildet, so folgt:

$$\left\{\begin{aligned} X_f &= \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial J}{\partial x} = (q^2 + r^2)x - pqy - prz, \\ Y_f &= \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial J}{\partial y} = (p^2 + r^2)y - qrz - pqx, \\ Z_f &= \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial J}{\partial z} = (p^2 + q^2)z - prx - qry. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Die rechts stehenden Ausdrücke sind dieselben, die in der zweiten Klammer der Gleichungen (9) vorkommen, und sind, wie ohne weiteres zu ersehen, die Komponenten der Zentrifugalkraft, welche durch die relative Drehung des Punktes um

die instantane Achse erzeugt wird. Die durch (15) repräsentierte Kraft möge daher *die instantane Zentrifugalkraft* der sich bewegenden Masse heißen.

Um den Sinn dieser (scheinbaren) Drehung festzustellen, möge zu irgend einer Zeit der Anfangspunkt des beweglichen Koordinatensystems mit dem des festen zusammenfallen und außerdem eine konstante Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Koordinatensystems um die instantane Achse herrschen, so bleibt von der „*force d'entraînement*" nur der durch (15) gegebene Teil übrig. Aus der Definition der letzteren folgt nun, daß die scheinbare Drehung des Massenpunktes gerade in dem entgegengesetzten Richtungssinn der absoluten Drehung des beweglichen Koordinatensystems um die instantane Achse stattfindet.

Die Ausdrücke (15) können ohne weiteres auf ein starres System von Massenpunkten ausgedehnt werden. Da durch

$$(16)\qquad \begin{cases} \xi \sum m = \sum m x, \\ \eta \sum m = \sum m y, \\ \zeta \sum m = \sum m z \end{cases}$$

die Lage ξ, η, ζ des Massenmittelpunktes des Systems definiert wird, so folgt, daß die Summe der partiellen Differentialquotienten der instantanen Rotationsenergie der gesamten Masse in bezug auf die Koordinaten der einzelnen Massenpunkte gleich den partiellen Differentialquotienten der Rotationsenergie des Massenmittelpunktes nach den einzelnen Koordinaten des letzteren ist.

§ 6. Im Anschluß hieran sollen noch zwei Beziehungen aufgestellt werden, von denen später Gebrauch gemacht wird. Werden die Gleichungen (15) der Reihe nach mit p, q, r multipliziert, so folgt nach Addition die Beziehung

$$(17)\qquad p X_f + q Y_f + r Z_f = 0,$$

d. h. — was auch ohne weiteres selbstverständlich ist — daß die instantane Zentrifugalkraft senkrecht auf der instantanen Achse steht.

Außerdem werde gesetzt:

$$(18)\qquad dJ = \frac{\partial J}{\partial x} dx + \frac{\partial J}{\partial y} dy + \frac{\partial J}{\partial z} dz.$$

Dieser Ausdruck stellt die Änderung des instantanen Trägheitsmomentes dar, während welcher die Richtung der instantanen Achse konstant bleibt. Werden alle Glieder der Gleichung (18) mit $\frac{1}{2}\omega^2$ multipliziert, so folgt, da nach (15) $\frac{1}{2}\omega^2(\partial J/\partial x), \ldots$ die Komponenten der instantanen Zentrifugalkraft des Massenpunktes x, y, z sind, für ein System von Massenpunkten:

Die Abnahme der instantanen Rotationsenergie (bei konstanter Winkelgeschwindigkeit) ist gleich der Arbeit der Zentrifugalkräfte der einzelnen Massenpunkte.

§ 7. Werden die Ausdrücke

$$(19) \qquad \frac{p}{\omega} = \sqrt{J}.\xi, \quad \frac{q}{\omega} = \sqrt{J}.\eta, \quad \frac{r}{\omega} = \sqrt{J}.\zeta,$$

sowie die Abkürzungen

$$(20) \quad \begin{cases} \Sigma m(y^2+z^2) = A, & \Sigma m(x^2+z^2) = B, & \Sigma m(x^2+y^2) = C, \\ \Sigma m yz = D, & \Sigma m xz = E, & \Sigma m xy = F \end{cases}$$

in die entsprechende, für ein Massensystem geltende Gleichung (14) eingesetzt, so lautet die Gleichung des der Zeit t entsprechenden ***instantanen Trägheitsellipsoides*** (mit dem Mittelpunkt O):

$$(21) \quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\xi\zeta - 2F\xi\eta = 1.$$

Die Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ sind keine Konstanten, da die Lage der Massenpunkte x, y, z mit der Zeit veränderlich ist. Jedem Zeitpunkt entspricht ein Trägheitsellipsoid. Man kann sich nun in jedem Zeitpunkt eine dem veränderlichen Ellipsoid entsprechende veränderliche Form der Masse zugeordnet denken, durch deren relative Drehung um die instantane Achse die Energie $\frac{1}{2}J\omega^2$ erzeugt wird.

§ 8. Der letzte Teil der ersten Zusatzkraft von Coriolis in den Gleichungen (9)

$$(22) \quad \begin{cases} X_t = -\left(z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt}\right), \\ Y_t = -\left(x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt}\right), \\ Z_t = -\left(y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt}\right) \end{cases}$$

steht in engem Zusammenhang mit der vom radius vector beschriebenen Kurve bez. Fläche, und die durch (22) gegebene

fingierte Kraft möge *die instantane Tangentialkraft* heißen. Die Ausdrücke (22) sind ohne weiteres auf ein System von diskreten Massenpunkten übertragbar und beziehen sich dann auf den Massenmittelpunkt des Systems. Dreht sich das bewegliche Koordinatensystem um die instantane Achse mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit, so fällt diese Kraft fort.

§ 9. Die in der letzten Klammer auf der rechten Seite in (9) stehenden Ausdrücke

$$(23)\qquad \begin{cases} X_c = -2(q\dot{z} - r\dot{y}), \\ Y_c = -2(r\dot{x} - p\dot{z}), \\ Z_c = -2(p\dot{y} - q\dot{x}) \end{cases}$$

sind die Komponenten *der zusammengesetzten Zentrifugalkraft*, die kurz die Coriolissche Kraft genannt werden soll.

Nach § 4 sind p, q, r die Streckenkoordinaten der die instantane Rotation repräsentierenden Achse $OK = \omega$, und denkt man sich noch die relative Geschwindigkeit $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ durch Strecken dargestellt, so sind die Ausdrücke (23) die Projektionen des doppelten Flächeninhaltes des von ω und der relativen Geschwindigkeit c gebildeten Parallelogramms; die zusammengesetzte Zentrifugalkraft ist demnach gleich

$$(24)\qquad -2\,\omega\, c \sin\vartheta,$$

wo ϑ der Winkel zwischen c und der instantanen Rotationsachse ist. Werden die Ausdrücke (23) einerseits mit $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, andererseits mit p, q, r multipliziert und die einzelnen Ergebnisse addiert, so sind die betreffenden Summen gleich Null; d. h. die Richtung der Coriolisschen Kraft steht senkrecht zur Winkelgeschwindigkeit und zur relativen Geschwindigkeit, entgegengesetzt der Richtung, in welcher die Rotation das bewegliche Koordinatensystem mit sich nimmt. Indem dasselbe Koordinatensystem wie in § 4 gewählt wird, erhält man für die Coriolissche Kraft die folgende (auch nach (23) für $p=0$, $q=0$, $r=\omega$ und § 4 sich ergebende) Regel:

Denkt man sich einen Beobachter senkrecht zu der aus c und ω sowie deren Richtungen gebildeten Dreiecksfläche mit den Fußspitzen im Schnittpunkt $(\omega\, c)$ stehend und mit dem Gesicht nach dem Winkel $(\omega\, c)$ gewendet, so ist zur Linken ω und zur Rechten c zu denken, und die Coriolissche Kraft

wirkt in der Richtung von den Fußspitzen nach dem Kopf des Beobachters.

Für ein aus diskreten Massenpunkten bestehendes System gelten gleichfalls die Ausdrücke (23), wenn unter x, y, z die Koordinaten des Massenmittelpunktes verstanden werden.

§ 10. Mit Berücksichtigung der Bezeichnungen (10), (15), (22) und (23) lauten nun die allgemeinen Bewegungsgleichungen:

$$(25) \qquad \begin{cases} m\ddot{x} = X + X_0 + X_f + X_t + X_c, \\ m\ddot{y} = Y + Y_0 + Y_f + Y_t + Y_c, \\ m\ddot{z} = Z + Z_0 + Z_f + Z_t + Z_c. \end{cases}$$

Hiernach nehmen die Bewegungsgleichungen für die relative Bewegung dieselbe Form wie für die absolute Bewegung an, wenn zu den *wirklichen* äußeren Kräften X, Y, Z noch die folgenden *fingierten* Kräfte hinzugefügt werden:

1. die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft X_0, Y_0, Z_0;
2. die instantane Zentrifugalkraft X_f, Y_f, Z_f;
3. die instantane Tangentialkraft X_t, Y_t, Z_t;
4. die Coriolissche Kraft X_c, Y_c, Z_c.

§ 11. Aus vorstehenden Bewegungsgleichungen (25) kann man leicht das *Prinzip der lebendigen Kraft* ableiten. Werden zunächst die für einen einzelnen Punkt genommenen Gleichungen (25) der Reihe nach mit $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ multipliziert, ferner die Beziehung (18) beachtet, sowie für das Quadrat der relativen Geschwindigkeit eines einzelnen Punktes

$$(26) \qquad c^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

gesetzt, so ergibt sich durch Erweiterung der Betrachtung auf ein System von Massenpunkten:

$$(27) \qquad \begin{cases} d(\Sigma \tfrac{1}{2} m c^2) - \tfrac{1}{2}\omega^2 dJ = \Sigma\{(X + X_0 + X_t)dx + (Y + Y_0 + Y_t)dy \\ \qquad\qquad + Z + Z_0 + Z_t)dz\}. \end{cases}$$

Die Änderung der gesamten Energie erscheint hier als die Differenz der Änderung der relativen lebendigen Kraft $\Sigma \frac{1}{2} m c^2$ und der durch $\frac{1}{2}\omega^2 dJ$ gegebenen Änderung der instantanen Rotationsenergie. Man hat sich demnach in jedem Augenblick die durch die in der relativen Bahn erfolgte Translation der Masse erzeugte Energie im Betrage von $\Sigma \frac{1}{2} m c^2$ und die durch die relative Rotation der Masse um die instantane

Achse erzeugte Energie im Betrage von $\frac{1}{2} J \omega^2$ zu denken, und zwar hat man sich vorzustellen, daß diese relative Rotation gerade in entgegengesetztem Sinne vor sich geht wie die absolute Rotation des beweglichen Achsensystems.

Die dieser Änderung der Energie äquivalente Arbeit setzt sich zusammen aus folgenden Arbeiten: 1. der wirklichen auf das System wirkenden äußeren Kraft; 2. der fingierten auf den Koordinatenanfang wirkenden Kraft; 3. der fingierten Tangentialkraft. Diese dritte Arbeit fällt jedoch fort, wenn das bewegliche Koordinatensystem sich um die instantane Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht, und zu bemerken ist noch, daß die Coriolissche Kraft keinen Beitrag zur Arbeit liefert.

II. Anwendungen.

§ 12. Die vorstehenden allgemeinen Sätze für relative Bewegung sollen nun auf die Bewegung eines Körpers an der Oberfläche der Erde angewandt werden, und zwar speziell auf den Foucaultschen Pendelversuch und die östliche sowie südliche Abweichung eines frei fallenden Körpers. Dabei wird nur die Rotation der Erde um ihre Achse berücksichtigt, dagegen der Einfluß der Translation der Erdkugel vernachlässigt.

P sei ein Ort auf der nördlichen Hemisphäre. Der feste Koordinatenanfang sei der Mittelpunkt der Erdkugel; die z'-Achse falle mit der Erdachse zusammen und sei nach dem Nordpol gerichtet; die x'- und die y'-Achse sollen in der Äquatorebene liegen, und zwar sei die erste in einer als Anfangslage gedachten Meridianebene, die zweite senkrecht zur letzteren und links gelegen, wenn längs $O'z'$ ein Beobachter gedacht wird, der zu seiner Rechten die x'-Achse hat. Lotrecht über dem Orte P sei der Koordinatenanfang des beweglichen Achsensystems; die x-Achse sei die Schnittlinie der durch O gelegten Horizontalebene mit der Meridianebene und nach Norden gerichtet (parallel der Tangente in P an den Meridiankreis); die y-Achse liege in der Horizontalebene durch O und sei nach Osten gerichtet; die z-Achse endlich falle in die Richtung des Lotes.

Es sei noch $O'(x_1, y_1, z_1)$ ein mit der Erde fest verbundenes Hilfskoordinatensystem, das zu Anfang mit dem absolut festen Koordinatensystem $O'(x', y', z')$ zusammenfällt.

Es bedeuten: φ die geographische Breite des Ortes P; ω die konstante Winkelgeschwindigkeit der Erde; h und k die Entfernungen des Koordinatenanfanges O von der Erdachse bez. Äquatorebene.

§ 13. Zwischen dem festen Koordinatensystem $O'(x', y', z')$ und dem Hilfskoordinatensystem $O'(x_1, y_1, z_1)$ gelten die Transformationsgleichungen:

$$(28)\qquad \begin{cases} x' = x_1 \cos\omega t - y_1 \sin\omega t, \\ y' = x_1 \sin\omega t + y_1 \cos\omega t, \\ z' = z_1 . \end{cases}$$

Ferner herrschen zwischen dem Hilfskoordinatensystem $O'(x_1, y_1, z_1)$ und dem beweglichen Koordinatensystem $O(x, y, z)$ die Beziehungen:

$$(29)\qquad \begin{cases} x_1 = h - x \sin\varphi - z \cos\varphi, \\ y_1 = y, \\ z_1 = k + x \cos\varphi - z \sin\varphi . \end{cases}$$

Werden die Ausdrücke (29) in (28) eingesetzt, so erhält man die Beziehungen zwischen dem festen Koordinatensystem $O'(x', y', z')$ und dem beweglichen Koordinatensystem $O(x, y, z)$:

$$(30)\qquad \begin{cases} x' = h \cos\omega t - x \sin\varphi \cos\omega t - y \sin\omega t - z \cos\varphi \cos\omega t, \\ y' = h \sin\omega t - x \sin\varphi \sin\omega t + y \cos\omega t - z \cos\varphi \sin\omega t, \\ z' = k \qquad + x \cos\varphi \qquad\qquad - z \sin\varphi . \end{cases}$$

§ 14. Werden nun mittels der in diesen Transformationsgleichungen vorkommenden Richtungskosinusse die Ausdrücke (2) gebildet, so erhält man für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Koordinatensystems um die instantane Achse:

$$(31)\qquad \begin{cases} p = \omega \cos\varphi, \\ q = 0, \\ r = -\omega \sin\varphi . \end{cases}$$

Hieraus folgt, daß die durch O gehende instantane Achse stets parallel der Erdachse verläuft, also eine Gerade ist, die vom Koordinatenanfang nach dem Polarstern gerichtet ist. Die Richtung dieser Achse ist gegeben durch

(32) $$\frac{p}{\omega} = \cos\varphi, \quad \frac{q}{\omega} = 0, \quad \frac{r}{\omega} = -\sin\varphi.$$

Nun dreht sich das bewegliche, mit der Erde fest verbundene Koordinatensystem im Sinne Nord über West; für einen mit dem Koordinatensystem fest verbundenen Beobachter dreht sich daher nach § 5 der sich bewegende Körper in entgegengesetztem Sinne, also im Sinne Nord über Ost, wie der Zeiger einer Uhr; durch diese relative Drehung des Körpers wird die Energie $\frac{1}{2} J\omega^2$ erzeugt.

§ 15. Die auf den Körper von außen wirklich wirkenden Kräfte sollen getrennt werden in

1. die Erdattraktion mit den Komponenten X, Y, Z;

2. andere äußere Kräfte Ξ, H, Z, wie z. B. Luftwiderstand u. a. Speziell im Falle des Foucaultschen Pendels soll hierunter die Tension R des Fadens verstanden werden, an dem der Pendelkörper befestigt ist; bezeichnet l die Länge des im Koordinatenanfang O aufgehängten Fadenpendels, so ist

$$\Xi = -R\frac{x}{l}, \quad \mathrm{H} = -R\frac{y}{l}, \quad \mathrm{Z} = -R\frac{z}{l},$$

und als Bedingungsgleichung tritt noch hinzu:

(33) $$x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

§ 16. *Die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft* erhält man aus der Lage des Koordinatenanfanges:

34) $$x_0 = h\cos\omega t, \quad y_0 = h\sin\omega t, \quad z_0 = k,$$

woraus unter Benutzung von (10) folgt:

(35) $$\begin{cases} X_0 = -\omega^2 h\sin\varphi, \\ Y_0 = 0, \\ Z_0 = -\omega^2 h\cos\varphi. \end{cases}$$

Diese fingierte Kraft ist, wie man sieht, die im Koordinatenanfang an der Einheit der Masse angebrachte Zentrifugalkraft, die infolge der Rotation der Erde um ihre Achse erzeugt wird.

§ 17. Für die Komponenten der durch die relative Drehung des Körpers um die instantane Achse erzeugten *Zentrifugalkraft* erhält man nach (15) unter Benutzung von (31):

$$(36) \quad \begin{cases} X_f = \omega^2 (x \sin\varphi + z \cos\varphi) \sin\varphi\,, \\ Y_f = \omega^2 y\,, \\ Z_f = \omega^2 (x \sin\varphi + z \cos\varphi) \cos\varphi\,. \end{cases}$$

Diese fingierte Kraft stellt dar eine fortwährende, in ein und demselben Sinne, nämlich im Sinne Nord über Ost (vgl. § 14) um die instantane Achse erfolgende (scheinbare) Drehung des Körpers; die Bedeutung dieser Kraft soll noch weiter unten erörtert werden.

§ 18. Für die *Coriolissche Kraft* ergibt sich nach (23) und (31):

$$(37) \quad \begin{cases} X_c = -\,2\,\omega \dot{y} \sin\varphi\,, \\ Y_c = \,2\,\omega (\dot{x} \sin\varphi + \dot{z} \cos\varphi)\,, \\ Z_c = -\,2\,\omega \dot{y} \cos\varphi\,. \end{cases}$$

Die Richtung dieser Kraft erhält man nach der in § 9 erwähnten Regel.

§ 19. Die instantane Tangentialkraft fällt wegen konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in diesem Falle fort, und es ergeben sich für einen mit der Masse $m = 1$ sich bewegenden Punkt nach (25) die folgenden allgemeinen Bewegungsgleichungen:

$$(38) \quad \begin{cases} \ddot{x} = X - \omega^2 h \sin\varphi + \omega^2 (x \sin\varphi + z \cos\varphi) \sin\varphi \\ \qquad\qquad - 2\,\omega \dot{y} \sin\varphi + \Xi\,, \\ \ddot{y} = Y \qquad\qquad + \omega^2 y \\ \qquad\qquad + 2\,\omega (\dot{x} \sin\varphi + \dot{z} \cos\varphi) + H\,, \\ \ddot{z} = Z - \omega^2 h \cos\varphi + \omega^2 (x \sin\varphi + z \cos\varphi) \cos\varphi \\ \qquad\qquad - 2\,\omega \dot{y} \cos\varphi + Z\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stimmen mit den von Poisson[1]) für die Bewegung eines Körpers an der Erdoberfläche entwickelten Gleichungen überein, wenn unter Ξ, H, Z die Komponenten des Luftwiderstandes verstanden werden und das Koordinatensystem entsprechend geändert wird.

1) S. D. Poisson, l. c.

Die fingierte, *auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft* (35) ist, wie in § 16 hervorgehoben, gleich der aus der Rotation der Erde entspringenden Zentrifugalkraft des mit der Erde fest verbundenen Koordinatenanfanges O, und man kann offenbar die Ausdrücke

$$(39) \qquad \begin{cases} X + X_0 = X - \omega^2 h \sin\varphi, \\ Y + Y_0 = Y, \\ Z + Z_0 = Z - \omega^2 h \cos\varphi \end{cases}$$

als die Komponenten der an dem Orte P vorhandenen *Schwere* ansehen.

Hiernach ist die Schwere die Resultante aus der Erdattraktion und der auf den Koordinatenanfang wirkenden Kraft.

Der Einfachheit halber kann man noch die weitere Annahme machen, daß die Schwere g nach der Vertikalen des Ortes gerichtet sei; man kann also setzen:

$$(40) \qquad X - \omega^2 h \sin\varphi = 0, \quad Y = 0, \quad Z - \omega^2 h \cos\varphi = g.$$

§ 20. Wegen eines möglichen Mißverständnisses sei hierbei folgendes erwähnt: Unabhängig von der in der Abhandlung gegebenen Interpretation könnte man die mit ω^2 verbundenen Glieder noch anders deuten. Es sind nämlich

$$\{h - (x \sin\varphi + z \cos\varphi)\} \sin\varphi, \quad y, \quad \{h - (x \sin\varphi + z \cos\varphi)\} \cos\varphi$$

die Projektionen der Entfernung des Punktes x, y, z von der Erdachse, und daher repräsentieren die ganzen mit ω^2 verbundenen Glieder in den Gleichungen (38) formell die Zentrifugalkraft der unter dem Einfluß der Erdattraktion im Raume sich bewegenden Masseneinheit. Hieraus ist aber noch nicht zu schließen, daß die mit ω^2 und den Variablen x, y, z verbundenen Glieder zur Schwere hinzugefügt werden müssen. Für einen mit der Erde *starr* verbundenen Körper ergibt sich aus der Rotation der Erde ein zentrifugaler Trägheitswiderstand, um den die Erdattraktion geschwächt wird, und die Resultante beider ist die auf den Körper wirkende „Schwere“. *Bewegt sich* aber ein Körper im Raume über der Erdoberfläche, so wirkt auf ihn, sofern keine anderen Kräfte in Betracht kommen, nur die Erdattraktion (die reine Gravitation). Da in diesem Falle zwischen der Erde und dem Körper keine

materielle Verbindung besteht, so kann doch die Rotation der Erde dem Körper während seiner Bewegung keine besondere Geschwindigkeit erteilen, und daher kann auch von einer Zentrifugalkraft als einer auf den sich bewegenden Körper in jedem Punkte seiner Bahn wirkenden Ursache nicht die Rede sein. Deswegen können auch die variablen mit $\omega^2 x, \omega^2 y, \omega^2 z$ verbundenen Glieder der Gleichungen (38) nicht mit der Erdattraktion zusammen zur „Schwere“, als einer auf den Körper wirkenden Bewegungsursache vereinigt werden. Eine solche Kombination würde überdies im Widerspruch mit der Bestimmung der Schwere mittels des Sekundenpendels sein, wobei die Schwere an einem gewissen Orte und in einer gewissen Höhe über dem Meeresspiegel eine Konstante und nicht eine Variable der einzelnen Lagen des schwingenden Pendels ist.

Den durch (35) gegebenen konstanten, mit der Erdattraktion zur „Schwere“ vereinigten Gliedern kann man noch eine andere Bedeutung beilegen.

Um dabei ein Beispiel vor Augen zu haben, denken wir an den freien Fall eines Körpers. Im Moment des Loslassens besitzt der Körper eine von der Rotation der Erde herrührende seitliche Geschwindigkeit, und die Bewegung des Körpers wird durch zwei Ursachen bestimmt, nämlich durch die Erdattraktion und diese Geschwindigkeit. Ist nun x_0, y_0, z_0 der Anfangspunkt der Bewegung, so sind an einem Orte mit der geographischen Breite φ die Komponenten dieser Geschwindigkeit

$$\omega(h - x_0 \sin\varphi + z_0 \cos\varphi) \sin\varphi\,, \quad \omega y_0\,,$$
$$\omega(h - x_0 \sin\varphi + z_0 \cos\varphi) \cos\varphi\,.$$

Im Verhältnis zu der Entfernung h des Körpers von der Erdachse können die konstanten, mit x_0, y_0, z_0 verbundenen Glieder vernachlässigt werden, und es entspricht dieser Geschwindigkeit die von dem Körper ausgeübte Zentrifugalkraft:

$$\omega^2 h \sin\varphi\,, \quad 0\,, \quad \omega^2 h \cos\varphi\,,$$

um welche die Erdattraktion vermindert wird.

Wird dieses Ergebnis mit der von uns definierten Schwere (39) erglichen, so sehen wir, daß diese Schwere gleichbedeutend ist mit den beiden Ursachen, durch welche die Bewegung des Körpers bestimmt ist, nämlich der Erdattraktion (reinen Gravi-



tation) und der dem Körper im ersten Moment der Bewegung durch die rotierende Erde erteilten Geschwindigkeit.

Indem also der eine Teil der „force d'entraînement“, „die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft“, mit der Erdattraktion zusammen die auf den Körper von außen wirkende „Schwere“ bildet, erhält der andere Teil der ersten Coriolisschen Hilfskraft die Bedeutung einer besonderen Kraft, der „instantanen Zentrifugalkraft“, die infolge der scheinbaren Drehung des Körpers um die instantane Achse auftritt.

Die allgemeinen, für die Bewegung eines Körpers an der Oberfläche der rotierenden Erde geltenden Gleichungen (38) werden erhalten, wenn zu der Schwere neben anderen äußeren Kräften noch die instantane Zentrifugalkraft und die Coriolissche Kraft hinzugefügt werden.

§ 21. *Prinzip der lebendigen Kraft.* Von den wirklichen äußeren Kräften möge auf einen sich an der Erdoberfläche frei bewegenden Körper nur die Erdattraktion wirken; im Falle des Foucaultschen Pendels ist noch zu beachten, daß

$$(41)\qquad \Xi\, dx + \mathrm{H}\, dy + \mathrm{Z}\, dz = 0$$

ist. Alsdann ergibt sich nach Gleichung (27) für die betrachteten Probleme:

$$(42)\quad d(\Sigma \tfrac{1}{2} m c^2 - \tfrac{1}{2} J\omega^2) = \Sigma\{(X+X_0)dx+(Y+Y_0)dy+(Z+Z_0)dz\}.$$

D. h.: *Die Abnahme der gesamten lebendigen Kraft, die sich aus der Differenz der relativen lebendigen Kräfte der fortschreitenden und der um die instantane Achse rotierenden Bewegung des Körpers zusammensetzt, ist gleich der vom Körper unter dem Einfluß der Schwere geleisteten Arbeit.*

§ 22. Wir kommen auf die durch (36) gegebenen Glieder der allgemeinen Gleichungen zurück; sie sind gleich den partiellen Differentialquotienten der instantanen Rotationsenergie in bezug auf die einzelnen Koordinaten. Wird (32) in (14) eingeführt, so ergibt sich unter Benutzung der Abkürzungen (20) für das *instantane Trägheitsmoment*:

$$(43)\qquad J = A\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi + 2\,E\sin\varphi\cos\varphi,$$

und wird ferner auf der instantanen Achse die Strecke

$$OJ = \frac{1}{\sqrt{J}}$$

abgetragen, so sind deren Projektionen auf die einzelnen Achsen:

$$(44) \qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{J}} \cos \varphi, \quad \eta = 0, \quad -\zeta = \frac{1}{\sqrt{J}} \sin \varphi .$$

Werden diese Ausdrücke in (43) eingeführt, so ergibt sich für *das instantane Trägheitsellipsoid* die Gleichung:

$$(45) \qquad A\xi^2 + C\zeta^2 - 2E\xi\zeta = 1 .$$

Das Trägheitsellipsoid artet also in eine Ellipse aus. Nach § 7 kann man demnach einen Teil der Erscheinung auf eine um die instantane Achse mit der Winkelgeschwindigkeit der Erde sich im Sinne Nord über Ost drehende, mit der Masse des Körpers belegte *Ebene* zurückführen, die in jedem Augenblick ihre geometrische Form ändert und infolge ihrer (relativen) Drehung zur Zeit t die Energie $\frac{1}{2} J\omega^2$ besitzt.

§ 23. Diese relative (scheinbare) Drehung ist, wie man am einfachsten aus dem Prinzip der lebendigen Kraft erkennt, ganz unabhängig von den von außen wirkenden Kräften; zu der auf den Körper wirkenden Schwerkraft können noch andere Kräfte hinzutreten, wie die erdmagnetische Kraft, der Luftwiderstand. Zu der unter dem Einflusse der Schwere geleisteten Arbeit treten noch die Arbeiten dieser anderen Kräfte hinzu; es kann die relative Geschwindigkeit c und das Trägheitsmoment J eine Änderung erfahren; aber das durch das Glied $\frac{1}{2} J\omega^2$ charakterisierte Phänomen bleibt in jedem Falle erhalten, so daß die Drehung des Körpers um die instantane Achse von irgendwelchen äußeren Kräften überhaupt ganz unabhängig ist.

§ 24. Wird diese hier hervorgehobene Rotation auf die Komponente nach der z-Achse, d. h. in diesem Falle auf die Vertikale des Ortes P bezogen, so kann man auch sagen:

Für einen an einem Orte P unter der geographischen Breite φ der nördlichen Hemisphäre sich befindenden Beobachter wird ein Teil des durch die hier in Betracht kommenden Bewegungsgleichungen gegebenen Phänomens dadurch charakterisiert, daß sich der Körper in seiner relativen Bewegung um die *Vertikale* mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin \varphi$ in der Richtung von Nord über Ost dreht.

Dieses Phänomen findet bei jeder Bewegung eines Körpers an der Oberfläche der Erde statt. Die bekannte Erscheinung beim Foucaultschen Pendelversuch, die Drehung der Schwingungsebene, findet auf diese Weise eine einfache Darstellung.

Aber das hier erwähnte, auf fingierte scheinbare Zentrifugalkräfte zurückgeführte Gesetz, in welchem die Tatsache, daß die Bewegungsebene im absoluten Raum erhalten bleibt, zum Ausdruck gelangt, ist allgemeinerer Natur als das zuerst von Foucault für ein schwingendes Pendel ausgesprochene Sinusgesetz. Am Äquator ($\varphi = 0^0$), wo

$$X_f = 0\,, \quad Y_f = \omega^2 y\,, \quad Z_f = \omega^2 z$$

ist, findet um die Vertikale keine Drehung des Körpers statt, wohl aber um die instantane Achse, die hier mit der parallel zur Erdachse gehenden x-Achse zusammenfällt; diese scheinbare Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω ist entgegengesetzt der absoluten Drehung der Erde, also von Osten über den Ort nach Westen. Am Nordpol ($\varphi = 90^0$) verschwindet *die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft* und die *force d'entraînement* reduziert sich nur zu der *instantanen Zentrifugalkraft*:

$$X_f = \omega^2 x\,, \quad Y_f = \omega^2 y\,, \quad Z_f = 0\,.$$

Die instantane Achse fällt mit der z-Achse zusammen und durch diese fingierte Zentrifugalkraft wird die scheinbare Drehung der Bewegungsebene des Körpers um die Erdachse, und zwar im umgekehrten Sinne der Erddrehung erklärt.

§ 25. Diesen allgemeinen Auseinandersetzungen sei noch eine kurze Betrachtung des Vorganges beim Foucaultschen Pendelversuch hinzugefügt. Im Moment des Abbrennens des Fadens, wo das Pendel noch fest mit der Erde verbunden ist, besitzt es infolge der Erdrotation eine besondere Geschwindigkeit; diese bestimmt dann zusammen mit der Erdattraktion die wirkliche Bewegung des Pendelkörpers auf der Peripherie einer durch den Aufhängungspunkt des Pendels gehenden Kreisebene (bez. beim sphärischen Pendel auf einer glatten Kugeloberfläche), d. h. die wirkliche Bewegung geschieht nach dem im § 20 Gesagten unter dem Einfluß der „Schwere“.

Während der Bewegung findet eine scheinbare Drehung des Pendelkörpers um die Vertikale mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin \varphi$ statt, und zwar im Sinne Nord über Ost, gleichgültig, nach welcher Seite das Pendel schwingt. In den Umkehrpunkten, wo allein die instantane Zentrifugalkraft auftritt, wird diese Drehung am größten sein, und gerade diese Stellen sind für den Versuch maßgebend; dagegen wird beim Durchgang durch die Vertikale keine Drehung stattfinden. Die Frage nach der Amplitude der Schwingung hat hier gar keine Bedeutung.

§ 26. Der bisherigen, zuerst von Binet[1]) gegebenen Theorie des Foucaultschen Pendelversuches sind Differentialgleichungen zugrunde gelegt, welche außer der Schwere und Fadentension nur noch die Coriolissche Kraft enthalten; auf diese Weise wird die Drehung der Schwingungsebene dieser fingierten Kraft zugeschrieben. Folgende Überlegung zeigt jedoch, daß durch diese Kraft eine Drehung der Schwingungsebene in einem und demselben Sinne nicht erklärt werden kann. Denken wir uns, daß sich das im Anfangspunkt unseres Koordinatensystems befestigte Fadenpendel z. B. in der Meridianebene nach Norden hin bewege; dann wirkt nach der in § 9 erwähnten Regel, da zur Linken die Achse der Rotation des beweglichen Koordinatensystems, zur Rechten die relative Geschwindigkeit des Körpers liegen soll, die Coriolissche Kraft nach *Osten.* Wenn nun das Pendel nach der entgegengesetzten Seite, also nach Süden, schwingt, dann wirkt die Coriolissche Kraft, da die Achse der Drehung des beweglichen Koordinatensystems stets parallel der Erdachse nach dem Polarstern gerichtet bleibt, nunmehr entgegengesetzt wie vorhin (nach *Westen*), und man sieht, daß man bei dem Foucaultschen Pendelversuch die in einem und demselben Sinne erfolgende gleichmäßige Drehung der Schwingungsebene durch die Coriolissche Kraft nicht erklären kann. Vielleicht wird man auf diese fingierte Kraft gewisse Störungen zurückführen können; sie wird die Tendenz haben, die Drehung das eine Mal zu begünstigen, das andere Mal zu verhindern. Zu Anfang und gegen Ende einer Schwingung erreicht die Coriolissche Kraft

1) J. Binet, l. c.

ihr Minimum, beim Durchgang durch die Vertikale, wo die Geschwindigkeit des Pendels am größten ist, ihr Maximum. Auch dieser Umstand spricht gegen die bisherige Theorie; denn hierdurch kann die schleifenartige Spur beim Foucaultschen Pendelversuch nicht erklärt werden. Ob überhaupt eine Wirkung der Coriolisschen Kraft in diesem Falle auftritt, ist sehr zu bezweifeln; Poisson[1]) sagt von dieser Kraft: „En calculant cette dernière force, ou trouve qu'elle est trop petite pour écarter sensiblement le pendule de son plan, et avoir aucune influence appréciable sur son mouvement."

Die üblichen, für unendlich kleine Schwingungen auf Grund der Binetschen Gleichungen gemachten Näherungsrechnungen gelten nur für einen Teil der unendlich kleinen Schwingung und können weiter nichts ergeben als die Richtung der während dieses Teiles der unendlich kleinen Schwingung vorhandenen Coriolisschen Kraft, die bei Umkehr der Bewegungsrichtung die entgegengesetzte Richtung annimmt. Die Unrichtigkeit des gewöhnlichen elementaren Beweises der „Unveränderlichkeit der Schwingungsebene", „der kaum für eine unendlich kleine Zeit und höchstens dafür allein gültig ist", hebt besonders Röthig[2]) hervor, doch scheint dieses wenig Beachtung gefunden zu haben.

§ 27. Im folgenden sei noch ein anderes Beispiel erwähnt, bei dem die scheinbare Drehung der Bewegungsebene in Frage kommt.

Wie bekannt, findet bei einem frei fallenden Körper eine Abweichung nach Osten statt, und man sagt, daß der fallende Körper dem Fußpunkt der durch die Anfangslage des Körpers gelegten Vertikalen voranläuft. Diese östliche Abweichung kann nun als Folge der relativen Bewegung, und zwar auf die Wirkung der fingierten Coriolisschen Kraft zurückgeführt werden. Die relative Geschwindigkeit ist in diesem Falle vertikal nach unten, die instantane Achse der Rotation des mit dem Beobachter fest verbundenen beweglichen Koordinatensystems vom Koordinatenanfang, dem Anfangspunkt der Bewegung, nach dem Polarstern gerichtet, die Coriolissche Kraft

1) S. D. Poisson, l. c. p. 24.
2) O. Röthig, l. c. p. 155.

wirkt daher nach Osten. Streng genommen, ist die relative Geschwindigkeit vertikal nach unten nur in dem Anfangspunkt der Bewegung gerichtet; wenn aber die östliche Deviation bereits eingetreten ist, so fällt die relative Bahn des Körpers nicht mehr mit der Vertikalrichtung zusammen und die Corolissche Kraft wirkt nicht mehr genau nach Osten, sondern es tritt eine kleine Komponente nach Süden auf. Auf diese von Gauss[1]), Poisson[2]) u. a. berechnete Komponente hat man die namentlich von Hook[3]), Guglielmini[3]), Benzenberg[4]) und Reich[5]) wenn nicht bewiesene, so doch behauptete Abweichung nach Süden zurückführen wollen.

Unabhängig von dieser kleinen Komponente kann die südliche Abweichung noch in dem hier beschriebenen Foucaultschen Phänomen, d. h. in der scheinbaren Drehung der Bewegungsebene im Sinne Nord über Ost gesucht werden. Da aber die Fallzeit nur wenige Sekunden beträgt, so dürfte es kaum gelingen, diese scheinbare Drehung des frei fallenden Körpers um die instantane Achse experimentell wirklich zu beweisen. Der von Reich zwar angegebene, doch keineswegs als sicher hingestellte Wert von etwa 4 mm ist für die hier in Frage kommende südliche Abweichung gewiß zu groß. Diese Abweichung würde einer Drehung „der ebenen Masse“ um die Vertikale um ca. 8° in 6 Sek. entsprechen, d. h. um denjenigen Winkel, den ein Foucaultsches Pendel in Freiberg i. S. in $^3/_4$ Stunden beschreiben würde. In 6 Sek. beschreibt das Pendel in den Breitengraden von 50° einen Winkel von etwa 0,02°, d. i. in Bogenmaß ausgedrückt, gleich 0,00035; wird diese Abweichung auf einen Bogen, dessen Radius gleich der von Reich beobachteten östlichen Abweichung von 28,4 mm ist, bezogen, so erhält man für die südliche Abweichung etwa 0,01 mm; dieser Wert ist zwar doppelt so groß als der von

---

1) C. F. Gauss, Werke V. Bd. p. 495. Göttingen 1877.

2) S. D. Poisson, l. c.

3) Vgl. J. F. Benzenberg, Versuche über das Gesetz des Falles etc. Düsseldorf 1804.

4) J. F. Benzenberg, l. c.; ferner Versuche über die Umdrehung der Erde. Düsseldorf 1845.

5) F. Reich, Fallversuche etc. Freiberg 1832; Pogg. Ann. **29** p. 494. 1833.

der kleinen südlichen Komponente der Coriolisschen Kraft herrührende, liegt aber doch ganz im Bereich der Beobachtungsfehler.[1]) — Beim Foucaultschen Pendelversuch kann die Bewegungszeit des Körpers beliebig verlängert und daher auch die scheinbare Drehung des Körpers um die instantane Achse durch das Experiment festgestellt werden.

Mit vorliegenden Betrachtungen hängen noch andere Probleme eng zusammen, wie der Wurf nach oben, der Seitendruck der Eisenbahnzüge auf die Schienen u. a.

§ 28. Das in der Abhandlung Gesagte kann man kurz folgendermaßen zusammenfassen: Die allgemeine Theorie der relativen Bewegung führt die Erscheinungen auf gewisse fingierte Kräfte zurück. Bei dem Problem der Bewegung eines Körpers an der Oberfläche der rotierenden Erde erhält man in bezug auf ein mit der Erde sich drehendes Koordinatensystem die Bewegungsgesetze, wenn zu den *wirklichen* auf den Körper wirkenden Kräften noch die folgenden *fingierten* Kräfte hinzugefügt werden:

1. Die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft, die gleich der aus der Rotation der Erde um ihre Achse entspringenden Zentrifugalkraft ist und mit der Erdattraktion zusammen die auf den Körper wirkende Schwere bildet.

2. Eine bisher nicht beachtete besondere Zentrifugalkraft, die von der eben erwähnten vollständig zu trennen ist und aus einer scheinbaren Drehung des sich bewegenden Körpers um eine durch den Beobachtungsort parallel zur Erdachse gezogene Gerade entstanden gedacht werden kann. Diese Drehung ist unabhängig von irgend welchen äußeren Kräften und erfolgt mit der Winkelgeschwindigkeit der Erde, aber im umgekehrten Sinne der Erddrehung. Wird die Drehung auf die Vertikale des Beobachtungsortes bezogen, so erhält man das zuerst von Foucault für die scheinbare Drehung der Schwingungsebene eines Pendels ausgesprochene Sinusgesetz.

---

1) Dasselbe gilt auch von dem in neuester Zeit von Edwin H. Hall (The Physical Review 17. p. 179 u. 245. 1903) für die südliche Abweichung angegebenen Wert von 0,050 ± 0,043 mm bei einer Fallhöhe von 23 m.

3. Die Coriolissche Kraft, welche die östliche Abweichung eines frei fallenden und die westliche Abweichung eines aufwärts geworfenen Körpers erklärt, jedoch zur Deutung der von Foucault beobachteten Erscheinung, wie es bisher geschah, nicht benutzt werden kann, da bei Umkehr des Pendels diese fingierte Kraft nicht denselben, sondern den entgegengesetzten Richtungssinn annimmt.

Charlottenburg, Juli 1905.

(Eingegangen 28. Juli 1905.)

Nachtrag während der Korrektur. Die in § 19 aufgestellten Bewegungsgleichungen habe ich bereits früher (Bulletin de l'Acad. d. Sc. de Cracovie p. 472. 1904) unter der von vornherein eingeführten Vereinfachung entwickelt, daß die Komponenten der Schwere 0, 0, g sind. Diese Gleichungen wurden von Hrn. Rudzki (Ibid. p. 253. 1905) für „fehlerhaft" erklärt. Ich habe hierauf bereits in der „Physikalischen Zeitschrift" (6. p. 559. 1905) erwidert und darauf hingewiesen, daß seine eigentümlichen Betrachtungen zum Teil auf ein Mißverständnis meiner Arbeit, zum Teil auf eine auffällige Verwechselung der Begriffe der Ruhe und Bewegung hinauskommen.

4. *Studien über Diffusionsvorgänge wässeriger Lösungen in Gelatine;*[1]

von Peter Nell.

Inhalt: I. Einleitung. II. Versuche zur Bestimmung von Diffusionskonstanten. III. Einfluß der Gelatine auf die Diffusion wässeriger Lösungen. IV. Einfluß der Gelatine auf die Leitfähigkeit der Elektrolyte. V. Nachtrag.

I. Einleitung.

Die Literatur und die praktischen Arbeiten über das für die allgemeine Naturwissenschaft, besonders aber für die Tier- und Pflanzenphysiologie so wichtige Kapitel der Diffusion sind heute kaum mehr zu überschauen. Aber der Mangel an übereinstimmenden Ergebnissen auf diesem experimentell schwierigen Gebiete regt stets zu neuen Versuchen an.

Eine der größten neueren Arbeiten dieser Art ist die im Jahre 1900 in der Phil. Transact.[2]) erschienene Abhandlung der beiden Botaniker Brown und Escombe, betitelt: Static Diffusion of Gases and Liquids in relation to the Assimilation of Carbon and Translocation in Plants.

Obschon diese Arbeit zu botanischen Zwecken unternommen wurde, so ist ihr Inhalt doch auch für den Physiker von nicht zu unterschätzendem Interesse. Die Verfasser knüpften in ihrer Betrachtung an an die unverhältnismäßig großen Mengen Kohlensäure, die das Pflanzenblatt zu absorbieren und zu assimilieren vermag. Ihnen war es klar, daß sie nur dann zu einer befriedigenden Lösung ihrer physiologischen Fragen kämen, wenn sie vorher eingehend die Absorption und Diffusion der Kohlensäure studiert hätten. Eines der merkwürdigsten Ergebnisse ihrer Untersuchungen war das, daß die Öffnungsfläche eines Blattes (Summe der Porenflächen) das Vielfache

1) Bonner Inaugural-Dissertation.

2) H. T. Brown u. F. Escombe, Phil. Transact. of the Royal Soc. of London **193** B. p. 223—292. 1900.

der Kohlensäure absorbieren kann, welche *eine* zusammenhängende Öffnungsfläche derselben Größe absorbiert. Die Verfasser ahmten daraufhin das natürliche Blatt dadurch nach, daß sie dünne, undurchlässige Metallscheiben mit gleichmäßig verteilten engen Öffnungen versahen. Um den Einfluß einer solchen Metallscheibe auf die Menge der absorbierten Kohlensäure zu zeigen, verfuhren sie also: Die Kohlensäure der Luft wurde von konzentrierter Natronlauge sozusagen vollständig absorbiert. Den Zugang der atmosphärischen Kohlensäure zu dieser Natronlauge bildete eine breite zylindrische Röhre, die durch die oben erwähnte Metallscheibe verschließbar war. Sie fanden alsdann, daß ein solches feindurchlochtes Blatt unter Umständen genau ebensoviel Kohlensäure absorbieren ließ, wenn die Summe der Lochfläche ca. $^1/_5$ der ganzen Blattfläche betrug, wie wenn das Sieb überhaupt ausgeschaltet war, d. h die Lochfläche $^1/_1$ betrug.

Nahmen die Verfasser verschiedene Metallblätter mit nur *einer* zirkularen Durchbohrung, so fanden sie, daß unter sonst gleichen Umständen die Menge des absorbierten bez. diffundierten Gases proportional war dem Durchmesser der Offnung, nicht aber proportional der Öffnungsfläche. Vorausgesetzt ist hierbei, daß die Öffnungsfläche klein, das Metallblatt sehr dünn und die gesamte Blattfläche relativ groß war.

Die Erklärung dieser merkwürdigen Verhältnisse unternahm J. Larmor. Er betrachtete zunächst eine Scheibe mit *einer* in der Mitte befindlichen konzentrischen Öffnung, deren Durchmesser 3—4 mal kleiner war als die Länge und Breite der ganzen Scheibe. Wenn die Luft oberhalb der Flüssigkeit *vollkommen ruhig* ist, wird ein konvergenter Strom Kohlensäure nach der Öffnung fließen. Hat sich der stationäre Zustand hergestellt, dann wird die Kohlensäure in gewissen Entfernungen von der Offnung unendlich viele Flächen gleicher Dichte herstellen. Senkrecht zu diesen Flächen gleicher Dichte — welche hier Schalen darstellen, die sich konzentrisch über dem Rande der Öffnung lagern — fließt der Absorptions- bez. Diffusionsstrom.

Das mathematische Problem ist dasselbe, wie es vorkommt bei einem elektrischen Felde in der Nähe eines Konduktors, der in einer nichtleitenden Oberfläche eingebettet ist, und

der dieselbe Form und Dimension hat wie die absorbierende Öffnung.

Die gebogenen Oberflächen oder Schalen des Gases gleicher Dichte sind tatsächlich genau analog den ebenso gebogenen Flächen gleichen Potentials oberhalb einer elektrisierten Scheibe, während die konvergenten Stromlinien analog sind den elektrischen Kraftlinien. Mit Hilfe dieser elektrischen Analogie (vgl. Clerk Maxwell, „Electricity and Magnetism") wird es uns plausibel gemacht, daß bei solch engen Öffnungen die Absorption bez. die Diffusion proportional ist dem Durchmesser der Öffnung. Eine Stütze findet diese Erklärung in der Analogie der durch zirkulare Öffnungen verdunstenden Flüssigkeit, die Stefan[1]) auch proportional fand dem Öffnungsdurchmesser. Die Formel, durch welche Stefan den Wert der Verdunstung an einer zirkularen Oberfläche einer Flüssigkeit ausdrückt, war

$$M = 4\,k \cdot a \cdot \frac{P - p''}{P - p'}\,.$$

Hier bedeuten: M die Menge der verdunstenden Flüssigkeit, k den Diffusionskoeffizienten des Dampfes, a den Radius der flüssigen Scheibe, P den Atmosphärendruck, p' die Dampftension an der Flüssigkeitsoberfläche, p'' die Dampftension sehr weit von derselben entfernt.

Diese Formel ist identisch mit einer von Larmor gegebenen, die man anwenden kann auf den entsprechenden Prozeß der Kohlensäure bei vollständig absorbierender Oberfläche:

$$Q = 2\,\varrho\,.\,k\,.\,D\,,$$

wo Q die absorbierte Menge bedeutet, k den Diffusionskoeffizienten von Kohlensäure in Luft, ϱ die Dichte der atmosphärischen Kohlensäure an einem von der Öffnung hinlänglich entfernten Punkte, D den Durchmesser der Öffnung.

Diese letzte Formel wurde abgeleitet unabhängig von der Stefanschen Entwickelung, nur als Parallele zu den entsprechenden, wesentlich identischen elektrischen Vorgängen.

---

1) J. Stefan, Sitzungsber. der k. Akad. der Wissensch. zu Wien 83. II. p. 613. 1881.

[Die allgemeine Formel würde hier heißen müssen:

$$Q = 2k(\varrho - \varrho_0) D,$$

wo ϱ_0 die Dichte der Kohlensäure an der absorbierenden Oberfläche selbst wäre. Bei vollständig absorbierender Oberfläche ist aber $\varrho_0 = 0$; daher die obige Formel.]

Was die praktische Darstellung der vorerst nur auf Grund der elektrischen Parallele als vorhanden gedachten Schalen anbetrifft, so gelang diese den Verfassern dadurch, daß sie gefärbte Substanzen durch die kreisrunde Öffnung eines Glimmerblattes in wässerige Lösung (der zur Vermeidung von Konvektionsströmen etwas Gelatine zugesetzt war) hineindiffundieren ließen, und dann nach gewissen Zeitabschnitten den Fortschritt der Sphäroide photographisch festlegten. Die Gesamtheit der Photographien vereinigten sie alsdann zu einem Bildsystem. Die Ergebnisse entsprachen in allen Fällen den theoretisch vorausgesagten Figuren. Von den theoretisch erörterten Fällen wollen wir hier nur einen herausgreifen, da nur dieser für unsere späteren Untersuchungen in Betracht kommt.

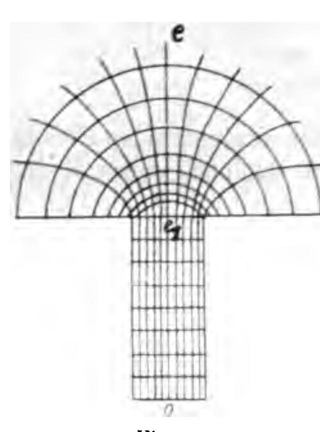


Fig. 1.

Denken wir uns in 0 (Fig. 1) eine vollständig absorbierende Oberfläche, d. h. die Konzentration ϱ_0 der Kohlensäure gleich 0. In e_1 sei die Konzentration gleich ϱ_1, in e sei dieselbe ϱ. Die durch den Querschnitt e_1 passierende Kohlensäure sei gegeben durch

$$Q_1 = k(\varrho_1 - \varrho_0) \frac{A}{L} \cdot$$

Hier bedeutet L die Länge der Röhre $0e_1$ und A den Querschnitt dieser Röhre:

$$A = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi \, .$$

Wenn der stationäre Zustand hergestellt ist, so ist $Q_1 = Q$. Offenbar hindert die Schalenbildung an dem oberen Ende der

Röhre die Diffusion. Dieser hindernde Einfluß wäre derselbe, wenn die Röhre um irgend eine Strecke X länger wäre und die Schalenbildung nicht stattfände. In dieser neuen Röhre wäre dann das Konzentrationsgefälle nicht $\varrho_1 - \varrho_0$, sondern $\varrho - \varrho_0$, und die Länge wäre nicht mehr L, sondern $L + X$. Statt

$$k(\varrho_1 - \varrho_0)\frac{A}{L}$$

können wir dann setzen

$$k(\varrho - \varrho_0)\frac{A}{L+X},$$

da ja $Q_1 = Q$ ist.

Da nun $\varrho_0 = 0$, bekommen wir

$$k \cdot \varrho_1 \frac{A}{L} = k \cdot \varrho \cdot \frac{A}{L+X}.$$

Wir erhalten somit die Gleichung:

$$Q = Q_1 = 2\,k(\varrho - \varrho_0)\,D = k\,\varrho_1\,\frac{A}{L} = k\,\varrho\,\frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi}{L+X}.$$

Für den Fall, daß $L = 0$, wird auch $\varrho_1 = \varrho_0 = 0$ und aus

$$2\,k(\varrho - \varrho_1)\,D = \frac{k\,\varrho\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi}{L+X}$$

wird

$$2\,k\,\varrho\,D = \frac{k \cdot \varrho\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi}{X}.$$

Daraus ergibt sich:

$$X = {}^1/_8\,\pi \cdot D = 0{,}393\,D.$$

Daraus ergibt sich andererseits wieder

$$Q = k\,\varrho\,\frac{A}{L + 0{,}393\,D}$$

und

$$k = Q\,\frac{(L + 0{,}393\,D)}{A \cdot \varrho}.$$

Diese Formel benutzten Brown und Escombe später zur Bestimmung einer Diffusionskonstante von NaCl. [Falls das Glimmerblatt sehr dünn ist, d. h. wenn $L = 0$, so vereinfacht sich die Formel auf

$$k = \frac{Q}{2\,\varrho\,D}.\,]$$

Ihre experimentellen Untersuchungen zur Bestimmung der Diffusionskonstante von NaCl führten die Verfasser in folgender Weise aus:

Zylindrische Glasschalen *A* (Fig. 2), von genügender Dimension wurden an ihrem offenen Ende mit einem dünnen, zentral durchbohrten Glimmerblatt vermittelst Kanadabalsam dicht verschlossen. Alsdann wurde eine Mischung von 89,5 Teilen Wasser, 5 Teilen Gelatine und 5,5 Teilen NaCl dargestellt und die Schale genau bis zum Niveau des Glimmerblattes gefüllt. Nachdem nun diese Masse erstarrt war, wurde die Schale mit der Öffnung nach unten in destilliertes Wasser getaucht. Die Konzentration des Salzes in der Schale betrug $\varrho_1 = 0,055$, an der Berührungsebene der Gelatine mit Wasser dagegen $\varrho_0 = 0$, und zwar *stets*, da die kleinen Mengen des diffundierenden Salzes sofort durch Konvektionsströme und infolge der Schwere entfernt wurden.

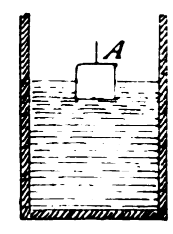


Fig. 2.

Nach ungefähr 15—20 Stunden, so meinten die Verfasser, habe sich innerhalb der Gelatine der in Fig. 1 skizzierte Zustand hergestellt. Wenn wir nämlich die Durchbohrung des Glimmerblattes als zylindrische Röhre betrachten, so ist *L* die Dicke des Glimmerblattes. *Q* soll alsdann die pro Stunde diffundierte Menge NaCl bedeuten. Da *Q* durch Analyse des Wassers und *D* und *L* durch Messung zu finden sind, so glaubte man auf Grund der Formel

$$k = Q \frac{(L + 0,393\,D)}{A \cdot \varrho} = Q \frac{(L + 0,393\,D)}{\frac{D^2}{4} \pi \varrho}$$

k leicht und zuverlässig bestimmen zu können.

Das Ergebnis der Versuche geht aus der Tab. I, p. 329, hervor.

Die ungeheuren Abweichungen der hier gefundenen Werte von denen der angeführten älteren Autoren veranlaßte mich, die Methode von Brown und Escombe näher zu untersuchen. Für den Fall, daß meine Untersuchungen die obigen Ergebnisse bestätigen sollten, so wollte ich diese einfache Methode auf die Bestimmung weiterer Diffusionskonstanten ausdehnen.

Tabelle I.

Nr. des Versuches	Dauer des Versuches in Stunden	Durchmesser der Öffnung in mm	Dicke des Glimmerblattes in mm	Konzentration der Lösung. Gewicht in Volumprozenten	ϱ	NaCl-Diff. in g im ganzen	NaCl-Diff. in g pro Std.	Temp.	k_t
1.	47,7	4,0	0,1	5,5	0,055	0,1223	0,00250	10,0°	0,0000174
2.	22,4	4,0	0,1	5,5	0,055	0,0585	0,00261	10,5	0,0000178
3.	23,7	4,0	0,1	5,5	0,055	0,0644	0,00271	12,2	0,0000185
4.	23,8	4,0	0,1	5,5	0,055	0,0661	0,00277	12,6	0,0000189

Vergleichen wir hiermit die Werte, die andere Autoren für k_t gefunden haben:

Stefan:
- k_{9-10} 0,0000114
- $k_{11\cdot 75}$ 0,0000118
- k_9 0,0000106
- k_{10} 0,000108 / 0,000103

Scheffer k_{20} 0,0000134

De Heen k_{20} 0,0000140

Schumeister k_{20} 0,0000127

II. Versuche zur Bestimmung von Diffusionskonstanten.

Die Versuchsanordnung zur Bestimmung von Diffusionskonstanten war im wesentlichen dieselbe wie die von Brown und Escombe. Die Öffnungsdurchmesser waren verschieden groß, um zu gleicher Zeit das „Durchmessergesetz" erproben zu können. Die Glimmerblätter waren möglichst dünn. Die Öffnungen wurden mit scharfen Stahllochern ausgestanzt, wobei eine glatte Bleifläche die am meisten geeignete Unterlage bot. Die Dicke (L) des Glimmerblattes wurde vermittelst Mikrometerschraube, der Durchmesser (D) der Öffnungen mit dem Kathetometer der größeren Genauigkeit halber je 10 mal gemessen. Die Versuche selbst fanden in einem tiefen Kellerraume statt, der vor Temperaturänderungen vorzüglich geschützt war. Im ganzen wurden zu den acht folgenden Versuchen nur zwei Schalen gebraucht. Dieselben wurden gleichzeitig in je einem größeren Glasbehälter mit ungefähr 2 Liter destilliertem Wasser eingetaucht, mit der Öffnung nach unten, nach einer bestimmten Zeit wieder herausgenommen, abgewaschen und so schnell als eben möglich in zwei andere, gleichartige Gefäße eingetaucht. So diente die eine Schale zu den Versuchen 1, 3, 5, 7, die andere zu den Versuchen 2, 4, 6, 8. Wie aus der Formel

$$k = Q\,\frac{(L + 0{,}393\,D)}{A \cdot \varrho} = Q\,\frac{(L + 0{,}393\,D)}{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi \cdot \varrho}$$

hervorgeht, ist zur Bestimmung der Diffusionskonstante k die genaue Bestimmung der in der Zeiteinheit diffundierenden Menge Salz (Q) nötig. Brown und Escombe bemerken zu dieser Bestimmung von NaCl weiter nichts, als daß sie dieselbe auf dem Wege der Cl-Bestimmung gemacht hätten, und zwar schreiben sie, daß sie das Cl als AgCl gefällt und als solches gewogen und daraus dann das NaCl berechnet hätten. Ich glaubte also, die Verfasser seien den allgemein üblichen Weg der gewichtsanalytischen Cl-Bestimmung gegangen. Ich setzte also dem mit NO_3H angesäuerten Diffusat NO_3Ag zu und erhielt im ersten Moment einen weißen Niederschlag, der jedoch in wenigen Sekunden grau, dann braun und nach einigen Stunden schwarz war. Diese Wandlung trat sowohl im Licht

als auch im Dunklen ein. Es war eben Gelatine mit dem NaCl mitdiffundiert und wirkte auf das AgCl ein. Bei weiteren Versuchen fand ich, daß der schwarze Niederschlag — der sich nur sehr schwer sammeln ließ — ungefähr nur den fünften Teil des berechneten AgCl wog. Diese Gesichtsverminderung kann natürlich nicht allein durch eine Reduktion des AgCl zu Ag bewirkt worden sein, obgleich auch diese hier mitwirkte. Es ist höchstwahrscheinlich, daß das AgCl in feinster Verteilung von der mitdiffundierenden Gelatine absorbiert wurde und so durch das Filter ging. Andererseits ist nicht ausgeschlossen, daß die Gelatine, oder zum mindesten ein Bestandteil derselben, mit dem AgCl chemisch reagierte. Aus diesen Gründen war es nun nötig, die Gelatine unschädlich zu machen, um das Cl-Ion zur unbehinderten Reaktion zu erhalten. Es wurden zur Erreichung dieses Zweckes die verschiedensten Wege eingeschlagen. Zunächst wurde das Diffusat eingedampft und mäßig geglüht. Es trat nach Auflösung des Rückstandes in Wasser und Zusatz von NO_3Ag zwar eine reine AgCl-Fällung ein, aber das Cl war zum Teil verflüchtigt worden, wie die Kontrollversuche zeigten. Wurde das Diffusat, um es von der Gelatine auf nassem Wege zu befreien, mit NO_3H oder SO_4H_2 erhitzt, so wurde zwar die Gelatine zerstört, das Cl aber durch die starken Säuren ausgetrieben. Des ferneren war es nicht ausgeschlossen, daß aus der Gelatine sich bildende Cyanverbindungen lösliche Cyanchlorsilberdoppelsalze zustande kommen ließen. Es gelang mir auch nicht, mit Hilfe anderer Oxydationsmittel, z. B. MnO_4K, die Gelatine zu beseitigen. Verschiedentliche Versuche, das Cl auf titrimetrischem Wege zu bestimmen, hatten ebenfalls nicht den gewünschten Erfolg. Ein sehr umständlicher und mühevoller Weg zur Cl-Bestimmung war schließlich folgender:

Die ungefähr 2 Liter Diffusat wurden auf wenige Kubikzentimeter eingedampft. Diese wurden alsdann in ein Hoffmeistersches Gläschen gebracht und bis zur vollständigen Trockne eingedampft. Das Gläschen wurde alsdann mit (allerdings schwer erhältlichem) CaO verrieben und in eine Verbrennungsröhre gebracht. Nach ungefähr 20 Min. Glühzeit wurde das Verbrennungsprodukt in Wasser vorsichtig zu $Ca(OH)_2 + CaCl_2$ aufgelöst, die Lösung von Glassplittern und

anderen Verunreinigungen gesäubert und schließlich das Cl als AgCl gewichtsanalytisch bestimmt.

Ich habe notgedrungen der chemischen Analyse der in Gelatine gelösten Körper im folgenden eingehendere Aufmerksamkeit schenken müssen. Das Ergebnis einer großen Anzahl von Versuchen nach dieser Richtung hin ist gewesen, daß die elektrolytisch abscheidbaren Basen, wie Cu, Ag, PbO_2 am ersten geeignet sind, quantitativ aus gelatinöser Lösung gewonnen zu werden. Vorbemerkt sei hier, daß die Diffusionsversuche mit Ag- und Pb-Salzen deshalb fehlschlugen, weil dieselben durch die Gelatine teils in das entsprechende Oxyd oder sogar in das Metall umgewandelt wurden.

Des ferneren sei bemerkt, daß außer den mit der Analyse zusammenhängenden Schwierigkeiten solche im Laufe der Versuche selbst sich herausstellten. So vermochte z. B. das Aufquellen der Gelatine in der Schale die Versuchsanordnung zu variieren. Unter Umständen drangen gewisse Bakterien in die Gelatine ein, zersetzten dieselbe und verstopften die Öffnung des Glimmerblattes.

Außerdem darf wohl nicht übersehen werden, daß die Lösungstemperatur der Gelatine deren Charakter nicht unbedeutend zu ändern vermag, wie P. v. Schröder[1]) uns gezeigt hat. Ich habe daher stets die Gelatine bei 70° C. gelöst und ca. 10 Min. lang auf dieser Temperatur erhalten.

Über den Einfluß der Gelatine selbst auf die Diffusion soll im dritten Abschnitt berichtet werden.

Die nachstehende Versuchstabelle p. 333 soll nach zwei Richtungen Aufschluß geben.

Die Aufstellung zeigt, daß die Diffusion einer gewissen Gesetzmäßigkeit zustrebt, und daß nach deren Erreichung das „Durchmessergesetz“ gilt:

Bei engen kreisrunden Öffnungen ist die Diffusionsmenge proportional dem Durchmesser der Öffnung.

Diesem ersten positiven Ergebnis obiger Versuchsreihe steht ein zweites, negatives entgegen:

Die Menge des pro Zeiteinheit diffundierenden Salzes erreicht keinen konstanten Wert, sondern nimmt stets ab.

---

1) P. v. Schröder, Zeitschr. f. phys. Chem. 45. p. 75—117. 1

Tabelle II.

Nr.	D	L	Zeit in Stunden	Temp. ° C.	Konzentration	NaCl + Gelatine diffundiert		NaCl diffundiert		Verhältnisse der		
						im ganzen	pro Std.	im ganzen	pro Std.	D	NaCl + Gelatine	NaCl
1.	1,040	0,0042	25,52	11,5	0,04	0,1880	0,007368	0,13366	0,0050886	1,8407	2,001	1,989
2.	0,565	0,0023	25,52	11,5	0,04	0,0940	0,003684	0,06871	0,0026924			
3.	1,040	0,0042	88,95	11,55	0,04	0,4531	0,005093	0,37167	0,004179	1,8407	1,865	1,960
4.	0,565	0,0023	88,95	11,55	0,04	0,2430	0,002732	0,18947	0,002130			
5.	1,040	0,0042	25,0	12,0	0,04	0,1119	0,004471	0,0861	0,003419	1,8407	1,860	1,850
6.	0,565	0,0023	25,0	12,0	0,04	0,0601	0,002404	0,0462	0,001848			
7.	1,040	0,0042	28,5	12,5	0,04	0,1228	0,004310	0,09303	0,003264	1,8407	1,853	1,840
8.	0,565	0,0023	28,5	12,5	0,04	0,0668	0,002345	0,05056	0,001778			

Dies Ergebnis dürfte wohl kaum so scharf ausgesprochen werden allein auf Grund der wenigen Versuche der Tabelle II. Eine spätere Versuchsreihe (vgl. Tab. VI) zeigt dies in viel überzeugenderer Weise. Es erscheint höchst merkwürdig, daß diese Versuche mit den Folgerungen einer sonst widerspruchslos durchgeführten Theorie nicht übereinstimmen.

Die Bestimmung einer Diffusionskonstante auf Grund der Gleichung

$$k = Q \frac{(L + 0,393\, D)}{A \cdot \varrho}$$

ist daher vorläufig nicht erreicht.

Vielleicht dürften Versuche über die Beziehungen zwischen Leitfähigkeit und Diffusion zu den erwünschten Aufschlüssen führen, zumal da (nach Versuchen in Kap. IV) die Gelatine die Diffusion und die elektrische Leitfähigkeit von Lösungen gleichmäßig modifiziert.

III. Einfluß der Gelatine auf die Diffusion wässeriger Lösungen.

Wie schon bemerkt wurde, haben Brown und Escombe der NaCl-Lösung 5 Proz. Gelatine beigemischt, um die sonst stets auftretenden störenden Konvektionsströme zu vermeiden. Sie bemerkten hierzu ausdrücklich:

„Several observers have previously used gelatine or agar-agar in diffusion experiments, and have found that the rapidity of diffusion is practically the same as with water only.“ [1])

Trotz der Autorität beider Verfasser fühlte ich mich — wie sich denn auch mehr und mehr herausstellte, nicht mit Unrecht — veranlaßt, dieser Behauptung auf den Grund zu gehen. Um zu entscheidenden Ergebnissen über den Einfluß der Gelatine zu gelangen, versäumte ich es nicht, alle mir zugänglichen Wege der Untersuchung einzuschlagen.

Die Anordnung für die Versuche der ersten Reihe war folgende:

Enge Glasröhrchen von ca. 10 cm Länge wurden mit einer wässerigen Lösung von CrO_4K_2 und Gelatine gefüllt. Die Konzentration der Gelatine variierte von 32 proz. Gelatine bis zu

1) H. T. Brown u. F. Escombe, Phil. Trans. of the Royal Society of London 193 B. p. 246. 1900.

0 prozentiger. Diese Röhrchen wurden nach dem Erstarren der Lösungen gleichzeitig und bis zu derselben Tiefe in ein größeres Gefäß mit $^1/_{10}$ normal NO_3Ag gestellt. Die Höhe der gebildeten CrO_4Ag_2-Niederschläge wurde in gewissen Zeitabschnitten gemessen.[1]) Wenn es sich hier auch nicht um sehr scharfe Messungen handelte, so gibt uns die beifolgende Tabelle III doch genügenden Aufschluß über die Rolle, welche die Gelatine spielt.

Tabelle III.

Dauer der Versuche 130 Std. Temp. 16—19°.

Nr. der Röhre		1	2	3	4	5	6	7
NO_3Ag		$^1/_{10}$ N.	$^1/_{10}$ N.	$^1/_{10}$ N.	$^1/_{10}$ N.	$^1/_{10}$ N.	$^1/_{10}$ N.	$^1/_{10}$ N.
CrO_4K_2		$^1/_{50}$ N.	$^1/_{50}$ N.	$^1/_{50}$ N.	$^1/_{50}$ N.	$^1/_{50}$ N.	$^1/_{50}$ N.	$^1/_{50}$ N.
Gelatine in Proz.		0	1	2	4	8	16	32
Höhe der CrO_4Ag_2-Niederschläge nach				cm	cm	cm	cm	cm
	45 Std.	—	—	1,30	1,26	1,25	0,9	0,9
	69 „	—	—	1,90	1,80	1,35	1,30	1,20
	88 „	—	—	2,00	1,90	1,80	1,50	1,40
	112 „	—	—	2,25	2,13	2,05	1,69	1,58
	130 „	—	—	2,62	2,54	2,38	1,97	1,70

Die Versuche Nr. 1 und Nr. 2 mißlangen, da das schwere CrO_4Ag_2 zu Boden sank. Die Ringbildung war um so schärfer, je stärker die Konzentration der Gelatine war. Dieser Umstand legt die Vermutung nahe, daß die geringprozentige Gelatine die Konvektionsströme nur teilweise hindert. Obige Versuche haben nur einen qualitativen Wert, da die Diffusionsvorgänge durch chemische Reaktionen und durch Übersättigungserscheinungen kompliziert werden.[2]) Diese Übelstände vermeidet die nun folgende Reihe von Versuchen. Als diffundierende Substanz wurde das Färbemittel Corallin gewonnen. Die Dauer der Versuche betrug 741 Stunden bei einer Temperatur 13—14°. Die Röhrchen hatten einen Durchmesser von 2,5 mm. Die Konzentration des Corallins war 0,00198.

---

1) Näheres über die Form dieser Niederschläge vgl. Nachtrag zu dieser Arbeit.

2) Vgl. Nachtrag zu dieser Arbeit.

Tabelle IV.

Nr. der Röhre	1	2	3	4	5	6	7
Prozentgehalt an Gelatine	2	2	4	4	8	8	15
Höhe d. Rotfärbung in cm	6,0	6,0	4,2	4,3	2,0	2,0	1,5

Es muß erwähnt werden, daß sich diese Ablesungen schwierig gestalteten, da zwischen Färbung und Nichtfärbung kontinuierlicher Übergang bestand. Immerhin ist auch hier der hemmende Einfluß der Gelatine unverkennbar.

Viel bessere Resultate gab folgende dritte Versuchsordnung: 28 Röhrchen, ca. 10 cm lang und alle mit dem Querschnitt 0,055 cm^2, wurden, der Kontrolle halber, paarweise mit gleichprozentiger Gelatine gefüllt. Letzterer wurde eine Spur Phenolphtalein beigegeben. Als diffundierende Substanz wurde 5 proz. Kalilauge gebraucht. Das Fortschreiten der Kalilauge wurde durch die eintretende Rotfärbung des Phenolphtaleins angezeigt. Selbstverständlich mußte die Gelatine vorher auf neutrales Verhalten untersucht werden. Die Ablesung war bei hochprozentiger Gelatine eine scharfe. Die Konvektionsströme, die trotz der minimalen Temperaturdifferenzen auftraten, zerstörten die Versuche 14a und 14b. Aus demselben Grunde war bei 13a und 13b die Ablesung schwierig. In der Tabelle V sind außer den Höhen der Rotfärbung die Differenzen dieser Höhe aufgenommen. Die Zeitdauer der Diffusion betrug 54 Stunden.

Endlich sei noch ein anderer, vierter Weg erwähnt, auf dem der verzögernde Einfluß der Gelatine auf die Diffusion durch quantitative Analyse bewiesen wurde. Die Versuchsanordnung gleicht im Prinzip der in Abschnitt I und II schon erwähnten.[1]) Als diffundierendes Salz wurde SO_4Cu gebraucht. Die Diffusion selbst fand statt in einem Raume sehr konstanter Temperatur. Diese war in den ersten zwölf Tagen 13,3 bis 13,4°, in den letzten drei Tagen 13,4 bis 12,4°. [Die Konzentration des SO_4Cu betrug bei allen Versuchen 5 Proz.] Die Konzentration der Gelatine war bei den Versuchen I und II gleich 5 Proz., III und IV gleich 10 Proz., V und VI gleich 15 Proz. Die Öffnungen der Glimmerblätter waren besonders

1) Die Resultate sind in Tab. VI p. 338 niedergelegt.

Tabelle V.

Nr.	Prozentgehalt an Gelatine	Höhe der Rötung cm	Mittel aus a und b	Differenzen der Höhen	Differenzen pro 1 Proz. Gelatine
1 a	18	2,00	1,99		
b	18	1,98		0,20	0,10
2 a	16	2,20	2,19		
b	16	2,19		0,20	0,10
3 a	14	2,40	2,39		
b	14	2,38		0,20	0,10
4 a	12	2,58	2,59		
b	12	2,60		0,20	0,10
5 a	10	2,80	2,79		
b	10	2,78		0,22	0,11
6 a	8	3,02	3,01		
b	8	3,01		0,12	0,12
7 a	7	3,13	3,13		
b	7	3,13		0,14	0,14
8 a	6	3,26	3,27		
b	6	3,28		0,16	0,16
9 a	5	3,42	3,43		
b	5	3,44		0,18	0,18
10 a	4	3,61	3,61		
b	4	3,62		0,20	0,20
11 a	3	3,80	3,81		
b	3	3,82		0,22	0,22
12 a	2	4,03	4,03		
b	2	4,03		0,22	0,22
13 a	1	4,25	4,25		
b	1	4,25		—	—
14 a	0	—	—		
b	0	—			

scharf und genau gemessen. Sie differierten im Maximum um 1,6 Proz. und diese Differenz wurde noch durch Rechnung ausgeglichen. Die Dicke (L) der Glimmerblätter wurde nach der Brown und Escombeschen Formel

$$\frac{L + X}{\left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

in die Rechnung einbezogen. Hier hat X den früheren Wert

Tabelle VI.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nr. des Versuches	D cm	L cm	$\frac{L+X}{\left(\frac{D}{2}\right)^2}$	Dauer in Stunden	Gesamtdauer von a, b, c und d	Abgeschiedene Cu des diffundierten SO_4Cu in Gramm		Summe des Cu von a, b, c, d,	Diese Summen umgerechnet auf 1 als Einheit nach der Formel $\frac{L+X}{\left(\frac{D}{2}\right)^2}$	Mittelwerte aus Rubrik 9 für I u. II, III u. IV, V u. VI	Prozentgehalt an Gelatine
						im ganzen	pro Stunde				
I. a	1,032	0,0073	0,15510	42,11	374,66	0,01996	0,0004740	0,14585	0,14585	0,143 705	5%
b	"	"	"	148,0		0,06118	0,0004114				
c	"	"	"	143,27		0,04908	0,0003424				
d	"	"	"	41,28		0,01363	0,0003302				
II. a	1,038	0,0039	0,15349	42,11	374,66	0,01929	0,0004694	0,14009	0,14156		
b	"	"	"	148,0		0,06005	0,0004057				
c	"	"	"	143,28		0,04781	0,0003337				
d	"	"	"	41,27		0,01294	0,0003134				
III. a	1,023	0,0074	0,15619	42,11	374,66	0,01713	0,0004068	0,11489	0,11371	0,115 33	10
b	"	"	"	148,0		0,04873	0,0003400				
c	"	"	"	143,30		0,03854	0,0002739				
d	"	"	"	41,25		0,01049	0,0002544				
IV. a	1,027	0,0043	0,15496	42,11	374,66	0,01749	0,0004153	0,11693	0,11694		
b	"	"	"	148,0		0,04989	0,0003480				
c	"	"	"	143,33		0,03882	0,0002771				
d	"	"	"	41,22		0,01072	0,0002579				
V. a	1,021	0,0030	0,15443	42,11	374,66	0,01467	0,0003484	0,09704	0,09702	0,096 24	15
b	"	"	"	148,0		0,04291	0,0002900				
c	"	"	"	143,42		0,03153	0,0002192				
d	"	"	"	41,13		0,00793	0,0001926				
VI. a	1,032	0,0027	0,15334	42,11	374,66	0,01420	0,0003372	0,09387	0,09546		
b	"	"	"	148,0		0,04246	0,0002869				
c	"	"	"	143,47		0,02965	0,0002136				
d	"	"	"	41,08		0,00756	0,0001840				

0,393 *D*. Die Zeiten der einzelnen Versuche (a, b, c, d) waren praktisch gleich. So waren also für die Versuche alle Bedingungen identisch, ausgenommen die Konzentration der Gelatine. Die chemische Analyse des SO_4Cu fand auf elektrolytischem Wege statt. Das Diffusat wurde mit einigen Kubikzentimetern NO_3H auf ein Minimum eingedampft und dann elektrolysiert. Als Elektroden dienten Platinbleche von 1 bis 1,5 g Gewicht und 15—20 cm^2 Oberfläche, die vor und nach der Ausscheidung des Cu jedesmal in größeren Zeitabschnitten, sorgfältig vor Temperaturdifferenzen geschützt, bis zur vollen Gewichtskonstanz gewogen wurden. Die Stromdichte betrug bis zu $^1/_{60}$ Amp. pro cm^2. Bei der Stromregulierung war sehr darauf zu achten, daß sich an der Kathode keine amorphe Kohle abschied. Die Abscheidung an der Anode fand fast stets statt, an der Kathode dagegen nur bei zu hoher Stromstärke, wodurch dann natürlich jede quantitative Cu-Abscheidung verhindert wurde. Die Ergebnisse ließen im Verhältnis zu den vielen Fehlerquellen an Übereinstimmung nichts zu wünschen übrig.[1])

IV. Einfluß der Gelatine auf die Leitfähigkeit der Elektrolyte.

Der innige Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Diffusion, auf welchem z. B. die Nernstsche Berechnung der Diffusionskonstanten beruht[2]), und der mir von privater Seite gemachte Einwurf, die elektrolytische Leitfähigkeit und folglich auch die Diffusion werde von verdünnter Gelatine nicht beeinflußt, bewogen mich, auch die Leitfähigkeit des SO_4Cu in Gelatine einer kurzen Untersuchung zu unterziehen. Zuerst bestimmte ich die Leitfähigkeit der von mir zu Diffusionszwecken angewandten Gelatine. Ich ließ den Prozentgehalt der Gelatine variieren von 1—20 Proz. Als Vergleichswiderstand diente gesättigte, reinste Kochsalzlösung. Als Einheit des Leitvermögens nahm ich die Leitfähigkeit derjenigen Flüssigkeit, die auf 1 cm Länge und 1 cm^2 Querschnitt den Widerstand 1 Ohm besitzt. Die Leitfähigkeit der von mir

1) Über einige bei dieser Versuchsreihe aufgetretene merkwürdige Schalenbildungen vgl. den Nachtrag zu dieser Arbeit.

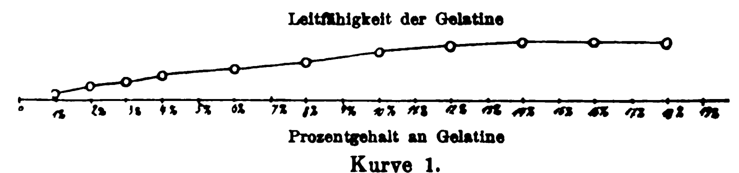
2) W. Nernst, Zeitschr. f. physik. Chem. 2. p. 613—638. 1888.

benutzten Gelatine war zwar sehr gering, durfte aber u keinen Umständen mit der des gewöhnlichen destillie Wassers identifiziert werden, wie uns Tab. VII zeigt.

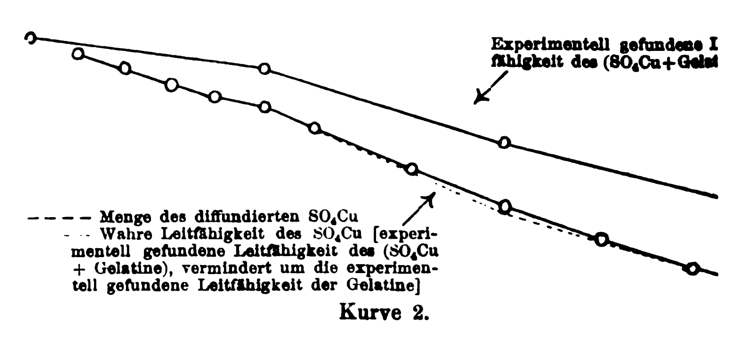
Tabelle VII.

1	2	3	4
Prozentgehalt der Lösung an Gelatine	Leitfähigkeit der Lösung	Prozentgehalt der Lösung an Gelatine	Leitfähigkeit der Lösung
1 %	0,0002544	10%	0,0016605
2	0,0004663	12	0,0018716
3	0.0006584	14	0,0019739
4	0,0008609	16	0,0020058
6	0,0010930	18	0,0020202
8	0,0018640	20	—

Dann erst bestimmte ich die Leitfähigkeit von 5 p SO_4Cu in reinem Wasser und in Gelatine. Die Bestimmun sind nicht mit eben denselben Lösungen gemacht, mit de die Diffusionsversuche angestellt wurden. Die Temper dieser und jener Versuche war annähernd dieselbe. Tab. V zeigt uns den hindernden Einfluß der Gelatine auf die L fähigkeit. Die folgenden Kurven 1 und 2 veranschaulichen Ergebnisse dieses Kapitels.



Kurve 1.



Kurve 2.

Tabelle VIII.

Temperatur 13,2°.

Nr.	Substanz	Leitfähigkeit
I	5 proz. SO_4Cu *ohne* Gelatine	0,016 302
II	desgl. mit 5 proz. "	0,015 365
III	desgl. mit 10 proz. Gelatine	0,013 347
IV	desgl. mit 15 proz. "	0,011 659

Vergleichen wir die Verhältnisse, in denen Diffusion und ähigkeit durch die Gelatine vermindert werden, so scheinen ·, wie beifolgende Übersicht zeigt, nicht dieselben zu sein.

$$\mathrm{Ia} = 1{,}246, \quad \mathrm{IIa} = 1{,}494, \quad \frac{\mathrm{Ia}}{\mathrm{Ib}} = 1{,}11,$$

$$\mathrm{Ib} = 1{,}126, \quad \mathrm{IIb} = 1{,}319, \quad \frac{\mathrm{IIa}}{\mathrm{IIb}} = 1{,}13.$$

Hier bedeuten:

a das Verhältnis der diffundierten Mengen von 5 proz. SO_4Cu in 5 proz. und 10 proz. Gelatine.

b das Verhältnis der Leitfähigkeiten von 5 proz. SO_4Cu in 5 proz. und 10 proz. Gelatine.

a das Verhältnis der diffundierten Mengen von 5 proz. SO_4Cu in 5 proz. und 15 proz. Gelatine.

b das Verhältnis der Leitfähigkeiten von 5 proz. SO_4Cu in 5 proz. und 15 proz. Gelatine.

Daß trotz der Abweichungen zwischen Ia und Ib bez. und IIb die Diffusions-Leitfähigkeitsverzögerungen durch tine identisch sein *können*, ergibt folgende Überlegung: den Leitfähigkeitsbestimmungen haben wir nicht nur das ermögen des SO_4Cu, sondern auch das der Gelatine geen, während die Messungen der Diffusionsmengen sich auf das diffundierende SO_4Cu bezogen. Daher sind bei Diffusionsversuchen die Differenzen zwischen den Ergebn bei 5 proz. und 10 proz. bez. 5 proz. und 15 proz. Gelagrößer als die entsprechenden Differenzen bei den Leitkeitsbestimmungen. Sehr bemerkenswert scheint mir, daß Abweichungen in einem bestimmten Verhältnis zueinander n; denn die Werte für Ia/Ib und IIa/IIb kann man praktisch gleich setzen. Zu einem überraschend überein-

stimmenden Ergebnisse kommen wir auf folgende Weise. Ziehen wir von der experimentell bestimmten Leitfähigkeit (Gelatine + SO_4Cu) die der Gelatine ab und setzen die dadurch erhaltenen absoluten Leitfähigkeiten des SO_4Cu in Proportion, so erhalten wir für Ib und IIb die Werte 1,24 und 1,48, die sich mit Ia = 1,246 und IIa = 1,494 wohl decken.

Diese Verhältnisse deuten darauf hin, daß, wenn wir für hohe Gelatinekonzentration eine bei dieser gültige Diffusionskonstante bestimmt haben, durch diese auf dem Wege der Leitfähigkeitsbestimmung wir zur wahren Diffusionskonstante gelangen können.

Diese meine Ergebnisse über die Beziehung zwischen Leitfähigkeit und Diffusion in Gelatine finden eine nicht zu unterschätzende Stütze in einer Beobachtung, die laut gütiger privater Mitteilung Hr. Dr. Bucherer bei Gelegenheit einer früheren Untersuchung machte.[1]) Er fand nämlich, daß die Kettenspannung zweier Elemente keinen Unterschied zeigt, mögen wir sie in gelatinefreier oder in gelatinöser Lösung messen. Dies Ergebnis ist nun wohl sofort plausibel. Wenn die beiden entgegengesetzten Wirkungen der Diffusion und Ionenwanderung gleichmäßig beeinflußt werden, so erleidet die Resultatenwirkung der Kettenspannung keinerlei Veränderung.

Es sei an dieser Stelle Hrn. Privatdozenten Dr. Bucherer für mehrfache Unterstützungen während der Arbeit herzlichst gedankt.

V. Nachtrag.

Wie schon in der Einleitung zu dieser Arbeit erwähnt wurde, haben Brown und Escombe den Fortschritt der Diffusionsströme in der Weise verfolgt, daß sie gefärbte Substanzen in wässerige Gelatine diffundieren ließen und in gewissen Zeitabschnitten die Färbung photographierten. Die Kombination der so erhaltenen Bilder stellte alsdann ein System von Flächen gleicher Konzentration dar. Die Normalen dieser Flächen bezeichneten dann den Weg der Diffusionsströme. Ich ging dazu über, die Richtung der Diffusions-

1) A. Bucherer, Wied. Ann. 56. p. 564—579. 1896. In der Veröffentlichung selbst ist auf diese Beobachtung nicht hingewiesen.

ströme mit Hilfe der „Liesegangschen Ringe“[1]) plastisch darzustellen. Die Liesegangsche Versuchsanordnung war kurz folgende:

Eine Glasplatte wurde mit Gelatine überzogen, die mit Kaliumchromat imprägniert war. Die Platte wurde horizontal gelegt und ein Tropfen Silbernitrat darauf gebracht. Das Silbernitrat diffundierte langsam in die Gelatine, reagierte mit Kaliumchromat und gab einen Niederschlag von Silberchromat. Das Silberchromat bildete, anstatt ununterbrochen mit der Diffusion der reagierenden Substanzen in der Gelatine fort-

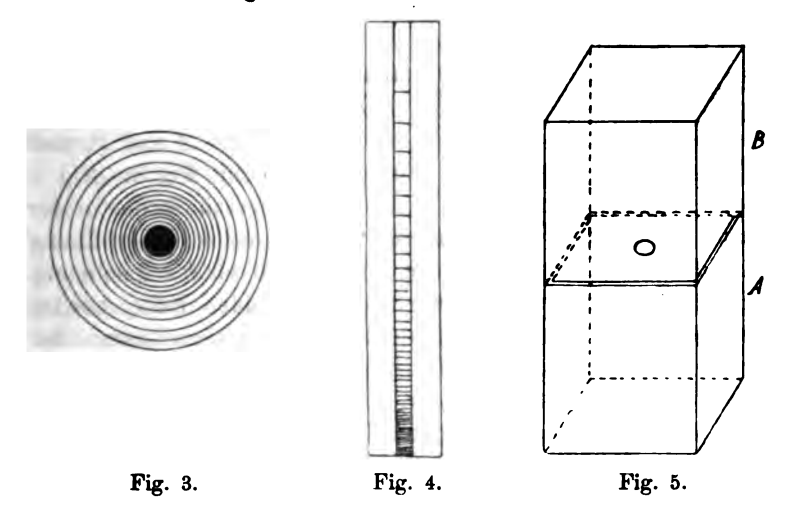


Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5.

zuschreiten, deutliche Ringe um den Tropfen herum, wie Fig. 3 zeigt.

Liesegang hat auch gezeigt, daß analoge Erscheinungen auftreten, wenn das Kaliumchromat in Gelatine in eine kapillare Röhre, anstatt auf eine Platte gebracht wird. Der Niederschlag in der Röhre bildet sich in Schichten oder Scheiben senkrecht zur Achse der Röhre (Fig. 4). Diese Erscheinung der Ring- bez. Schichtenbildung ist nicht beschränkt auf den Fall der Reaktion zwischen Silbernitrat und Kaliumchromat.

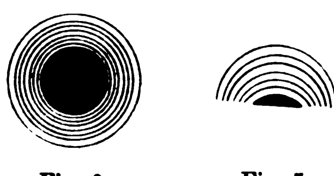
Ohne vorerst auf die Erklärung dieser merkwürdigen Erscheinung einzugehen, möchte ich über meine daran anknüpfen-

1) E. Liesegang, Chemische Reaktionen in Gallerten. Düsseldorf 1898.

den Versuche berichten. Zwei kubische Glaskasten *A* und *B*, Fig. 5, die mit 5proz. wässeriger Gelatine gefüllt waren, wurden durch ein mit kreisrunder Öffnung versehenes Glimmerblatt getrennt. *A* enthielt $^1/_8$-normal NO_3Ag, *B* enthielt $^1/_{75}$-normal CrO_4K_2. Nach dem Massenwirkungsgesetz fand die Diffusion und die damit verbunde chemische Reaktion

$$2\,NO_3Ag + CrO_4K_2 \rightleftarrows 2\,NO_3K + CrO_4Ag_2$$

in *B* statt. Die Niederschläge nahmen bald die Form sphäroidaler Schalen an und wuchsen ca. 3 Tage lang. Alsdann wurden *A* und *B* getrennt und es zeigten sich die in Figg. 6 und 7 dargestellten Bilder. Fig. 6 stellt den Querschnitt dar in der Berührungsebene *A* und *B*, und ist identisch mit Fig. 3. Fig. 7 stellt den Querschnitt dar in der darauf senkrechten, durch den Mittelpunkt der Glimmeröffnung führenden Ebene und gleicht der Fig. 1 (wenn wir $L = 0$ nehmen). Bei starker Konzentration, wie im vorliegenden Falle, konnte man auf 1 mm bis zu 20 Schalenbildungen wahrnehmen. Bei genügend enger Öffnung erreichten die Sphäroide bald die Form von Halbkugeln. — Es ist klar, daß es möglich ist, auf diese einfache Weise die Richtung der Diffusionsströme in den verschiedenartigsten Röhren und den verschiedensten Berührungsflächen zu studieren. Einige Versuche, die kubische Größe der CrO_4Ag_2-Sphäroide und die Größen der Durchmesser in gesetzmäßigen Zusammenhang zu bringen, muß ich als verfehlt ansehen.


Fig. 6. Fig. 7.

Wesentlicher erscheint es wohl, die Liesegangschen Ringe zu erläutern. Ostwald äußert sich zu dieser Frage also:[1])

„Durch die Diffusion des Silbersalzes in die chromhaltige Gelatine bildet sich eine Lösung, welche in bezug auf das Silbersalz übersättigt ist; der Niederschlag aber erfolgt nicht sofort, sondern erst, nachdem die metastabile Grenze[2]) über-

1) W. Ostwald, Lehrbuch der allgemeinen Chemie (2. Aufl.) **2. 2.** p. 778.

2) Über diesen Begriff vgl. daselbst p. 780—784.

schritten ist. Dies geschieht natürlich gleichzeitig in einem Kreise, der mit dem Tropfenkreise konzentrisch ist. An den entstandenen Niederschlag lagert sich das Silberchromat, in bezug auf welches die Umgebung des Ringes übersättigt ist, und verstärkt ihn; dies dauert so lange, bis das lösliche Chromat aus der Nähe in den Niederschlag gegangen ist. Alsdann wandert das Silbersalz über den Ring hinaus, übersättigt ein neues, ferner liegendes, kreisförmiges Gebiet, und der gleiche Vorgang wiederholt sich. Da die Silberlösung beim Weiterdiffundieren immer verdünnter wird, so wird die kritische Konzentration, bei welcher die Abscheidung beginnt, immer später erreicht, und der neue Ring entsteht erst in einem weiteren Abstande, als der zwischen seinen Vorgängern betrug."

Soweit Ostwald. Im Laufe meiner Untersuchungen über den Einfluß der Gelatine auf die Diffusion des SO_4Cu bemerkte ich jedoch eine Erscheinung, die nicht für die Ostwaldsche Erklärung der Liesegangschen Ringe zu sprechen scheint. Nachdem dort mit jeder der Schalen I—VI vier hintereinander folgende Versuche stattgefunden hatten und dann die Glimmerblätter von den Schalen gelöst werden sollten, gewahrte ich in den Schalen III—VI, also in den Gallerten höherer Konzentration eine *scharfe*, konzentrische Schalenbildung, die im direkten Lichte durchschimmernd und klar, im reflektierten Lichte dagegen dunkel erschien. Am auffallendsten war jedoch der Umstand, daß in den Gallerten höchster Konzentration, also in V und VI, eine *doppelte* Schalenbildung stattgefunden hatte. Die Ringe waren leicht meßbar, so daß von einem kontinuierlichen Übergange oder sogar von einer Täuschung gar keine Rede sein konnte. Ein Diametralschnitt durch die Gallerten, senkrecht zur Ebene des Glimmerblattes, ergab die bekannten Sphäroide. Die Messung derselben ergab die in Tab. IX angegebenen Resultate. Um zu sehen, ob die Diffusion über die äußeren Schalen hinaus fortgeschritten sei, wurde die Gelatine in der nächsten Nachbarschaft derselben analysiert und folgende Konzentrationen wurden gefunden:

bei III	gleich	4,05 Proz.	SO_4Cu,	IV	gleich	3,40 Proz.	SO_4Cu
„ V	„	3,56 „	„	VI	„	3,77 „	„

Die Diffusion fand also über die (Ringe bez.) Schalen hinaus statt.

Tabelle IX.

Nr.	*D*	Durchmesser der		Höhe der	
		inneren Schale	äußeren Schale	inneren Schale	äußeren Schale
	cm	cm	cm	cm	cm
III	1,023	—	2,55	—	1,65
IV	1,027	—	2,35	—	1,80
V	1,021	1,53	2,82	0,70	1,82
VI	1,032	1,40	1,90	0,65	1,25

Die Schalen verwischten sich, wenn die Gallerte längere Zeit der Einwirkung der Zimmertemperatur überlassen war. Die oben erwähnte, bei V und VI stark ausgeprägte Doppelschalenbildung kann, wie schon bemerkt, meines Erachtens nicht dazu beitragen, die Ostwaldsche Erklärung zu stützen, denn ich wüßte nicht, wo hier von „Übersättigungserscheinungen" die Rede sein könnte, die man zur Not herbeiziehen könnte, wenn SO_4Cu ein hydrolytischer Körper wäre, in welchem Falle dann das eindringende Wasser als der übersättigende Faktor aufzufassen gewesen wäre.

Auf jeden Fall dürften diese merkwürdigen Beobachtungen ein Anreiz sein, das Wesen der Liesegangsche Ringe eingehender zu studieren.

Ergebnisse.

1. Die durch Diaphragmen mit engen Kreisöffnungen diffundierenden Lösungen sind den Durchmessern dieser Öffnungen proportional.

2. Die von Brown und Escombe angegebene Methode zur Bestimmung von Diffusionskonstanten ist in ihrer jetzigen Gestalt als nicht zutreffend anzusehen, da die ihren Versuchen zugrunde liegende Theorie lückenhaft ist. Sie führt aber möglicherweise indirekt zu einer richtigen Bestimmung.

3. Die Gelatine übt sowohl auf die Diffusion als auch auf das elektrische Leitvermögen von Lösungen einen bedeutenden, hindernden Einfluß aus.

4. Diffusion und Ionenwanderung werden von der Gelatine *gleichmäßig* beeinflußt.

5. Die Ostwaldsche Erklärung der Liesegangschen Ringe scheint nicht vollständig zu genügen.

Vorliegende Arbeit habe ich auf Veranlassung meines hochverdienten Lehrers, des Hrn. Prof. Dr. H. Kayser, unternommen und im Physikalischen Institut der Universität ausgeführt. Ich kann nicht umhin, an dieser Stelle ausdrücklich ihm meinen ebenso schuldigen wie verbindlichen Dank auszusprechen für die so mannigfache anregende Unterstützung, mit der er den Fortgang meiner Arbeiten gefördert hat.

Auch dem Hrn. Prof. Dr. Rimbach, der mir für die Ausführung der chemischen Analysen wertvolle Fingerzeige gab, sei herzlichst gedankt.

(Eingegangen 9. August 1905.)

5. *Untersuchungen über den Einfluß der Erde bei der drahtlosen Telegraphie;*
von J. S. Sachs.

(Auszug aus der Gießener Dissertation, mit einigen Zusätzen von P. Drude.)

Schon bei Beginn der Versuche mit drahtloser Telegraphie fand man, daß sich die elektromagnetische Energie leichter auf dem Wasser als auf der Erde überträgt und diese Tatsache ist auch später häufig festgestellt worden. Es ist also von vornherein klar, daß die Erde auf das elektromagnetische Feld einer Hertzschen Welle einen gewissen Einfluß ausüben muß, über die Art dieses Einflusses sind aber bisher die Ansichten noch nicht genügend geklärt. Es ist z. B. schon behauptet worden, daß die Erde notwendig für gute Übertragung der elektromagnetischen Energie sei.

Daher habe ich auf Veranlassung von Hrn. Prof. Drude quantitative Versuche in der Richtung angestellt, daß Sender und Empfänger in verschiedener Höhe über dem Erdboden angebracht wurden.

Abgesehen von den Vorversuchen, welche im Präzisionszimmer des Physikalischen Instituts zu Gießen stattgefunden haben, sind alle Messungen auf einem größeren Platze neben dem Institut vorgenommen worden, dessen Lage aus einem Situationsplane ersichtlich ist, welcher der Dissertation beigefügt ist, auf dem auch die Punkte der meisten Versuche eingezeichnet sind.

Allgemeine Anordnung.

Sender und Empfänger wurden nach dem Braunschen System mit elektromagnetischer Koppelung ausgebildet. Da für die vorzunehmenden Messungen die Verwendung eines Kohärers im Empfängerkreise nicht in Betracht kam, und

dieser durch ein Thermoelement ersetzt wurde, so konnten beide Apparate ganz symmetrisch gebaut werden.

Das Induktorium befand sich stets in der Nähe des Gebers und wurde durch eine ca. 25 m, später 50 m lange Leitung aus der Akkumulatorenbatterie des Instituts gespeist, zeitweise auch aus einer direkt daneben aufgestellten Batterie.

Das Thermoelement war durch eine Leitung (zuerst 24 m, dann 50 m, endlich 75 m lang) mit einem Galvanometer verbunden.

Zu erwähnen wäre noch, daß am Geber eine Spule angebracht war, die mit dem Geber nicht in Resonanz stand und deren Zweck war, die vom Geber ausgehende Energie zu messen bez. präziser ausgedrückt, für die Schwankungen der vom Erreger ausgehenden Energie ein Maß zu bilden. Diese, im späteren stets Standard genannte Spule, führte gleichfalls zu einem Galvanometer.

Die Apparate.

Der *Geber* bestand aus einem Primärkreis mit Funkenstrecke und Kondensator und einem Sekundärkreis aus einer Spule mit nach beiden Seiten angehängten Antennen bez. Platten. Die Antennen bestanden aus Messingrohren von 3 m Länge und 1,4 cm Durchmesser.

Auf einem Ebonitring von 87,7 mm äußeren Durchmesser und 3 mm Dicke wurden zehn Windungen isolierten Drahtes, von 0,9 mm blank und 2,4 mm Durchmesser isoliert, aufgewickelt, die Ganghöhe der Windungen betrug 2,4 mm, die Höhe der Spule, gerechnet von Mitte zu Mitte der äußersten Drähte, war 22,2 mm. Die Drahtlänge des aufgewickelten Drahtes, also ohne freie Enden, war 2832 mm.

Die Windungen wurden durch mehrere von beiden Seiten angebrachten Elfenbeinschrauben gehalten, ferner durch vier Ebonithalter, durch welche gleichfalls der aus einer Windung blanken Drahtes von 3 mm Durchmesser und 103 mm Flächendurchmesser bestehende Primärkreis hindurchging. Die Enden der Sekundärspule waren ca. 70 mm lang freigelegt, um daran den Anschluß an die Antennen zu ermöglichen. Die beigefügten zwei Schnitte durch die Spule geben ein anschauliches Bild der Verhältnisse und Konstruktion des Gebers. Die

beiden Zeichnungen (Fig. 1), von denen die eine den Quer-, die andere den Längsschnitt darstellt, sind in $^1/_2$-Originalmaßstab gezeichnet.

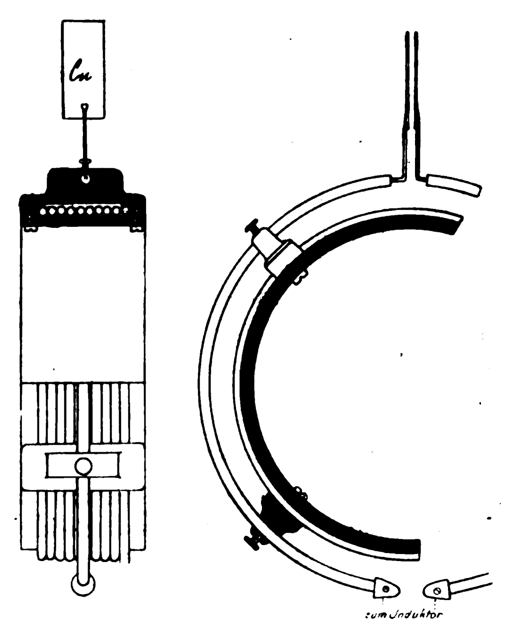


Fig. 1.

Die Berechnung der beiden Kreise auf Resonanz ist nach den Veröffentlichungen von P. Drude erfolgt.[1]

Die Eigenwellenlänge einer Spule ohne angehängte Kapazitäten läßt sich in der Form $^1/_2\,\lambda_0 = f.\,l$ ausdrücken, wenn f ein von $h/2r$ und g/δ abhängiger Parameter ist und l die aufgewickelte Drahtlänge bedeutet. Es ist ferner

h	die Höhe der Spule	= 22,2 mm,
$2r$	der Durchmesser der Spule . . .	= 90 mm[2]),
g	die Ganghöhe	= 2,4 mm,
δ	Durchmesser des blanken Drahtes	= 0,9 mm.

Die Größen $h/2r$ und g/δ sind demnach 0,247 bez. 2,6.

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 293 ff. und p. 590 ff. 1902; **11.** p. 957 ff. 1903.

2) Von Mitte zu Mitte des Drahtes gerechnet.

Daraus bestimmt sich f aus der Tabelle auf p. 822 in der zitierten Arbeit als Mittelwert zwischen Vollkern und Rohr zu 2,16 und

$$\tfrac{1}{2}\lambda_0 = 610 \text{ cm}.$$

Werden an eine solche Spule von beiden Seiten gleiche Antennen angeschlossen, so ändert sich naturgemäß die Eigenwellenlänge eines solchen Gebildes und sie ist zu berechnen nach der Formel

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_0}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} 2\pi\frac{l}{\lambda} = \log\text{vulg}\,\frac{l}{\varrho}\cdot\frac{f}{n}\cdot\sqrt{\frac{h}{2r}}\cdot\varphi,$$

wobei bedeutet

λ_0	die Eigenwellenlänge der Spule ohne Antennen . . .	= 610 cm,
λ	" " " " mit "	
l	die Länge der Antenne	= 800 cm,
ϱ	den Radius der Antenne	= 0,7 cm,
f	den obigen Parameter	= 2,15,
φ	einen anderen, gleichfalls von $h/2r$ und g/δ abhängigen Parameter	
n	Anzahl der Windungen auf der Spule	= 10.

φ ergibt sich unter Berücksichtigung der auf p. 977 der zitierten Arbeit von Drude veröffentlichten Kurve zu etwa 1,72 und demnach ist,

$$\lambda = 3120 \text{ cm}.$$

Die Selbstinduktion eines Primärkreises, der aus einem Drahte der Länge l und der Dicke 2ϱ besteht und eine Kreisfläche vom Radius r bildet, berechnet sich nach der Formel

$$L = 2l\left(\log\text{nat}\,\frac{8r}{\varrho} - 2\right).$$ [1]

Dies ergibt im vorliegenden Falle, wo $l = 32$ cm, $2\varrho = 0{,}15$ cm und $r = 10{,}3$ cm ist

$$L = 230 \text{ cm}.$$

Demnach muß die zugehörige Kapazität nach der Formel

$$\lambda = 2\pi\sqrt{L\,.\,C}$$

$C = 1070$ cm sein.

Da die Wahl auf einen Glasplattenkondensator gefallen ist, in der Hauptsache wegen seiner leichten Transportfähigkeit, so mußte zunächst die Dielektrizitätskonstante der vor-

1) Vgl. z. B. M. Wien, Wied. Ann. 53. p. 931. 1894.

handenen Glassorte bestimmt werden. Die experimentelle Bestimmung derselben erfolgte nach der von Drude[1]) ausgearbeiteten Methode und wurde annähernd gleich 7 gefunden. Die Fläche des Kondensators ergibt sich aus Formel

$$C = \frac{\varepsilon \cdot S}{4 \pi d},$$

wo d die Dicke der Platte, im vorliegenden Falle 1,3 mm, bedeutet, zu 250 cm^2.

Um für die Vorversuche im Zimmer das Hantieren zu erleichtern, wurde gleichzeitig eine Platte aus Zinkblech hergestellt, die den Zweck hatte, eine der Antennen zu ersetzen. Die Größe dieser Platte läßt sich nach der schon zitierten Arbeit von Drude[2]) gemäß der Formel

$$\sqrt{S} = \frac{0{,}603}{\log \text{vulg} \frac{l}{\varrho}} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \operatorname{tg} 2\pi \frac{l - l'}{\lambda}$$

ausrechnen, wenn S die Oberfläche der Platte, l die Länge der Antenne, ϱ der Radius der Antenne, λ die Eigenwellenlänge und l' die Länge des Zuführungsdrahtes zur Platte bedeutet. Da l' zu rund 20 cm gemacht wurde, so ergab sich daraus die Fläche zu rund 5150 cm^2.

Die Berechnung der Apparate ist hier mit Absicht ausführlich angegeben worden, um zu zeigen, wie rasch und wie leicht sie erfolgen kann, nach der Methode von Drude.[3])

Die Erregerfunken sprangen zwischen Zinkstücken über, die auf dem Erregerdraht aufgeschraubt waren (vgl. Fig. 1), und an die auch die Zuführungsdrähte zum Induktor angelötet waren. Derselbe hatte 15 cm Schlagweite ohne Kapazitätsbelastung und Speisung mit 10 Volt und Deprezunterbrecher.

Der *Empfänger* war, wie bereits gesagt, ganz gleich mit dem Geber gebaut, mit dem alleinigen Unterschied, daß an Stelle der Funkenstrecke ein Thermoelement angebracht war. Dieses bestand aus Konstantan und Eisen von je 0,05 mm

---

1) P. Drude, Zeitschr. f. phys. Chem. **33.** p. 282. 1897; Wied. Ann. **61.** p. 466. 1897; Ann. d. Phys. **8.** p. 336. 1902.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. **11.** p. 990. 1903.

3) Vgl. demgegenüber die Ansicht von J. Zenneck, Physik. Zeitschr. Heft 19. 1904.

Durchmesser und war in der Mitte gelötet. Der Widerstand des Elementes, an der Wheatstoneschen Brücke gemessen, ergab einen Wert von 1,14 bis 1,19 Ohm.

Ein ähnliches Element befand sich auch an dem *Standard*, der ursprünglich dicht neben der Geberspule und axial mit ihr angebracht, später aber weiter davon entfernt war. Der Standard bestand aus zehn Windungen isolierten Drahtes von 0,9 mm blank und 2,4 mm isoliert und hatte im übrigen die Dimensionen der Geber- und Empfängerspule. Die Enden der Windungen waren durch ein oben beschriebenes Thermoelement geschlossen. Der Widerstand desselben war 1,02 bis 1,01 Ohm. Nebenbei sei bemerkt, daß ein derartiges Thermoelement bei 0,45 Amp. durchbrennt.

Die *Glasplattenkondensatoren* verursachten ursprünglich viele Schwierigkeiten. Sie bestanden aus 1,3 cm dickem Glase und waren anfangs mit 0,03 mm dicker Zinnfolie durch Schellack beklebt. Nun zeigte sich am Kondensator des Geberkreises die eigentümliche Erscheinung, daß nach ganz kurzem Betriebe sich Blasen bildeten, welche infolge der dadurch verursachten Änderung der Kapazität des Primärkreises ganz erhebliche Verminderung der Übertragungsresultate (bis 25 Proz.!) nach sich zogen. Die Beseitigung der Blasen und damit auch die Herstellung des ursprünglichen Resultates ließ sich zwar leicht bewirken, indem man die Blasen mit einer feinen Nadel anstach und sie an das Glas preßte, doch nahm das viel Zeit in Anspruch und erforderte eine fortwährende Kontrolle des Kondensators. Es wurde vergeblich versucht, durch starke Pressung des Kondensators zwischen zwei dicken Glasscheiben Abhilfe zu schaffen. Das Auftreten der Blasen wurde dadurch zwar vermindert aber nicht beseitigt. Eine nach dem Rezept von Böttger[1]) sehr stark versilberte Glasplatte hat schon nach den ersten Versuchen fast ihre ganze Silberschicht verloren. Endlich wurde 0,1 mm dicke Bleifolie genommen und mit Terpentin an das Glas geheftet. Diese Anordnung hat sich vorzüglich bewährt und hat zu keinerlei Anständen während der ganzen Dauer der Versuche Anlaß gegeben.

Die Kondensatoren wurden mittels der auf Fig. 1 sicht-

1) F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik p. 32. 1901.

baren Kupferblättchen Cu durch eine Ebonitklammer an den Erreger angepreßt.

Um die Möglichkeit zu haben, mit den Apparaten im Freien bei jeder Witterung zu arbeiten, wurden sowohl der Geber wie der Empfänger in einen entsprechenden Holzkasten eingebaut.

Die Erwärmung der Thermoelemente (sowohl des Empfängers als des Standards) wurde durch ein du Bois-Rubenssches Galvanometer (nicht astasiert, d. h. nicht besonders empfindlich gemacht, 13 Sek. Schwingungsdauer) gemessen.

Die *Ablesungen* geschahen in der Hauptsache so, daß zuerst einige Messungen am Standard gemacht wurden, dann einige am Empfänger. Bei einzelnen Versuchen hatten die Herren Drr. W. Schmidt und Conrat die große Liebenswürdigkeit, mir bei der Ablesung zu helfen, wofür ich den Herren auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank sage, und so konnten diese Messungen gleichzeitig für den Standard und Empfänger abgelesen werden. Die Disposition war so im allgemeinen getroffen, daß bei den Versuchen im Freien Geber und Empfänger auf dem Vorhofe des Instituts standen, während das Galvanometer im Präzisionszimmer Aufstellung fand. Wo von dieser Disposition Abweichungen erfolgten, ist dies besonders vermerkt.

Der Speisestrom des Induktors wurde regelmäßig 5 Sek. lang geschlossen.

Die angegebenen Ergebnisse sind Mittelwerte von 4 bis 10 Ablesungen, je nachdem die Werte annähernd konstant waren oder starke Schwankungen aufwiesen. Das letztere trat, nebenbei bemerkt, ziemlich häufig auf.

Die Eichung des Galvanometers mit verschiedenen vorgeschalteten Widerständen, wie sie bei den Messungen gebraucht wurden, wies in dem benutzten Meßbereich eine vollkommene Proportionalität zwischen den Ausschlägen und dem Quadrat der Stromstärke auf, welche (zur Eichung) durch das Thermoelement gesandt wurde.

Zu dem früher auf p. 349 über den Standard Gesagten muß noch folgendes nachgetragen werden. Die Angaben des Empfängers sind nicht genau proportional den Angaben des Standards, wie die folgende Tabelle zeigt, bei welcher die

Lage der Apparate unverändert blieb und nur die Größe der Funkenstrecke am Erreger geändert wurde.

Standard	40,5	54	60	78
Empfänger	157	221	253	324
Verhältnis Empfänger / Standard	3,88	4,1	4,23	4,15

Die Ursache dieser Erscheinung liegt darin, daß sowohl der Standard wie der Empfänger von dem Funkenpotential und der Dämpfung des Senders abhängen, beide aber in verschiedener Weise, weil der Empfänger in Resonanz mit dem Geber steht, der Standard nicht.

Vorversuche.

Im Zimmer aufgenommen, Geber und Empfänger mit je einer Antenne und Platte.

1. Zunächst wurde durch Änderungen der Kapazität im Primärkreise des Gebers und Empfängers untersucht, ob die Apparate in Resonanz standen. Einerseits wurde dies durch

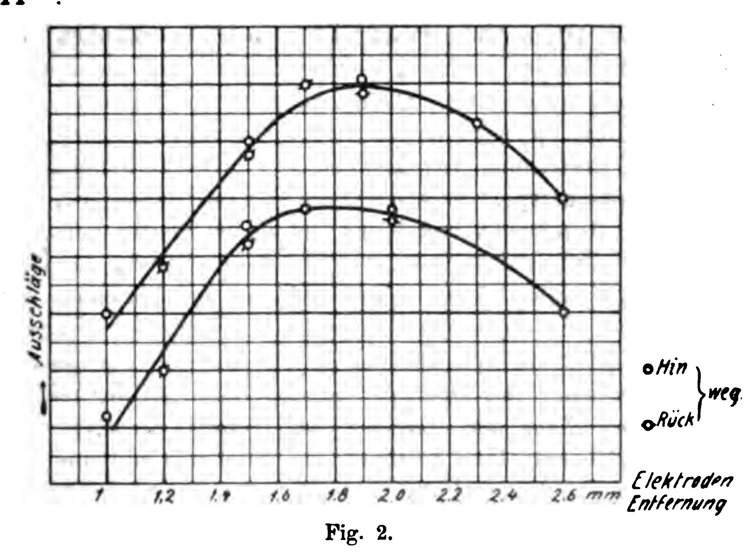


Fig. 2.

die Funkenlänge am Ende der Geberantenne, andererseits durch Ausschläge am Empfänger festgestellt. Die Resultate haben einen ganz eklatanten Beweis dafür erbracht, *daß die*

lediglich auf Grund der früher zitierten Arbeit von Drude berechneten Apparate in scharfer Resonanz standen, da eine geringe Änderung der Kapazität eine Verminderung der Resultate auf etwa 0,2 des Ursprünglichen nach sich zog.

2. Das Optimum der Funkenstrecke ist aus der Fig. 2 ersichtlich. Bei der oberen Kurve war der Strom jeweils 10 Sek., bei der unteren Kurve 5 Sek. geschlossen gewesen.

3. Durch verschiedene Einstellung des Deprezunterbrechers bez. durch Verwendung verschiedener Spannungen zum Speisen des Induktors, konnten die Resultate in ziemlich weiten Grenzen geändert werden.

4. Um den Einfluß der Standardspule auf die Resultate zu ermitteln, wurden mehrere Messungen mit, bez. ohne diese gemacht. Dabei zeigte es sich, daß, selbst wenn der Standard koaxial dicht neben der Geberspule aufgestellt wurde, dies eine Verminderung der Resultate um nur 5 Proz. nach sich zog.

5. Die um die Apparate aufgebauten Kästen haben gar keinen merklichen Einfluß auf die Übertragungsresultate geübt.

6. Über die Messungen im Zimmer, welches 12,5 m Länge, 5 m Breite, $4^1/_2$ m Höhe besaß, wäre noch zu erwähnen, daß bei Untersuchungen darüber, welchen Einfluß die Lage der Antennen und Platten auf die Übertragung ausübt, es sich gezeigt hat, daß dieser je nach der Entfernung variierte. So war z. B. bei einer Entfernung von 280 cm, von Mitte Geberspule zur Mitte Empfängerspule gerechnet, die günstigste Lage die, wenn die beiden Antennen vertikal und die beiden Platten horizontal gerichtet waren und es war dabei eine Vergrößerung der Übertragung gegenüber jeder anderen Lage der Antennen und Platten von ca. 100 Proz. festzustellen. Ging man dagegen in eine Entfernung von 660 cm, so änderte sich das Resultat ganz erheblich. *Das Optimum lag nicht mehr bei der früheren gegenseitigen Lage der Antennen und Platten*, sondern dann, wenn die Geberantenne vertikal, die Empfängerantenne horizontal und die beiden Platten horizontal gerichtet waren, also bei einer ganz unsymmetrischen Anordnung. Der Grund dürfte wohl daran liegen, daß an den Wänden, Leitungen etc. etc., die sich im Zimmer befanden, Reflexionen aller Art stattfanden.

Damit wäre auch der Beweis dafür geliefert, daß aus *Resultaten, die in geschlossenen Räumen gewonnen sind, nur mit*

Vorsicht Schlüsse auf deren Anwendung für die drahtlose Telegraphie zu ziehen sind.

Versuche im Freien.

Dabei wurden die Messungen so vorgenommen, daß die Verbindungslinie zwischen Geber und Empfänger nahezu parallel mit der Front des Institutsgebäudes verlief und die Entfernung von dieser ca. 25 m betrug. Zunächst mußte festgestellt werden, ob bez. welchen Einfluß die Zuführungsdrähte einerseits zum Induktor, andererseits zum Empfänger auf die Resultate ausübten. Es wurde daher eine ganze Reihe von Untersuchungen in folgender Weise angestellt.

Dicht an das Induktorium mit Geber wurde eine Akkumulatorenbatterie hingestellt. In einiger Entfernung davon wurde das Galvanometer für Standardablesungen aufgestellt und nur vom Empfänger führte ein isolierter Draht zum Galvanometer im Zimmer. Es wurde nun einmal der Strom aus der im Freien stehenden Batterie entnommen, ein andermal ein Draht aus dem Zimmer zum Induktorium geführt und dieses aus der Institutsbatterie gespeist. Es mußte dabei aber die Primärspannung jedesmal geändert werden, je nachdem die dicht daneben stehende Batterie benutzt wurde oder der Strom aus dem Institut durch die relativ lange Leitung mit viel Selbstinduktion geleitet wurde.

Es ergab sich, daß man ohne wesentliche Änderung der Resultate[1]) den Induktor durch die Leitung aus dem Zimmer speisen konnte, falls wenigstens die Antennen vertikal standen, während die Drahtleitungen zum Induktor und Empfänger horizontal und nahezu rechtwinklig zur Verbindungslinie Geber–Empfänger lagen. Letztere Nebenbedingung ist wichtig, denn ein in der Verbindungslinie ausgespannter isolierter Draht (auch wenn er vom Empfänger und Geber isoliert ist) vergrößert etwas die übertragene Energie.[2])

---

1) Bezogen auf das Verhältnis: Empfängerausschlag dividiert durch Standardausschlag. Hinsichtlich des genaueren Beweises vgl. die in der Dissertation p. 21 gegebene Tab. 1.

2) Dies ist sowohl theoretisch verständlich als auch experimentell schon mehrfach bewiesen, vgl. z. B. bei P. Drude, Wied. Ann. 65. p. 482. Anm. 1. 1898. In der Dissertation spricht dafür die auf p. 23 gegebene Tab. 2.

Nun wurden Geber und Empfänger mit je einer Antenne und ausbalancierender Platte versehen und *der Einfluß der verschiedenen Lagen der Antennen, Platten und Spulenachse von Geber und Empfänger* untersucht. Folgende Tab. 1 gibt darüber Aufschluß. Es bedeutet — Antenne, ▬ Platte, ꟿ die Spule im Geber bez. Empfänger. Der Standard zeigte bei diesen Versuchen annähernd gleiche Ausschläge.

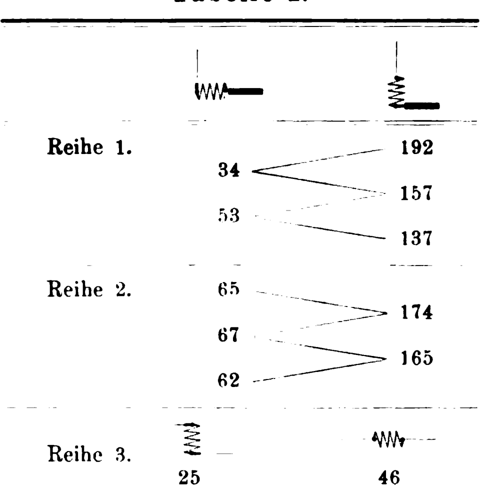
Tabelle 1.

Entfernung zwischen den Apparaten 30 m. Höhe über Erde 1 m.

Nr.	Lage		Ausschläge
1	G	E	71
2	G	E	98
3	G	E	9
4	G	E	5
5	G	E	12
6	G	E	16
7	G	E	165
8	G	E	53

Aus dieser Tabelle ist zu schließen, daß 1. *vertikale Antennen günstiger wirken als horizontale*, was schon bekannt ist; 2. *daß die Lage der Geber- und Empfängerwicklung zur Antenne von großem Einfluß ist*, was bisher nicht bekannt war. Wie aus der Tabelle nämlich hervorgeht, ist die Anordnung 7 bei weitem am wirksamsten, d. h. vertikale Antennen und vertikale Spulenachsen von Geber und Empfänger (vgl. die Anordnung 7 und 2). — Bei horizontalen Antennen sind dagegen horizontale Spulenachsen wirksamer als vertikale, wie der Vergleich zwischen Anordnung 3 und 4 ergibt. Dies Resultat wird auch durch weitere Versuche bestätigt, die abwechselnd nacheinander mit verschiedener Lage der Spulenachsen angestellt sind und die in Tab. 2 angeführt sind. In Reihe 1 bezeichnet z. B.

Tabelle 2.



Reihe 1.		192
	34	
		157
	53	
		137
Reihe 2.	65	
		174
	67	
		165
	62	
Reihe 3.	25	46

192 das Mittel der Ausschläge von sechs Ablesungen bei Anordnung 7 der Tab. 1 (nur daß hier die Platten horizontal lagen, worauf es aber nicht ankommt), während 34 das Mittel aus sechs Ausschlägen bei Anordnung 1 der Tab. 1 bedeutet. Dann ist wieder Anordnung 7 benutzt, die den mittleren Ausschlag 157 ergeben hat etc. Ebenso ist bei Reihe 2 verfahren, nur daß da mit Anordnung 1 angefangen ist. In Reihe 3 bezeichnet 25 den mittleren Ausschlag bei vertikalen, 46 den mittleren Ausschlag bei horizontalen Spulenachsen. Hier sind

anstatt mit ausbalancierender Platte Geber und Empfänger mit je zwei Antennen versehen.

Die Spulenachsen sollen also parallel mit den Antennen sein.

Die Erklärung dieser Erscheinung, daß in diesem Falle die Strahlung am stärksten ist, dürfte wohl darin zu suchen sein, daß in diesem Falle die magnetischen Kraftlinien der Spule parallel zu den elektrischen Kraftlinien der Antenne liegen, daß also durch die Spule keine Veränderung der Strahlung eintritt.

Wenn dagegen die Spulenachse senkrecht zur Antenne liegt, so schneiden die magnetischen Kraftlinien der Spule die elektrischen Kraftlinien der Antenne, es tritt also nach dem Poyntingschen Satze jedenfalls eine Veränderung der Strahlung des Gebers ein.

Es wären weitere Versuche darüber anzustellen, ob in diesem Falle die Dämpfung des Gebers größer ist, als wenn die Spulenachse parallel zur Antenne liegt, und ob die Strahlung nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, was vielleicht möglich ist und für die Zwecke der gerichteten Funkentelegraphie von Bedeutung sein könnte.

Da auf dem Vorhofe sich in einer Reihe drei große und dazwischen ein kleinerer Zwetschenbaum befanden, die im vollen Laube standen, so lag es nahe, den *Einfluß der belaubten Bäume* zu untersuchen. In der Dissertation ist hierüber eine ausführliche Beobachtungstabelle mitgeteilt, aus der hervorgeht, daß Bäume im trockenen Zustande sich ziemlich neutral zu verhalten scheinen, daß dagegen feuchte Bäume als Leiter wirken und die Strahlung teilweise abschirmen.

Ein System mit symmetrischen Doppelantennen (sowohl beim Geber wie beim Empfänger) *ist drei- bis viermal wirksamer als ein System mit je einer Antenne und ausbalancierender Metallplatte.* Dies wird durch die Tab. 3 bewiesen, in der die beobachteten Galvanometerausschläge für beide Anordnungen angegeben sind.

Tabelle 3.

Versuch	Mit Doppelantennen	Mit Antenne u. Platte
Nr. 1	150	50
Nr. 2	300	84

Dies Resultat war zu erwarten, da durch Doppelantennen doppelt so viel Energie ausgestrahlt werden muß, als durch Einfachantenne und Platte, und der Empfänger mit Doppelantennen auch die doppelte Energie aufnehmen muß, als der Empfänger mit Einfachantenne und Platte.

Obgleich es eigentlich gar nicht beabsichtigt war, die Rolle der *Erde als Kapazitätsersatz* zu prüfen, so lag es doch nahe, auch einen derartigen Versuch zu machen. Das Resultat ist in Tab. 4 wiedergegeben. Die Erdverbindung wurde so hergestellt, daß statt der Platte ein Draht von 2 mm Durchmesser mit einer angelöteten Platte von 30 × 20 cm tief in Erde eingegraben wurde.

Tabelle 4.

Geber und Empfänger in 30 m Entfernung.
1 m über Erde.

Geber / Empf. mit Platten	Geb. m. Platte / Empf. an Erde	Geber an Erde / Empf. m. Platte	Geber / Empf. an Erde	Geber / Empf. mit Platten
240	160	95	116	240

Das Nachlassen in der Wirkung bei Kolumne 4 gegenüber 1 und 5 ist ganz eklatant.

Die von Erde isolierten Geber- und Empfängersysteme wirken also besser als an Erde angelegte.[1])

Der Unterschied von Kolumne 2 und 3 dürfte darauf zurückzuführen sein, daß wir im ersteren Falle das Zustandekommen einer richtigen Welle nicht beeinträchtigt haben.

Um nun den *Einfluß* zu prüfen, den die *Erde auf die*

---

1) Anm. von P. Drude: Daß diesem Resultate in der Praxis zum Teil widersprochen werden wird, liegt wohl wesentlich daran, daß die ausbalancierende Gegenkapazität der Antenne nicht richtig dimensioniert wird. In Oberschöneweide bei Berlin scheint die Anordnung trotz der vorhandenen Erdverbindung dem isolierten Geber- bez. Empfängersystem zu entsprechen, weil die große Käfigantenne, die zwischen vier Schornsteinen ausgespannt ist, ausbalanciert wird durch das große Zinkdach des Gebäudes. Ohne große Metallgegenkapazität mit einfacher Erdverbindung kann sich keine so gut definierte Welle ausbilden.

Fortpflanzung der Energie ausübt, wurden die nachstehenden Versuche unternommen. Es wurde dabei von dem Gesichtspunkt ausgegangen, daß wenn die Erde einen Einfluß ausübt, dieser sich mit der Entfernung über der Erde ändern muß. Zuerst wurden daher die Entfernungen, d. h. die Höhen in kleinem Maßstabe variiert, dann in etwas größeren Intervallen. Zu letzterem Zwecke wurden zwei ca. 5 m hohe Holzgestelle gebaut, die leicht transportabel waren und durch je vier Schnüre seitlich gehalten wurden. Auf die seitlich von 1/2 zu 1/2 m angebrachten Streben wurden nun Holzbretter gelegt und darauf die in Holzkästen eingebauten Apparate gestellt. Es erwies sich nun leider, daß bereits bei einer Höhe von 4 m die Aufstellung der Apparate so umständlich und zeitraubend war, daß vom Bau eines noch höheren Turmes abgesehen werden mußte. Mit den Mitteln, wie sie einem physikalischen Institut zur Verfügung stehen, sind derartige Versuche im großen Maßstabe eben nicht leicht durchführbar.

Jeder Versuch wurde so unternommen, daß zuerst von der niedrigsten Lage ausgegangen worden ist und allmählich die höchste Lage erreicht, dann wieder in denselben Zwischenstufen zu der ursprünglichen Ausgangsstellung zurückgekehrt wurde.

Es wurde davon abgesehen, alle Ausschläge auf einen gemeinschaftlichen Maßstab zurückzuführen, da nicht alle Versuche miteinander gut vergleichbar sind. Wo dies angängig ist, ist es geschehen. Im nachfolgenden werden aber die jeweiligen Vorschaltwiderstände von dem Galvanometer angegeben und es sei bemerkt, daß der Ausschlag des Galvanometers sich bei vorgeschalteten 150 gegen 20 und 0 Ohm wie 1 : 4 : 24 verhält. Vor dem Standard waren jeweils 20 Ohm vorgeschaltet.

Von den vielen in der Dissertation mitgeteilten Tabellen, die alle das gleiche Resultat ergaben, *daß die Übertragung in größere Höhe über der Erde viel besser wird*, sollen hier nur drei typische Tabellen wiedergegeben werden. Die Versuche wurden zuerst mit zwischenliegenden Bäumen angestellt, später wurden dieselben abgehauen.

Tabelle 5.

Geber und Empfänger gleichmäßig hoch.

Entfernung 30 m, ohne Bäume. Vorgeschaltet 20 Ohm.
Trockenes Wetter, Frost.

Höhe über Erde	Hinweg		Rückweg		Empfänger dividiert durch Standard	
	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Hinweg	Rückweg
10 cm	93	68	—	—	0,93	—
100	69	182	—	—	2,64	—
200	119	257	79	263	2,16	3,3
250	134	460	—	—	3,44	—
300	116	490	115	316	4,2	2,74
350	108	350	119	315	3,24	2,64
400	110	374	106	280	3,4	2,64
450	118	385	—	—	3,26	—

Tabelle 6.

Geber und Empfänger gleichmäßig hoch.

Entfernung 30 m, ohne Bäume. Vorgeschaltet 20 Ohm.
Trübes, feuchtes Wetter.

Höhe über Erde	Hinweg		Rückweg		Empf. dividiert durch Standard	
	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Hinweg	Rückweg
10 cm	87	76	93	67	0,87	0,72
100	56	119	89	161	2,14	1,81
200	117	182	122	176	1,55	1,44
300	129	188	131	178	1,45	1,36
400	135	207	—	—	1,56	—

Tabelle 7.

Geber und Empfänger gleichmäßig hoch.
Entfernung 30 m, ohne Bäume. Vorgeschaltet 0 Ohm.

Höhe über Erde	Standard	Empfänger	Empf. / Stand.
150 cm	77	22	0,286
400	90	116	1,29
400	73	110	1,51
150	61	16	0,26

Der Vergleich der Tabb. 5 und 6 ergibt, *daß die Erhebung über der Erde bei trockenem Erdboden eine stärkere Steigerung ergibt, als bei feuchtem.* Ferner zeigt die Tab. 7, *daß bei horizontalen Antennen die Erhebung über der Erde noch eine viel stärkere Steigerung ergibt, als bei vertikalen Antennen.* Letzteres Resultat ist ohne weiteres klar, da horizontale Antennen durch Spiegelwirkung der Erde in ihrer Strahlung geschwächt werden, vertikale Antennen dagegen nicht. In genügender Höhe über der Erde wird daher die Wirkung der Horizontalantennen die der Vertikalantennen erreichen.

Daß auch bei Vertikalantennen die Wirkung mit Erhebung über der Erde ansteigt, muß an der elektrischen Leitfähigkeit der Erde liegen, demzufolge die elektromagnetische Energie *absorbiert* wird. Diese Absorption hängt, wie theoretisch leicht zu berechnen ist, von dem Verhältnis der Leitfähigkeit der Erde zur angewandten Wellenlänge ab und erreicht bei einem bestimmten endlichen Verhältnis ein Maximum. Wird die Wellenlänge sehr groß, so kann eine mäßig leitende Erde und vor allem das Seewasser schon die Rolle eines guten Leiters spielen und die Absorption dadurch klein werden. Es ist daher wohl möglich, daß bei den in der Praxis angewandten großen Wellenlängen eine Erhebung der Apparate über die Erde nicht soviel nützt, als bei der hier angewandten Wellenlänge von 31 m, abgesehen davon, daß aus praktischen Gründen diese Erhöhung der Apparate untunlich ist. Ja es ist sogar möglich, daß bei sehr großen Wellenlängen und gut leitendem Seewasser die Annäherung der Apparate an Erde günstig ist, da dann die Erdoberfläche wie eine gut leitende Metallfläche die elektromagnetische Energie fortleiten kann und eine Abnahme der Strahlungsintensität nach der ersten Potenz der Entfernung bewirken kann, während bei kurzen Wellen und schlechter Leitfähigkeit der Erde, d. h. in dem Falle, daß sie mehr die Rolle eines schlechten Isolators spielt, die Wirkung mit der zweiten Potenz der Entfernung abnimmt (vgl. unten p. 371). Bei sehr großen Wellenlängen und gut leitendem Seewasser wäre daher die Ansicht von Lecher[1]) vielleicht berechtigt, daß die Erde bei der Übertragung der elektro-

1) E. Lecher, Physik. Zeitschr. 4. p. 320. 1903.

magnetischen Energie eine wichtige und zwar günstige Rolle spielt, *bei kleinen Wellenlängen und festem Erdboden ist die Rolle der Erde aber nach meinen Versuchen nur eine ungünstige.* Ebenfalls ergab eine Annäherung der Apparate an eine *Böschung* des Erdbodens Verminderung der Wirkung.

Ferner ergaben die Versuche (in der Dissertation sind dafür Zahlentabellen gegeben), daß, wenn man *nur* den Geber über den Erdboden erhebt, kaum eine Steigerung der Wirkung zu bemerken ist, dagegen wohl, wenn man nur den Empfänger hebt. Die Erklärung hierfür dürfte darin zu suchen sein, daß der Geber in der Richtung seiner Achse überhaupt nicht strahlt. Ferner ergab sich das eigentümliche Resultat, daß der Standard bei etwa 1 m Erhebung des Gebers über der Erde ein deutliches Minimum anzeigte, was vielleicht durch die kombinierte Wirkung von Spiegelung und Absorption im Erdboden zu erklären ist. (Genauer ist dies in der Dissertation ausgeführt.) Ich habe auch den Geber auf den 25 m hohen Institutsturm aufgestellt, den Empfänger 3 m über der Erde, in 62 m Luftliniendistanz vom Geber. Es ergab sich eine sehr gute Wirkung, wiewohl deutlich geschwächt wegen der Neigung der Distanzlinie gegen die Äquatorebene des Gebers, in der die Strahlung ja theoretisch am stärksten sein muß.

Folgende Versuche beziehen sich auf *die Schirmwirkung von Personen, Drähten und des Gebäudes.*

Drei Personen, wovon die eine hoch gewachsen, stellten sich abwechselnd an den Geber und Empfänger. Das Mittel aus drei bis vier Ablesungen am Empfänger ergab nun folgendes:

Tabelle 8.

Keine Person in der Nähe	398	Standard wurde am Anfang zwischendurch einmal und am Schluß beobachtet u. ergab einen ziemlich konstanten Ausschlag
3 Personen am Geber	389	
3 Personen am Empfänger	338	
2 Personen am Empfänger; die größte fort	366	
Keine Person	391	
2 Personen am Empfänger	361	
Keine Person	397	

Es scheint hiernach der Empfänger durch die Nähe von Personen stärker beeinflußt zu werden, als der Geber. Dagegen

habe ich bei der Untersuchung der Schirmwirkung von Drähten einen derartigen Unterschied zwischen Geber und Empfänger nicht bemerken können.

Die Schirmwirkung eines Drahtes wurde durch nachstehende Versuche geprüft. Ein ca. 8 m langer Draht von 2 mm Durchmesser wurde in 0,85 m Entfernung vor bez. hinter dem Geber bez. Empfänger parallel zu den Antennen ausgespannt. Oben war der Draht an einer trockenen Holzplatte, die schräg über dem Gestell befestigt wurde, angebracht, so daß er als gänzlich vom Gestell isoliert angesehen werden konnte. Der Draht wurde nun einmal nur in die Erde gesteckt bez. an eine auf der Erde liegende Platte befestigt und in die Erde gesteckt, das andere Mal frei mit ca. 10 cm Abstand von der Erde hängen gelassen. Es wurde darauf geachtet, daß der ausgespannte Draht möglichst in einer Ebene mit den beiden Antennen zu hängen kam.

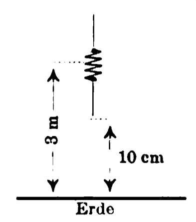


Tabelle 9.

Geber und Empfänger 3 m über Erde.
Entfernung 30 m.
Vorgeschaltet vor Empfänger 150 Ohm, vor Standard 20 Ohm.

	Vor dem Geber			Hinter dem Geber			Vor dem Empfänger			Hinter dem Empfänger		
	Stand.	Empf.	E./St.	Stand.	Empf.	E./St.	Stand.	Empf.	E./St.	Stand.	Empf.	E./St.
Ohne Draht	87	151	1,74	94	150	1,6	89	160	1,8	92	158	1,72
Mit Draht freihängend	93	151	1,64	91	137	1,51	91	146	1,61	92	126	1,37
Mit einfach geerd. Draht	94	136	1,45	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mit Draht an Platte und Erde	98	76	0,78	87	94	1,08	93	70	0,75	93	111	1,2

Ein für die Praxis wichtiges Resultat ist hier zunächst festzustellen, nämlich: *ein von der Erde isolierter Draht übt*

nur sehr geringen dämpfenden Einfluß.[1]) Dies kann u. a. bei Schiffsinstallationen von Wichtigkeit sein.

Ein ganz ähnliches Resultat wies folgender Versuch auf; das Holzgestell, auf dem die Apparate Aufstellung fanden, war, wie bereits erwähnt, mit vier seitlichen Schnüren befestigt. Benutzte man statt der Schnüre je vier Kupferdrähte von ca. 3 mm Durchmesser, so ergab sich folgendes:

Tabelle 10.

Geber und Empfänger 1 m über Erde.

Enfernung 30 m. Vorgeschaltet 20 Ohm.

Drahtbefestigung in 3 m Höhe des Gestelles.

Mit Draht			Mit Schnur		
Standard	Empfänger	Empf. / Stand.	Standard	Empfänger	Empf. / Stand.
71	122	1,72	73	174	2,4

Der größere Einfluß des geerdeten Drahtes gegenüber dem ungeerdeten bez. des gut geerdeten gegenüber dem weniger gut geerdeten ist wohl darauf zurückzuführen, daß durch die Erdverbindung die Eigenschwingung des Drahtes langsamer wird und so der Resonanz mit dem Geber genähert wird. *Im übrigen aber kann auch aus diesem Versuch die Vieldeutigkeit des Begriffes „Erdung" entnommen werden.* Die einzelnen Kolumnen der Tab. 9 sind Mittelwerte aus mehreren hintereinander gemachten Versuchsreihen. Es hat sich dabei gezeigt, daß bei *geerdetem* Draht Ablesungsdifferenzen bis zu 100 Proz. festzustellen waren, während bei *freihängendem* Draht die einzelnen Ablesungen nur um 3 Proz. differierten.

Welch großer Unterschied ist ferner zwischen den Ablesungen in der Horizontalreihe 3 und 4 der Kolumne I!

Wurden die bisherigen Versuche so gemacht, daß Geber und Empfänger parallel zum Gebäude verliefen, so sollte nun auch durch einen Versuch festgestellt werden, welche *Schirm-*

1) Wenn der Draht in Resonanz steht, so verhält sich die Sache natürlich anders. Vgl. J. Zennecks Versuche. Phys. Ztschr. 4. p. 363. 1903.

wirkung bez. Reflexion das Gebäude selbst ausübt. Dazu wurde die Distanzlinie Geber–Empfänger senkrecht zum Gebäude gerichtet, die Apparate in 50 m Distanz voneinander aufgestellt, aber in verschiedenem Abstand vom Gebäude. *a* bezeichnet den Abstand des Gebers vom Gebäude.

Tabelle 11.



Vorgeschaltet 20 Ohm.

a	Standard	Empfänger	Empf. / Stand.
20 m	84	177	2,10
130 cm	93	162	1,74
25 cm	67	101	1,5

Die Versuche sind bei andauerndem sehr starken Regen gemacht worden.

Aus diesem Versuch ist der störende Einfluß von Gebäuden deutlich erkennbar, d. h. ihre durch Reflexion wirkende Abschirmung nach vorn.

Die *Beugung* habe ich im folgenden (Fig. 3) untersucht.

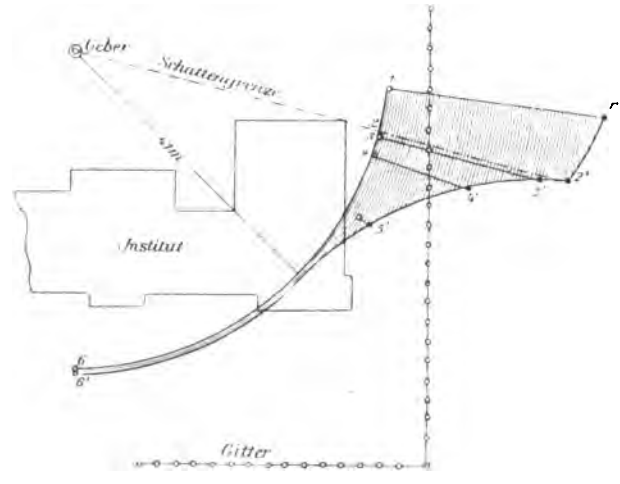


Fig. 3.

Der Geber blieb während der Versuche ständig auf demselben Platze und mit dem Empfänger ging ich um das Institutsgebäude in einem Kreise, vom Radius 41 m, herum. Diejenigen Stellen, an denen der Empfänger bei dem Versuch Aufstellung fand, sind mit den Zahlen 1 bis 6 bezeichnet. Die relative Größe der jeweiligen Ausschläge ist auf der Verlängerung desjenigen Halbmessers, der durch den untersuchten Punkt gezogen ist, vom Kreise ab aufgetragen. Die entsprechenden Ausschläge sind also 1—1', 2—2' etc. Der Punkt 5 konnte nicht genau auf dem Kreisumfange genommen werden, die Größe des Ausschlages in diesem Punkte zählt aber auch vom Kreisumfange an.

Es ist bemerkenswert, wie die Ausschläge sich an der Schattengrenze verhalten und daß es gelang, eine *Wirkung wahrzunehmen, als selbst das ganze Institutsgebäude zwischen Geber und Empfänger stand.*

Um übrigens sicher zu gehen, daß die Verbindungsleitungen zum Induktor einerseits und dem Empfänger andererseits nicht etwa die Träger der Energie waren, wurden auch mehrere Ablesungen mit der dicht am Geber stehenden Batterie unter Weglassung des zum Induktor führenden Drahtes gemacht und sie ergaben fast identische Ablesungen wie bei Anwendung des Drahtes.

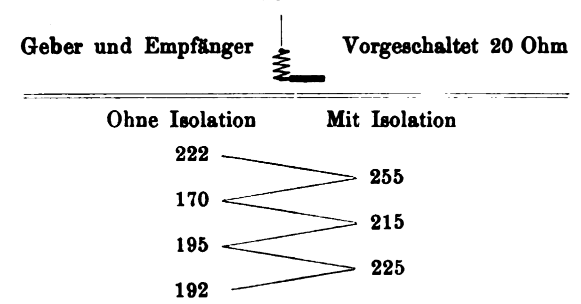
Zu erwähnen wäre hier noch, daß, als ich einen der Apparate im Zimmer aufgestellt und den anderen im Freien gelassen hatte, ich einen Ausschlag am Empfänger überhaupt nicht feststellen konnte. Daher ist der Ausschlag bei der Aufstellung 6 in Fig. 3 so zu deuten, daß nicht *durch* das Gebäude, sondern durch Beugung *um das Gebäude herum die elektromagnetische Strahlung sich fortgepflanzt hat.*

Erwähnenswert ist auch nachstehender Versuch: Das Gestell, auf welchem die Apparate Aufstellung gefunden haben, ist ganz mit Reif bedeckt gewesen, der unter dem Einfluß der Sonne geschmolzen ist. Die Platte eines jeden der Apparate lag nun auf einem Brett direkt und es ergab sich gewissermaßen von selbst, daß geprüft wurde, welchen Einfluß eine eventuelle Isolation der Platte haben mußte. Es wurde daher die Platte einmal direkt auf das nasse Brett, ein anderes Mal

auf einen ca. 5 cm dicken Paraffinklotz gelegt. Die Apparate standen 1 m über Erde bei 30 m Entfernung.

Das Mittel aus je 6 Ablesungen ergab:

Tabelle 12.



Ohne Isolation	Mit Isolation
222	255
170	215
195	225
192	

Der Grund der höheren Ablesungen bei isolierten Platten kann entweder an der schwächeren Dämpfung, oder auch an der Störung der Resonanz durch Vergrößerung der Kapazität der Platten infolge Erdverbindung liegen.[1]) *Es empfiehlt sich daher, alle Teile der Apparate für drahtlose Telegraphie möglichst gut gegen Erde zu isolieren.*

Zum Schluß sei noch eine Reihe von Versuchen erwähnt aus welcher der *Einfluß der Entfernung* ersichtlich ist. Bei diesem Versuch blieb der Geber stets auf seinem Platze stehen und nur der Empfänger wurde verstellt, da aber Bäume noch auf dem Platze standen, so können die Versuche nicht als absolut rein gelten.

Die Versuchsreihe der Tab. 12 deutet darauf, daß der *Integraleffekt* der Übertragung ziemlich genau mit dem Quadrate der Entfernung abnimmt. Auch andere ähnliche Versuche ergaben das gleiche Resultat, trotzdem sind sie nur mit Vorsicht zu gebrauchen, da bei den relativ geringen Entfernungen, die zur Verfügung standen, *absolut* reine Versuche nicht auszuführen waren. Bei einigen Versuchen mußte der Geber ziemlich nahe an das Universitätsgebäude herangerückt werden.

1) Ich finde übrigens bei Prasch, „Fortschritte auf dem Gebiete der drahtlosen Telegraphie", daß der französische Korvettenkapitän Tissot das gleiche Resultat gefunden hat. Leider konnte ich mir, mangels irgendwelcher Literaturhinweise im zit. Buch die Originalarbeit von T. nicht verschaffen.

Tabelle 13.

Empfänger und Geber in ca. 50 cm Höhe.

Vorgeschaltet 20 Ohm.

24 m		18 m		16 m		14 m		12 m		14 m		16 m		18 m	
Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Stand	Empf.
478	111	406	181	415	240	421	290	396	354	400	308	400	246	384	182

	24 m	18 m	16 m	14 m	12 m	14 m	16 m	18 m
Empfänger dividiert durch Standard	0,23	0,45	0,58	0,69	0,88	0,77	0,61	0,47
Empfänger / Standard $\times r^2$	132,48	145,80	148,48	135,24	126,72	150,92	156,16	152,28
Empfänger $\times r^2$	63936	58644	61440	56840	50976	60368	62976	58968

Dies hier gewonnene Resultat kann aber aus dem oben p. 364 erwähnten Grunde bei langen Wellen, besonders wenn über Meerwasser telegraphiert wird, anders ausfallen, indem die Wirkung dort vielleicht nur mit der ersten Potenz der Entfernung abnimmt.[1])

Zusammenfassung der Resultate.

1. Die Erdoberfläche wirkt bei Wellen von 31 m Länge wie ein stark absorbierendes und schwach reflektierendes Medium (p. 364).

2. Der Ersatz einer Kapazität durch Erdverbindung benachteiligt die Übertragung in ganz hohem Maße (p. 361).

3. Die Isolation der Apparate gegen Erde wirkt auf die Übertragung günstig (p. 370).

Es ist daher (mindestens bei kurzen Wellen) empfehlenswert, mit gut gegen Erde isolierten Apparaten möglichst hoch über Erde zu gehen, ohne jede Erdverbindung.

---

1) Diese Ansicht hat Hr. Graf Arco brieflich P. Drude mitgeteilt und obwohl quantitative Versuche hierüber wohl noch nicht angestellt sind, ist die Ansicht doch plausibel.

hervorgeht, als notwendige Konsequenz aus der elektromagnetischen Theorie des Lichtes.

2. Es existieren nun neben den Metallen selbst noch gewisse andere Substanzen, die den elektrischen Strom metallisch leiten. Unter diesen stehen gewisse Kohlensorten wegen der geringen Größe ihrer spezifischen Widerstände den Metallen besonders nahe. Es erschien daher wohl möglich, daß auch für das Reflexionsvermögen der Kohle in gewissen Spektralgebieten ihre elektrische Leitfähigkeit maßgebend sein würde.[1]) Die oben genannte Gleichung (1) gilt freilich nach den Entwickelungen von Planck[2]) nur unter der Bedingung, daß das Produkt aus der im absoluten elektrostatischen Maße gemessenen Leitfähigkeit $\varDelta$ und der Zeitdauer τ der in Frage kommenden elektromagnetischen Schwingungen groß gegen Eins ist. Es ist aber

$$\varDelta \tau = 30 \frac{\lambda}{w} .$$

Der Ausdruck $30(\lambda/w)$ muß also groß gegen Eins sein. In dem uns bisher zugänglichen Gebiete des von einer Wärmequelle emittierten ultraroten Spektrums wird diese Bedingung von der Kohle noch nicht gut erfüllt. Für eine schon recht stark leitende Kohle wäre z. B. $w = 50$ zu setzen; jenes Produkt besäße dann selbst bei $\lambda = 50\ \mu$ erst den Wert 30.

Wenn wir jedoch das Gebiet der Hertzschen Wellen in Betracht ziehen, deren Längen etwa mehrere Zentimeter betragen mögen, so wird die Größe $30(\lambda/w)$ einen genügend hohen Wert erreichen, um die Anwendung der Formel (1) zuzulassen. In diesem Falle müßte daher auch für mäßig gut leitende Kohlen ein Reflexionsvermögen von nahezu 100 Proz. vorhanden sein. Der Versuch zeigte, daß dies in der Tat der Fall ist, daß sich also die im sichtbaren Spektralgebiete als

1) Von J. Königsberger (Phys. Zeitschr. 4. p. 495. 1903) wurde bereits die Absorption und Reflexion von Metallsulfiden und -oxyden im ultraroten Spektrum untersucht. Es zeigte sich jedoch hierbei kein deutlicher Zusammenhang mit dem elektrischen Leitungsvermögen; die spezifischen Widerstände dieser Substanzen sind übrigens im allgemeinen sehr viel größer als diejenigen der gut leitenden Kohlen.

2) M. Planck, l. c.

typisch schwarz bekannte *Kohle gegen Hertzsche Wellen wie ein blankes Metall verhält.*

3. Als Strahlungsquelle diente ein linearer Erreger aus zwei, je 12 mm langen Messingstiften. Vor diesem Primärleiter stand eine Petroleumlinse, durch welche die Strahlen nahezu parallel gerichtet wurden. Als Empfänger wurde ein im Fokus eines Hohlspiegels befestigter Resonator mit Klemenčičschem Thermoelement, das an ein hochempfindliches Panzergalvanometer angeschlossen war, benutzt. Die Wellenlänge der Eigenschwingung dieses Resonators war gelegentlich einer früheren Untersuchung[1]) zu 90 mm bestimmt worden. Der Empfänger stand neben dem Erreger, so daß die Hertzschen Wellen ihn nur erreichen konnten, wenn sie vorher eine Reflexion erfahren hatten. Der Reflexionswinkel betrug bei diesen, sowie bei allen noch zu beschreibenden Versuchen stets etwa 20°. Die ersten Messungen wurden an Gaskohle, wie sie als Elektrode in galvanischen Elementen benutzt wird, angestellt. Zwölf solcher Kohlenstücke wurden auf eine Glasscheibe aufgekittet, so daß eine 30 × 40 cm große Platte entstand, deren Vorderseite alsdann eben abgeschliffen wurde. Da die Kohlen einzeln vorher nicht bearbeitet waren, besaß der Reflektor an den Stoßfugen Stellen von geringerer Reflexionsfähigkeit, so daß die zurückgeworfene Gesamtintensität bei diesen ersten Versuchen ein wenig zu klein erscheinen mußte. Es wurde nun stets alternierend die von der Kohle und andererseits die von einem der Kohlenplatte gleich großen, auf Glas aufgeklebten Stanniolblatte reflektierte Strahlung gemessen; Stanniol besitzt ja wie alle Metalle für diese Wellen ein Reflexionsvermögen von 100 Proz. Es war dafür gesorgt, daß die beiden miteinander zu vergleichenden Reflektoren in allen Fällen die gleiche Stellung zum Erreger einnahmen.

Aus einem der Kohlenstücke war ein Stäbchen herausgeschnitten worden, an dem die elektrische Leitungsfähigkeit des Materials bestimmt wurde. Dem Stäbchen wurde durch Schleifen ein durchweg quadratischer Querschnitt erteilt und die Messungen ergaben einen spezifischen Widerstand $w = 75{,}8$. Demgemäß berechnet sich nach Formel (1) das Reflexions-

1) E. Aschkinass u. Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 5. p. 489. 1901.

vermögen R für $\lambda = 9.10^4\ \mu$ zu 98,9 Proz. Die Beobachtungen lieferten im Mittel den Wert $R = 94$. Die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung ist im Hinblick auf den oben bezeichneten systematischen Fehler ohne Belang.

Ich untersuchte hierauf noch anderes Kohlenmaterial, das mir von der Firma Gebr. Siemens & Co. (Charlottenburg) in entgegenkommendster Weise zur Verfügung gestellt wurde. Von ihrem als Marke 166 bezeichneten Fabrikate erhielt ich eine massive, 20 × 30 cm große Platte. Für diese wurden die genauesten Messungen ausgeführt; sie wurde ebenfalls auf einer Seite plan geschliffen. Für den spezifischen Widerstand dieses Materials lieferten meine Messungen den Wert 114. Hieraus folgt nach Formel (1) $R = 98,7$, während eine längere Beobachtungsreihe als Mittelwert $R = 98,3$ ergab (mit einem mittleren Fehler von 1 Proz.).

Man kann sich noch auf andere Weise davon überzeugen, daß solche gut leitenden Kohlen sich Hertzschen Wellen gegenüber wie Metalle verhalten. Es wurden auf eine Ebonitplatte eine Anzahl Bogenlampenkohlen (von je 7 mm Durchmesser und 35 cm Länge) in einem gegenseitigen Abstande von 14 mm parallel nebeneinander aufgekittet. Wird dieses System in der Weise in den Strahlengang eines Hertzschen Erregers gestellt, daß die Kohlenstäbe der Schwingungsrichtung der elektrischen Kraft parallel laufen, so wird kein merklicher Bruchteil der Strahlungsenergie hindurchgelassen, während bei gekreuzter Lage der Kohlenstäbe eine Schwächung der hindurchtretenden Wellen nicht zu bemerken ist. Das System verhält sich demnach völlig wie ein Hertzsches Drahtgitter.

Ein gleich wirksames Gitter erhält man auch, wenn man die Lampenkohlen durch Bleistifte[1]) ersetzt. Die letzteren können dabei sämtlich ohne Zwischenräume dicht nebeneinander angeordnet werden, da die Graphitkerne durch die Holzmäntel genügend weit voneinander getrennt bleiben.

4. Nachdem sich somit gezeigt hatte, daß die Reflexion der gut leitenden Kohle für Hertzsche Wellen tatsächlich eine ihrem Leitungsvermögen entsprechende Höhe erreicht,

1) Der spezifische Widerstand Faberscher Bleistifte beträgt nach Winkelmanns Handbuch der Physik (1. Aufl. Bd. III 1. p. 283) 952.

erschien es von Interesse, zu prüfen, inwieweit sich auch im ultraroten Spektrum einer Wärmequelle ein Einfluß der elektrischen Leitfähigkeit auf das Reflexionsvermögen bemerkbar machen würde. Ein solcher Einfluß war offenbar am ehesten für ultrarote Strahlen einer möglichst großen Wellenlänge zu erwarten. Aus dem oben erwähnten Grunde kann aber hier die Formel (1) nicht mehr anwendbar sein, vielmehr wird in diesen Spektralgebieten, wo $\Delta\tau$ nicht mehr groß gegen Eins ist, der Zusammenhang zwischen dem Reflexions- und Leitvermögen nach Planck (l. c.) durch die Beziehung

$$(2)\qquad R = 100\,\frac{\sqrt{4\,\Delta^2\tau^2+1}+1-\sqrt{2\left(\sqrt{4\,\Delta^2\tau^2+1}+1\right)}}{\sqrt{4\,\Delta^2\tau^2+1}+1+\sqrt{2\left(\sqrt{4\,\Delta^2\tau^2+1}+1\right)}}$$

dargestellt. Auch diese Gleichung kann aber, den Grundlagen der Theorie gemäß, nur in dem Falle erfüllt sein, daß ein Einfluß von Eigenschwingungen der Elementarteilchen des reflektierenden Körpers nicht in Betracht kommt.

5. Ich untersuchte zunächst die Reflexion für die Reststrahlen des Steinsalzes, die eine Wellenlänge von 51,2 μ besitzen.[1]) Als Strahlungsquelle diente ein Auerscher Brenner ohne Zugglas. Bezüglich aller Einzelheiten der zu diesen und den folgenden Versuchen benutzten Meßmethode verweise ich lediglich auf die zuletzt zitierte Arbeit. Die Reflexion der verschiedenen Substanzen wurde dementsprechend stets mit derjenigen von Silber, für die ja jenseits 12 μ $R = 100$ gesetzt werden darf, verglichen. Zu den Messungen wurden folgende Materialien herangezogen: Gaskohle — von derselben Art, wie sie in den Versuchen mit Hertzschen Wellen benutzt worden war —, ferner die Kohle der Marke 166 von Gebr. Siemens & Co., und außerdem als eine natürliche Kohle der Anthrazit.[2])

Die letztgenannte Substanz besitzt von allen Mineralkohlen den höchsten Kohlenstoffgehalt. Nach den Angaben der Bezugsfirma (Anthrazitwerke Gustav Schulze, Berlin)

1) H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. **65.** p. 241. 1898.

2) Andere Kohlenarten, die gleichfalls untersucht wurden, mögen in dieser Mitteilung unberücksichtigt bleiben, da die an ihnen gewonnenen Resultate ihrem Charakter nach mit den übrigen Ergebnissen durchaus übereinstimmten.

enthält der von mir benutzte englische Anthrazit 94 Proz. Kohlenstoff. Sämtliche Versuchsobjekte wurden möglichst sorgfältig geschliffen und poliert. Eine recht gute Politur ließ sich an der Gaskohle erzielen, während die Siemensschen Kohlen eine weniger vollkommene Oberflächenbeschaffenheit annahmen; hervorragend schön gelang die Politur des auffallend harten Anthrazits, doch war es nicht möglich, Stücke zu erhalten, die völlig frei von Sprüngen gewesen wären. Soweit daher die Resultate von Oberflächenfehlern beeinflußt worden sind, — dieser Einfluß dürfte bei den langen Wellen von 51,2 μ noch kaum zur Geltung kommen, bei den später zu beschreibenden Messungen in Spektralgebieten geringerer Wellenlängen aber schon eher ins Gewicht fallen — wären die erhaltenen Reflexionszahlen als Minimalwerte zu betrachten. In allen *wesentlichen* Punkten bleiben indessen die gewonnenen Versuchsergebnisse von jenen Fehlern unberührt.

Es ergaben sich nun folgende Zahlen für die prozentischen Reflexionen bei $\lambda = 51,2\ \mu$:

	R
Gaskohle	56,5
Siemenskohle Nr. 166	54,5
Anthrazit	13,8

Die beiden künstlichen Kohlensorten reflektieren also von diesen langwelligen ultraroten Strahlen noch über 50 Proz., d. h. etwa ebensoviel wie ein Goldspiegel im sichtbaren Spektralgebiete bei der Wellenlänge 0,6 μ.[1]) Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß dieses starke Reflexionsvermögen durch die hohe Leitfähigkeit der Kohlen bedingt wird.

6. Da dieser Einfluß in dem zuletzt betrachteten Teile des ultraroten Spektrums demnach noch sehr lebhaft in die Erscheinung trat, so entschloß ich mich, die Untersuchung auf das ganze ultrarote Spektralgebiet auszudehnen. Durch viermalige Spiegelung an Flußspat erhält man eine Reststrahlung

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1. 1902.

von der mittleren Wellenlänge $\lambda = 26\ \mu$. Für diese Strahlen waren die Reflexionswerte folgende:

	R
Gaskohle	49,5
Siemenskohle Nr. 166	41,1
Anthrazit	12,8

7. Ein weiterer begrenzter Spektralbezirk läßt sich durch mehrfache Reflexion an Quarzoberflächen isolieren. Ich benutzte vier Reflexionen und ließ die gesamte Strahlung, um die anderenfalls zugleich vorhandene Energie der Wellenlänge 21 μ zu eliminieren, durch eine 5 mm dicke Flußspatplatte hindurchtreten. Bei dieser Anordnung besitzen die restierenden Strahlen eine mittlere Wellenlänge von 8,9 μ, für welche folgende Zahlen gefunden wurden:

	R
Gaskohle	34,8
Siemenskohle Nr. 166	29
Anthrazit	12,2

Da die Gaskohle sowie die Siemenssche Kohle somit selbst noch bei diesen relativ kurzen Wellen ein recht bedeutendes Reflexionsvermögen besitzen (der Wert $R = 35$ entspricht dem Reflexionsvermögen des Goldes für $\lambda = 0,47\ \mu$), so schien es lohnend, wenigstens für die gut polierte Gaskohle, den Verlauf des Reflexionsvermögens auch noch für kürzere Wellen in einem prismatischen Spektrum von Punkt zu Punkt zu verfolgen. Es mußte ja schließlich ein stärkerer Abfall der R-Werte eintreten, da die Reflexion aller Kohlenarten, wie man sich schon mit bloßem Auge überzeugen kann, im sichtbaren Gebiete nur wenige Prozente beträgt.

8. Zunächst wurde zur Ermittelung der genauen Werte, die dem Reflexionsvermögen im sichtbaren Spektrum zukommen, innerhalb dessen natürlich eine merkliche Veränderlichkeit mit der Wellenlänge nicht mehr vorhanden ist, — auch die polierten Kohlen erscheinen ja tiefschwarz — auf optischem Wege

Messungen für Natronlicht ($\lambda = 0{,}589\ \mu$) mit Hilfe eines Glanschen Spektralphotometers angestellt. Von dem Glühfaden einer Nernstlampe trafen die Lichtstrahlen, nachdem sie an einer Spiegelglasplatte eine Reflexion unter 45° erlitten hatten, die zu untersuchenden Reflektoren und gelangten von hier auf den Photometerspalt. Als Vergleichslicht diente ein Strahlenbündel desselben Glühfadens, das durch Reflexion an einer zweiten unter 45° geneigten Spiegelglasplatte auf die andere Spalthälfte geworfen wurde. Die Reflektoren bestanden wieder abwechselnd aus Kohle und aus Silber. Die Messungen lieferten demnach unmittelbar die Reflexionswerte der Kohlen relativ zu demjenigen des Silbers. Durch Multiplikation dieser Zahlen mit dem aus den Hagen-Rubensschen Messungen bekannten Reflexionsvermögen des Silbers für Natronlicht ergaben sich dann die folgenden absoluten Reflexionsgrößen *R* der Kohlenspiegel:

	R
Gaskohle	4,4
(Siemenskohle Nr. 166 . . .	1,4)
Anthrazit	3,7

Die Zahl für die Siemenssche Kohle ist in Klammern eingeschlossen, da sie infolge der mangelhaften Oberflächenbeschaffenheit dieses Materials zweifellos erheblich zu klein ausgefallen ist.

9. Im weiteren Bereiche des roten und ultraroten Spektrums wurde nun noch die Reflexion der Gaskohle untersucht unter Benutzung eines Spiegelspektrometers, dessen Okularrohr mit einer Rubensschen linearen Thermosäule versehen war. Das Spektrum wurde mit Hilfe eines großen Flußspatprismas erzeugt, und als Strahlenquelle diente ein Linnemannscher Zirkonbrenner. Im Gebiete der kürzesten Wellen war zur Beseitigung der schädlichen diffusen Strahlung eine 1 cm dicke Wasserschicht dauernd in den Strahlengang eingeschaltet. Eine solche Wasserschicht läßt bekanntermaßen keine Strahlen jenseits 1,5 μ hindurchtreten.[1]) Von der bisher benutzten Gas-

1) E. Aschkinass, Wied. Ann. 55. p. 401. 1895.

kohle wurde für die neuen Versuche ein kleineres Stück herausgesägt. Das letztere, sowie ein Silberspiegel wurden gegen je eine der beiden gleich großen Öffnungen eines Doppeldiaphragmas gekittet, das längs einer Schlittenführung vor dem Spektrometerspalte hin und her geschoben werden konnte, so daß die Strahlen alternierend auf einen der beiden Reflektoren auffielen. Die ganze Versuchsanordnung stimmte mit der in einer früheren Arbeit beschriebenen[1]) überein. Die unmittelbar beobachteten Reflexionsgrößen wurden wieder nach Maßgabe des Reflexionsvermögens des Silbers für die einzelnen Wellenlängen korrigiert.

λ	0,585	0,8	1	2	4	6	8
R	4,4	10,5	12,2	17,4	22,4	27,7	32,5

In obiger Tabelle ist von sämtlichen ausgeführten Beobachtungen nur eine beschränkte Anzahl wiedergegeben, da es mir hier nur darauf ankommt, den charakteristischen Verlauf der Reflexionskurve zu kennzeichnen.

10. Besonders bemerkenswert erscheint die Tatsache, daß die Reflexion der Gaskohle schon an der Grenze des sichtbaren Spektrums rapid ansteigt, um von nun an, wie die Gesamtheit unserer Versuche lehrt, durch das ganze Ultrarot hindurch bis ins Gebiet der Hertzschen Wellen stetig weiter zu wachsen. Ein derartiges Verhalten, daß eine optische Größe innerhalb eines so enormen Spektralbereiches eine regelmäßige, tatsächlich *beobachtbare* Veränderung erleidet, ist meines Wissens bisher noch in keinem Falle festgestellt worden. Allerdings nimmt auch das Reflexionsvermögen der Metalle in Wahrheit mit wachsender Wellenlänge immer weiter zu, doch entzieht sich dieses fortdauernde Anwachsen schon im äußersten Teile prismatischer Spektra der Beobachtung, da die Metallreflexionen sich hier bereits von der Zahl 100 Proz. praktisch nicht mehr unterscheiden lassen, und ebensowenig ist noch ein Unterschied gegenüber dem Verhalten gegen Hertzsche Wellen zu konstatieren. Das Reflexionsvermögen der Kohle muß dagegen selbst *innerhalb* des Bereiches der Hertzschen

1) E. Aschkinass, Ann. d. Phys. 1. p. 57. 1900.

Wellen noch eine wahrnehmbare Veränderlichkeit aufweisen. Ist z. B. der wahre Reflexionswert der Siemensschen Kohle für die von uns benutzten Wellen von 9 cm gemäß der Gleichung (1) 98,7 Proz., so beträgt er für die kürzesten der bisher beobachteten Wellen dieser Art von 4 mm Länge, nach derselben Formel berechnet, nur noch 93,8 Proz.

11. Ganz anders verhält sich aber der Anthrazit. Aus den mitgeteilten Zahlen ist zu ersehen, daß sein Reflexionsvermögen von $\lambda = 8{,}9\ \mu$ bis $\lambda = 51{,}2\ \mu$ eine relative Zunahme von nur 13 Proz. erfährt, während dasjenige der Gaskohle innerhalb derselben Grenzen relativ um 62 Proz. anwächst. Eine Ähnlichkeit zwischen den beiden Substanzen besteht nur insofern, als auch beim Anthrazit der Abfall zu dem im sichtbaren Gebiete gültigen R-Werte erst unmittelbar an der Grenze des ultraroten Spektrums erfolgt. Diese Tatsache wurde in der Weise erkannt, daß sein Reflexionsvermögen für die durch Glas filtrierte Gesamtemission eines Auerschen Brenners bestimmt wurde. Als maßgebende Wellenlängen kann man in diesem Falle mit genügender Annäherung die Werte $\lambda = 1$ bis $2\ \mu$ betrachten, und es wurde hierfür die Zahl $R = 11$ Proz. beobachtet. Innerhalb des ganzen Spektralbereiches bis $51{,}2\ \mu$ steigt die Reflexion des Anthrazits also nur um einen geringen Betrag, nämlich bis auf etwa 14 Proz. Dieser Umstand legte die Vermutung nahe, daß auch die elektrische Leitungsfähigkeit dieses Materials von einer geringeren Größenordnung als diejenige der Gaskohle wäre, und diese Erwartung hat sich denn auch in der Tat bestätigt.

An mehreren Anthrazitstäbchen von bestimmten Dimensionen wurden Widerstandsmessungen ausgeführt, aus denen sich für den spezifischen Widerstand der Wert $w = 2 \,.\, 10^{10}$ ergab. Die Leitfähigkeit dieser Substanz besitzt demnach eine so geringe Größe, daß ein merklicher Einfluß derselben auf das Reflexionsvermögen selbst für die längsten Wellen nicht mehr erwartet werden kann. Im Einklange mit dieser Schlußfolgerung lieferten nunmehr auch weitere Messungen am Anthrazit für Hertzsche Wellen von 9 cm Länge einen Reflexionswert $R = 14$ Proz., d. h. den gleichen Betrag, der zuvor für $\lambda = 51{,}2\ \mu$ gewonnen worden war.

Der Anthrazit schien sich mithin Hertzschen Wellen

gegenüber wie ein Dielektrikum zu verhalten. Dann war aber vorauszusehen, daß er auch eine erhebliche Durchlässigkeit für die Strahlen elektrischer Kraft besitzen würde, und dies bestätigten auch die Versuche. Bei Einschaltung einer Anthrazitplatte in den Strahlengang trat nämlich nur eine Intensitätsschwächung von solcher Größe ein, wie sie dem Verluste durch Reflexion allein entsprach.

Unter diesen Umständen kann man nun aber aus dem Reflexionsvermögen nach der Fresnelschen Formel

$$\frac{R}{100} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

den Brechungsexponenten n des Anthrazits für $\lambda = 9$ cm berechnen. Auf diese Weise ergibt sich im vorliegenden Falle $n = 2,2$.

Bekanntlich findet sich der Kohlenstoff in der Natur in seiner reinsten Form kristallisiert als Diamant vor, der in elektrischer Beziehung zu den Nichtleitern gehört. Auch der Anthrazit zeichnet sich, wie bereits bemerkt wurde, durch einen sehr hohen Gehalt an Kohlenstoff aus und nach unseren Beobachtungen ist sein Leitvermögen außerordentlich gering. Dem Diamant steht er auch insofern nahe, als sein Härtegrad recht bedeutend ist. Da der optische Brechungsexponent des Diamanten 2,4 beträgt, und da er im ultraroten Spektralgebiete wohl kaum eine Stelle anomaler Dispersion besitzen dürfte, so erscheint es naheliegend, zu vermuten, daß der oben für Anthrazit ermittelte Wert von n auch dem Diamanten zukommen werde. In der Tat beträgt die Dielektrizitätskonstante des Diamants 5,5 [1]), woraus sich $n_\infty = 2,3$ ergibt.

Wie ich mich durch Benutzung der Methode der vielfachen Reflexionen überzeugte [2]), besitzt der Anthrazit im ultraroten Spektrum keine Eigenschwingungen. Um so auffälliger erscheint es in Anbetracht seiner geringen elektrischen Leitfähigkeit, daß sein Reflexionsvermögen vom sichtbaren Spektrum an bis zu $\lambda = 51,2\,\mu$ mit wachsender Wellenlänge stetig zunimmt. Ein derartiges Verhalten ist offenbar theoretisch schwer zu deuten. Man könnte zunächst versucht

---

1) W. Schmidt, Ann. d. Phys. **11.** p. 118. 1903.

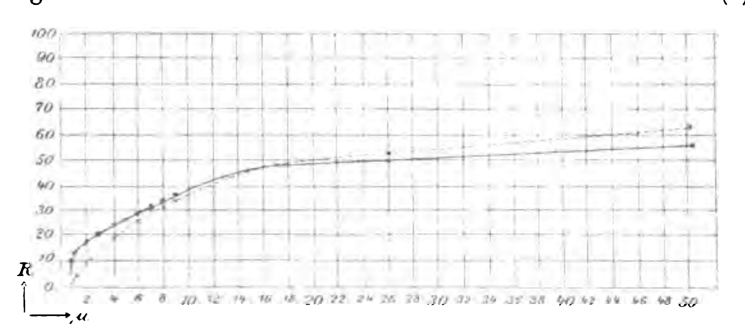
2) Vgl. E. Aschkinass, Ann. d. Phys. **1.** p. 46 u. ff. 1900.

sein, diesen eigenartigen Verlauf auf Unvollkommenheiten der reflektierenden Oberflächen zurückzuführen, da solche Fehler ja die Reflexionswerte um so stärker herabdrücken, je kleiner die Wellenlänge wird. Die in Frage kommenden Differenzen sind aber viel zu groß, als daß sie auf diese Weise erklärt werden könnten, zumal die Beobachtungen an verschiedenen Stücken des Materials stets die gleichen Resultate lieferten. Vor allem spricht aber der steile Abfall der Reflexionskurve an der Grenze des sichtbaren Spektralgebietes gegen jene Deutungsweise.

12. In der folgenden Tabelle sind meine sämtlichen Beobachtungen noch einmal übersichtlich zusammengestellt und die ausgezogene Kurve der Figur soll den Verlauf der für Gaskohle gewonnenen Reflexionswerte zwischen 0,589 und 51,2 μ graphisch veranschaulichen.

	w	R										
		$\lambda = 0{,}589$	0,8	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	8,9	26	51,2	$9 \cdot 10^4\,\mu$
Gaskohle beob.	75,8	4,4	10,5	12,2	17,4	22,4	27,7	32,5	34,8	49,5	56,5	(94)
Gaskohle ber.	75,8	1,3	2,2	3,3	9,0	19,0	26,3	31,7	33,7	53,3	64,1	98,9
Siemens-kohle beob.	114	(1,4)	—	—	—	—	—	—	29	41,1	54,5	98,3
Siemens-kohle ber.	114	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	98,7
Anthrazit, beob.	$2 \cdot 10^{10}$	3,7	—	—	—	—	—	—	12,2	12,8	13,8	14

Bei der Gaskohle (w = 75,8) habe ich auch für alle Wellenlängen die Größe von R nach der theoretischen Formel (2)



berechnet; die berechneten Werte sind in der Figur durch die gestrichelte Kurve dargestellt. Im großen und ganzen wird

man die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung als wohl befriedigend bezeichnen dürfen. Es muß dahingestellt bleiben, worauf die noch vorhandenen Differenzen zurückzuführen sind. Zum Teil mag wohl ein Einfluß der dem ultravioletten Spektralgebiete angehörigen Eigenschwingungen in Frage kommen; vielleicht spielen auch Inhomogenitäten des Materials eine gewisse Rolle.

13. Jedenfalls geht aber aus der Gesamtheit der Beobachtungen zur Genüge hervor, daß das Reflexionsvermögen der Kohle fast im ganzen Spektrum so gut wie ausschließlich durch die elektrische Leitungsfähigkeit bestimmt wird. Es ergibt sich ferner, daß die leitenden Kohlen im ultraroten Gebiete gar keine Ähnlichkeit mehr mit einem schwarzen, noch auch mit einem „grauen" Körper besitzen. Diese Tatsache dürfte wohl auch für die Frage der Ökonomie gewisser Lichtquellen nicht ohne Bedeutung sein. In den Leuchtflammen spielt die Reflexion freilich kaum eine Rolle, da sich die Kohle hier in außerordentlich fein verteiltem Zustande befindet. Anders ist es aber vielleicht schon beim Kohlenbogenlicht — wenn die Erscheinungen auch in diesem Falle durch den Einfluß der Verbrennung wieder modifiziert werden mögen —, und vor allem bei der Kohlenfadenglühlampe. Bei dieser muß die Reflexion zweifellos eine wichtige Rolle spielen, und da erscheint es günstig, daß sie, wie sich gezeigt hat, unmittelbar hinter dem sichtbaren Spektralgebiete zu immer höheren Werten ansteigt.

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung habe ich des näheren ausgeführt [1]), daß die Gesetze der Wärmeemission blanker Metalle in weitem Umfange durch ihr elektrisches Leitungsvermögen bestimmt werden, und daß u. a. die Metalle mit steigender Temperatur im ultraroten Spektrum immer schwärzer werden, da sie einen positiven Temperaturkoeffizienten ihres Widerstandes besitzen. Im Gegensatze hierzu nimmt nun der Widerstand der Kohle bekanntlich mit wachsender Temperatur ab. Soweit ihre Reflexion also von der Leitfähigkeit abhängt, wird sie um so größer werden, je höher die Temperatur steigt; die Kohle wird also im Ultrarot mit wachsender Temperatur immer

---

1) E. Aschkinass, Ann. d. Phys. **17**. p. 960. 1905.

blanker. Infolgedessen wird der relative Anteil der unsichtbaren Strahlungsenergie in der Gesamtemission eines Kohlefadens bei hoher Temperatur wahrscheinlich noch erheblich geringer ausfallen, als man nach dem Resultate der bei Zimmertemperatur ausgeführten Reflexionsmessungen an und für sich zu erwarten hätte. Voraussichtlich steigt also mit wachsender Temperatur die Ökonomie einer solchen Lichtquelle in noch viel stärkerem Maße als die eines absolut schwarzen Körpers.

Ferner müßte sich beim Vergleich der Emissionen eines Metalles und einer gleich temperierten Kohle zeigen, daß bei langen Wellen und hohen Temperaturen die Strahlung der letzteren die des Metalles bei weitem nicht in so hohem Grade übertrifft, wie innerhalb des sichtbaren Spektralbereiches. Man sieht aber ohne weiteres ein, daß für die Wärmeemission der Kohle viel kompliziertere Strahlungsgesetze gelten werden als für schwarze oder für metallische Körper.

Charlottenburg, Physik. Inst. der Techn. Hochschule, August 1905.

(Eingegangen 11. September 1905.)

7. *Über Flüssigkeitsbewegungen, welche durch Rotation fester Körper verursacht werden; von A. L. Holz.*

Auf die Analogie der Wirbelbewegungen des Wassers mit den elektromagnetischen Wirkungen elektrischer Ströme hat H. v. Helmholtz in seiner Untersuchung: „Über die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“[1]) zuerst hingewiesen und die Gesetze entwickelt, welchen die geradlinigen und kreisförmigen Wirbelfäden unterworfen sind.

Die hieraus gewonnenen Resultate schienen mir für die Kenntnis der mechanischen Vorgänge, die zunächst bei magnetischen Anziehungskräften stattfinden, von solcher Bedeutung, daß ich eingehende Versuche über Wirbelbewegungen angestellt habe und zu dem Ergebnis gelangt bin, daß durch Rotation fester Körper, welche zur Lösung meiner Aufgabe in geeigneten Formen angewendet wurden, ähnliche Wirbelfiguren erzeugt werden können, wie uns solche an den Kraftlinien der stab- und kugelförmigen Magnete bekannt sind. Man nimmt an, daß diese Kraftlinien aus dem Nordpol eines Stabmagneten heraustreten und symmetrisch im Bogen nach dem Südpol hinziehen, von diesem durch die magnetische Achse den Nordpol erreichen, um aus demselben sich wieder nach dem Außenraum zu bewegen; in diesem Sinne wird die Bewegung der Kraftlinien so lange fortgesetzt, bis sie durch geeignete Kräfte geändert oder vernichtet wird.

Durch die in vorliegender Mitteilung beschriebenen Versuche kann man eine Bewegung der Wasserteilchen herstellen, die eine ähnliche Wirbelform erzeugt, wie sie die magnetischen

---

1) H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen 1. p. 101.

Kurven besitzen, wobei wir jedoch, wenn wir eine Verwandtschaft beider Formen annehmen, berücksichtigen müssen, daß einige Begleiterscheinungen, die nur bei unseren Versuchen und nicht an magnetischen Kurven gefunden werden, in unserer Versuchsanordnung ihren Grund haben und zwar in erster Reihe in der Form des angewendeten Apparates und der von festen Wänden eingeschlossenen Flüssigkeit, während die magnetischen Kraftlinien in einem unbegrenzten Raum im Äther erzeugt werden, der alle Körper zu durchfließen imstande ist; ziehen wir noch den Einfluß der Schwere des Wassers und den des Luftdruckes auf dasselbe in Betracht, dann wird die Ursache der Verschiedenheit beider Erscheinungen zum großen Teil in der Verschiedenheit der beiden Materien zu suchen sein.

Das Ergebnis der Untersuchung ist folgendes:

1. Findet in einer Flüssigkeit die Rotation einer Kreisplatte um ihre Achse statt, die senkrecht zur Kreisebene steht, so bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen oberhalb wie unterhalb der Platte vertikal zu ihrer Ebene hin; es steht deshalb die Bewegungsrichtung der Flüssigkeit senkrecht zur Ebene der rotierenden Platte und allgemein bei allen zur Untersuchung angewendeten Körpern, auch senkrecht zur Ebene der mit ihr parallel liegenden Flächenteilchen rotierender Körper.

2. Wird ein geeigneter Hohlkörper in einer Flüssigkeit in Rotation versetzt, so ziehen bei einer bestimmten Richtung der Rotation die Teilchen der Flüssigkeit von oben hinein und in Richtung der Rotationsachse von unten heraus, um im Bogen um den Körper an die obere Öffnung desselben zu gelangen; kehrt man nur die Rotationsrichtung des Körpers um, so findet auch die Bewegungsrichtung der Wasserteilchen im entgegengesetzten Sinne statt, es strömen dann die Teilchen von unten in den Rotationskörper hinein und ziehen durch die Achse von oben heraus.

3. Während der Rotation der angewendeten Hohlkörper zeigen die in Bewegung befindlichen Wasserteilchen das Bestreben, nach dem Mittelpunkt der Rotationsachse des rotierenden Körpers hinzuziehen, wodurch eine radiale Strömung der Flüssigkeitsteilchen erzeugt wird. Die an die Rotationsachse hinströmende Flüssigkeit besteht aus den Wirbelfäden, die sich

um die Wirbelachse spiralförmig herumbewegen und bei fortgesetzter Rotation einen Kreislauf vollziehen; ein Teil der heranströmenden Wirbelfäden wird von den festen Teilen des Rotationskörpers aufgefangen und ihrer Fortbewegung zur Rotationsachse zu gelangen, Widerstand geleistet; diese abgestoßenen Flüssigkeitsteilchen bewegen sich in Richtung der Rotation entweder auf- oder abwärts vor dem Außenraum des Rotationskörpers und ziehen bei fortgesetzter Rotation im Bogen herum, als wären sie auf dem Wege durch die Rotationsachse aus einem Pol herausgekommen. Dieser Vorgang lehrt, daß fortdauernd Flüssigkeitsteilchen nach einem Rotationszentrum hinströmen können, ohne eine Überfüllung an demselben zu verursachen.

4. Die durch Rotation bewegte Flüssigkeit bildet rings um den Rotationskörper einen Wirbel, dessen Achse durch das Innere des Rotationskörpers läuft; die Fäden, aus welchen dieser Wirbel besteht, bewegen sich in Ebenen, die senkrecht zur Rotationsrichtung des rotierenden Körpers stehen. Bringt man in die Teile der Flüssigkeit, welche an den Rotationskörper heranströmt, rings um denselben an dünnen Fäden hängende Körperchen, so werden, wie vorauszusehen ist, letztere in radialer Richtung an den rotierenden Körper hingezogen.

Zu diesen Untersuchungen benutzte ich ein dem Zimmeraquarium ähnliches Wasserbecken, dessen vier Wände aus 60 cm breiten und 40 cm hohen Glasscheiben bestanden. An zwei gegenüberstehenden Teilen des Eisenrahmens befanden sich nach oben gerichtete Eisenstäbe zur Aufnahme der Umdrehungsachse, die eine Kreisscheibe von 17 cm Durchmesser trug, durch welche die Umdrehung auf eine horizontal liegende Kreisscheibe von 3 cm Durchmesser übertragen werden konnte, in deren Achse ein Messingrohr zur Aufnahme der Führungsstäbe sich befand, an welchen die Rotationskörper befestigt waren. Auf den beiden anderen Teilen des oberen Eisenrahmens befand sich ein als Brücke dienender Stab, auf dem die kleinere Kreisscheibe befestigt war. An einem Ende der Umdrehungsachse stand senkrecht auf einer Kreisscheibe die Kurbel, durch welche die an den Führungsstäbchen hängenden Körper in Rotation versetzt werden konnten.

Zur Beobachtung der Bewegung der Wasserteilchen wurde

für den ersten Teil der Untersuchungen Bernsteinsand in das Wasser geschüttet, später jedoch weiße Papierschnitzel in der Größe von 1 bis 1,5 mm im Quadrat zu gleichem Zweck verwendet.

Um die vertikale Strömung der Wasserteilchen zur Ebene der rotierenden Kreisscheibe zu erhalten, ist es erforderlich, die Flüssigkeit stets zur Ruhe kommen zu lassen, bevor die erneute Rotation beginnt, denn die durch vorhergehende Versuche dem Wasser erteilte Bewegung, die noch einen entsprechenden Zeitraum nach dem Aufhören der Rotation vorhanden ist, wirkt sehr störend und läßt eine präzise Vertikalbewegung der Wasserteilchen nicht aufkommen. Befinden sich dieselben in Ruhe, so beobachte man hauptsächlich die ersten Rotationen der Kreisplatte, an welche die Flüssigkeitsteilchen von unten auf- und von oben abwärts in vertikaler Richtung hinziehen; bei fortgesetzter Rotation geht die vertikale Strömung der Teilchen in eine immer weiter sich ausdehnende spiralförmige über, die jedoch ebenfalls das Bestreben zeigt, die Wasserteilchen an die rotierende Platte heran zu bewegen.

Der Durchmesser der Kreisplatte, mit welcher die meisten Rotationsversuche angestellt wurden, betrug 15 cm, doch auch kleinere und größere Platten wurden im Laufe der Untersuchungen benutzt, die alle dieselben Resultate ergaben.

Um die Bewegungen der Flüssigkeitsteilchen zu beschleunigen und dieselben in größerer Menge in Bewegung zu bringen, waren die Rotationsplatten an ihrem Umfang an einigen Stellen mit sehr kleinen Zacken versehen; der Führungsstab stand senkrecht zur Ebene der Kreisplatte mit dieser fest verbunden und wie bei allen anderen Rotationskörpern in der Hülse befestigt, welche in der Achse der auf der Brücke sitzenden kleineren Kreisscheibe sich befand. Der Führungsstab konnte in der Hülse auf- und abwärts verschoben werden, wodurch die Höhe des Rotationskörpers im Wasser nach Erfordern geändert werden konnte.

Wird eine hohle Kugelhaube auf gleiche Weise wie die Kreisplatte in Rotation versetzt, so ziehen die Flüssigkeitsteilchen von allen Seiten *in radialer Richtung* an den Rotationskörper hin; denkt man sich in den Strömungsrichtungen die

einzelnen Wirbelfäden oberhalb der Kugelhaube durch die Fläche hindurch verlängert oder ihren Weg fortgesetzt, so würden sie die Rotationsachse erreichen.

Setzen wir einen Hohlzylinder, in dessen Achse der Führungsstab sich befindet, in Rotation und ist am oberen wie am unteren Kreisumfang ein entsprechend dünner Kranz mit 1 cm großen Zacken befestigt, die alle nach einer bestimmten Richtung aufgebogen sind, so ziehen die Wasserwirbel in das Innere des Zylinders von einer Seite hinein, bewegen sich durch die Rotationsachse und kommen auf der entgegengesetzten Seite heraus, um außerhalb des Zylinders im Bogen wieder an die Eintrittsstelle zu gelangen. Wollen wir diese Bewegungsrichtung umkehren, so müssen wir die Rotationsrichtung ändern und den Zylinder nur in entgegengesetzter Richtung in Rotation bringen, wie bereits im zweiten Satz bemerkt wurde. Bei diesem Vorgange beobachten wir, daß die austretenden Wirbel nicht mehr in derselben Menge erscheinen, wie die eintretenden, und daß ein Teil derselben durch die Widerstände, die im Innern des Rotationskörpers vorhanden sind, in ihrer Bewegungsrichtung verändert wird. Der zu diesen Versuchen dienende Hohlzylinder hatte einen Durchmesser von 7,5 cm und eine Höhe von 6,9 cm. Bezeichnen wir die Austrittsstelle der Wirbelfäden mit *Nordpol*, die Eintrittsstelle mit *Südpol*, so können wir durch Umkehrung der Rotationsrichtung die beiden Pole umkehren. Wenn die erste Rotation, welche oben den Nordpol erzeugte, eine rechtsdrehende war, so werden wir an derselben Stelle einen Südpol herstellen, wenn eine linksdrehende Bewegung stattfindet. Dieser Versuch erinnert uns an die Umkehrung der magnetischen Pole durch Umkehrung des elektrischen Stromes beim Magnetisieren eines Stabmagneten.

Während der Rotation der Hohlkörper ziehen die austretenden und die übrigen außerhalb der Körper befindlichen Flüssigkeitsteilchen im Bogen bis an die Wände des Wasserbeckens, um wieder nach fortgesetzter Bewegung an den Rotationskörper zu gelangen. Bei andauernder Rotation nimmt die Wasserschicht, welche durch Adhäsion mit den Körpern zusammenhängend rotiert, immer mehr und mehr zu und die heranströmenden Wirbelfäden und weiteren Flüssigkeitsteilchen

bewegen sich deshalb ebenfalls in einem immer größer werdenden Bogen um den Rotationskörper herum, weshalb die heranströmenden Wasserteilchen, die in radialer Richtung die Fläche der rotierenden Körper zu erreichen bestrebt sind, von der zunehmenden Wasserschicht in ihre rotierende Bewegung mitgenommen werden und dann ebenfalls in einem weiten Bogen um den Rotationskörper ihren Weg fortsetzen. Werden in diese Flüssigkeitsbewegungen an dünnen Fäden hängende Körperchen herabgelassen, so ziehen die letzteren ganz im Sinne der bewegten Flüssigkeitsteilchen zuerst radial und dann im Bogen um den Rotationskörper herum.

Dasselbe Resultat, welches durch die Rotation des Hohlzylinders geliefert wird, erhalten wir mit der Hohlkugel, wenn wir rings um die beiden Polausschnitte ähnliche nach einer Seite aufgebogene Zacken anbringen, wie dies bei dem Zylinder stattgefunden hat; es erscheinen nur infolge der Krümmung der Kugeloberfläche die radial heranströmenden Wirbelfäden in entsprechenden Neigungen, die jedoch an den Körpern schärfer hervortreten, an welchen die mit Zacken versehenen Ringe fehlen, die nur den Zweck hatten, eine Umkehrung der Pole sichtbar zu machen.

Bei den bis hierher beschriebenen Versuchen spielt die feste Fläche des Rotationskörpers eine störende Rolle, wenn man die Erscheinung der radialen Bewegung der Wasserteilchen möglichst gut ausgeprägt erhalten will, denn die erwähnte Fläche, an welcher durch Adhäsion die anliegende Flüssigkeitsschicht hängt, verursacht, wie bereits auf p. 391 näher beschrieben, bei fortgesetzter Rotation ein Anwachsen weiterer Wassermengen, die mit dem Körper in Rotation gelangen und eine Annäherung der radialen Strömung an die Fläche der Rotationskörper zu verhindern suchen; in solchem Falle beobachtet man, wie die herabhängenden Körperchen, sobald sie in die Nähe der rotierenden Wassermasse gelangen, nicht mehr die begonnene Richtung der radialen Bewegung beibehalten, sondern im Bogen um den Rotationskörper und zwar in Richtung des rotierenden Wassers herumziehen. Diesen Einfluß der undurchdringlichen Fläche suchte ich dadurch zu vermindern, daß ich Rotationskörper anwendete, die aus dünnen Flachringen bestanden und aus dem schwächsten, käuflichen

Eisenblech geschnitten waren; ihr Durchmesser betrug 10 cm und ihre Ringbreite 1 cm; eine entsprechende Anzahl solcher Ringe war übereinander an einem Führungsstab so befestigt, daß dieser die Achse des Hohlzylinders bildete, dessen Zylindermantel durch die Abstände der übereinander sitzenden Ringe genügend durchbrochen war, damit die Wasserteilchen, die in radialer Bewegung begriffen waren, ohne den bereits erwähnten Widerstand bis dicht an den Umfang der Ringe heranströmen konnten, die Entfernungen derselben voneinander waren für die verschiedenen zu den Versuchen benutzten Rotationszylinder 1, 1,5 und 2 cm. Jeder einzelne Ring besaß drei bis vier kreisförmige Vorsprünge an seinem Umfang, die je nach Erfordern aufgebogen werden konnten, um die Größe der Wasserströmung zu verändern und die Umkehrung der Pole zu ermöglichen.

Zur Herstellung eines kugelförmigen Körpers wurden diese Flachringe in so verschiedenen Größen angewendet, wie diese zur Herstellung der kugelähnlichen Form erforderlich erschienen; die beiden Ringe an den Polen waren daher die kleinsten und die Durchmesser der übrigen Ringe nahmen im Verhältnis bis zu dem Äquatorring um soviel zu, wie zur Erreichung der Kugelform nötig war. Unter Anwendung solcher Flachringe erhielt ich Rotationskörper, die bei fortgesetzter Rotation nicht so große Flüssigkeitsmengen in ihrer einmal eingenommenen Richtung mitziehen, sondern eine besser hervortretende Radialströmung zustande kommen lassen und ermöglichen, daß die Flüssigkeitsteilchen in vollständig radialer Richtung bis an den Umfang der Ringe sich bewegen. Aus demselben Grund bewegen sich auch die im Wasser herabhängenden Körper im gleichen radialen Sinne bis an den Rotationskörper heran. Bei geradliniger Fortbewegung fester Körper ohne Rotation derselben werden in der Flüssigkeit Wirbel erzeugt, die der Körper so lange hinter sich herzieht, wie er in Bewegung sich befindet; in solchem Falle wird ebenfalls eine Anziehung verursacht, jedoch nur in der linearen Richtung, in welcher die fortschreitende Bewegung des Körpers andauert, eine radiale Strömung der Wasserteilchen findet hier nicht statt.

Das Ergebnis dieser Untersuchung zeigt uns, wenn man

der Flüssigkeit, in welcher ein Körper in Rotation sich befindet, einen freien Durchgang bis zur Rotationsachse des ersteren gewährt, daß die Teilchen des Wassers bei fortgesetzter Rotation das Bestreben haben, nach dem Mittelpunkt des Rotationskörpers sich hinzubewegen und andere Massen, die sich in entsprechenden Entfernungen in der Flüssigkeit befinden, in der eingenommenen radialen Richtung mitzuziehen. Wir erhalten hierdurch das Bild einer nach dem Mittelpunkt des Körpers gerichteten, radialen Anziehung, die durch ein zwischenliegendes Medium, das für unsere Untersuchung das Wasser ist, vermittelt wird. Stellen wir uns den Äther als das Medium vor, das den Weltraum erfüllt, so erhalten wir auf Grund der beobachteten Radialströmung eine Analogie unseres Ergebnisses mit dem freien Fall der Körper im Weltraume.

(Eingegangen 7. September 1905.)

8. *Permeabilitätsmessung an Stahlkugeln;*
von R. H. Weber.

Die Kugelgestalt ist zu allen Messungen der Magnetisierung wegen der beträchtlichen Entmagnetisierung sehr ungeeignet. C. Fromme[1]) hat im Jahre 1874 die „Magnetisierungsfunktion"

$$p = \frac{\varkappa}{1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa}$$

an Kugeln auf magnetometrische Weise bestimmt, und Riecke hat darauf hingewiesen, daß diese Funktion mit zunehmendem $\varkappa$ eine Konstante wird. Seitdem sind meines Wissens ähnliche Messungen an Kugeln nicht ausgeführt worden.

Vor anderen Körpern bietet die Kugel den Vorteil, daß sie mit großer Exaktheit hergestellt und in ihren Dimensionen reproduziert werden kann. Da ich die Permeabilität von Stahl, der mir nur in Kugelgestalt gegeben war, bestimmen mußte, so habe ich versucht, durch geeignete Schaltungen bei einer ballistischen Methode möglichste Genauigkeit bei Permeabilitätsmessungen an Kugeln zu erzielen.

Daß das möglich ist, liegt einmal an den genannten Eigenschaften der Kugel, dann an der Möglichkeit, Windungszahlen mit großer Genauigkeit um ganze Vielfache zu vermehren oder zu vermindern.

Es sei mir gestattet, die Resultate, zu denen ich gekommen bin, hier bekannt zu machen, da ähnliche Messungen vielleicht auch anderweitig vorkommen können.

---

1) C. Fromme, Pogg. Ann. 152. p. 627. 1874.

Theoretisches über die Methode.

Bedeutet D ein homogenes Magnetfeld, in das wir die Kugel von der Permeabilität μ hineinbringen, so wird im Innern der Kugel ein homogenes Magnetfeld M entstehen, das die Größe hat:

$$M = \frac{3\,\mu_0}{\mu + 2\,\mu_0}\,D \quad (1)$$ [1]

und die Induktion wird:

$$B = \mu\,M = \frac{3\,\mu_0\,\mu}{\mu + 2\,\mu_0}\,D\,. \quad (2)$$

Meßbar ist uns nur B und D, aber nicht M, und aus dem Verhältnis $B:D$ berechnet sich nach 2 die Permeabilität.

Dieses Verhältnis nähert sich aber mit zunehmendem μ dem Grenzwert 3, von dem es bei dem Werte $\mu = 20$ ($\mu_0 = 1$), der dem härtesten Stahl etwa zukommen mag, schon sehr wenig abweicht. Es wird also eine außerordentlich sorgfältige Messung erforderlich sein, um die Abweichungen dieses Verhältnisses von der Zahl 3 zu konstatieren.

Wir wollen uns nun zunächst die nächstliegende ballistische Methode zur Ausführung der Messung der Permeabilität einer Stahlkugel ausgeführt denken.

Äquatorial um die Kugel legen wir n Windungen. Diese n Windungen mögen so wenig Raum einnehmen, daß sie trotz der Kugelgestalt ihrer Unterlage alle als von gleichem Durchmesser angesehen werden mögen. Bei unserer Messung war $n = 14$ (Spirale S_1).

Um eine Zylinderfläche aus nicht ferromagnetischem Material ($\mu_0 = 1$) (angewandt wurde eine Hartgummirolle), die einen identischen Durchmesser hat, wie die Kugel, legen wir ebenfalls n Windungen (Spirale S_0). Wir schalten diese in einen Schließungskreis mit S_1 und einen ballistischen Galvanometer G.

Nun führen wir einmal die Kugel mit der Spirale S_1 in eine Primärrolle P ein von hinreichender Länge und genügen-

1) Vgl. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 110. 114.

der Windungszahl, um in ihr ein homogenes Feld durch einen Primärstrom zu erhalten. Die Achsen von S und P sollen parallel sein. Der Primärstrom sei immer wieder in identischer Größe herstellbar. Beim Erregen, Unterbrechen oder Kommutieren dieses Stromes erhalten wir einen Ausschlag des Galvanometers, der proportional mit B ist:

$$s_1 = c \,.\, B \,.$$

Führen wir zweitens die Spirale S_0 statt S_1 in P ein, und verfahren ebenso wie vorher, dann erhalten wir einen Ausschlag des Galvanometers

$$s_0 = c \,.\, D \,.$$

Nehmen wir nun $\mu_0 = 1$ an, so folgt nach (2):

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{3\,\mu}{\mu + 2}$$

und daraus

(3) $$\mu = \frac{2 \,.\, s_1}{3\,s_0 - s_1} \,.$$

$3\,s_0 - s_1$ wird mit zunehmendem μ immer kleiner gegenüber s_0 und s_1. Fehler bei der Messung von s_0 und s_1 werden also mit sehr großem Gewicht in die Rechnung eingehen.

Wesentlich sicherer wird die Messung dadurch, daß man die im Nenner stehende Größe direkt mißt. Das geschieht dadurch, daß man erstens die Anzahl der Windungen auf S_0 verdreifacht, also $3\,n$ Windungen auflegt. Der hierdurch hervorgerufene Ausschlag wird also dann gleich $3\,s_0$ sein.

Außerdem nehmen wir zwei Primärrollen P_1, P_0, die möglichst identisch ausgeführt, weit genug voneinander aufgestellt (bez. mit zueinander senkrechten Achsen), um sich nicht gegenseitig zu stören, und vom gleichen Strom durchflossen sind, gleichzeitig in Betrieb. S_1 und S_0 werden so geschaltet, daß sie entgegengesetzte Ströme liefern. Der Ausschlag, den wir so erhalten, ist

(4) $$\sigma_0 = 3\,s_0 - s_1 \,.$$

Den Ausschlag s_1 bekommen wir, wenn wir S_0 aus P_0 heraus-

nehmen, aber in dem Stromkreis eingeschaltet lassen. Wir machen dann den einzigen Fehler, der aber sicherlich ungefährlich ist, daß wir die Rückwirkung von S_0 auf P_0 durch wechselseitige Induktion auch mit ausschalten. Experimentell läßt sich die Bedeutungslosigkeit dieses Fehlers leicht zeigen, wenn wir S_0 in eine dritte, in sich kurzgeschlossene Spirale P einführen.

Es ergibt sich aber jetzt eine weitere Schwierigkeit dadurch, daß die Ausschläge s_1 und σ_0 von verschiedener Größenordnung sind, was die Ausnutzung der Galvanometerempfindlichkeit erschwert. Dem kann dadurch abgeholfen werden, daß man die Spirale S_1 unterteilt, indem man sie etwa in $n/2+1$ und $n/2-1$ Windungen zerlegt, die man gegeneinander und hintereinander schaltet. Zur Messung von σ_0 lassen wir sie hintereinander geschaltet. Zur Bestimmung von s_1 schalten wir sie gegeneinander. Dann wirken induktiv nur 2 statt n Windungen, und wir erhalten einen Ausschlag:

$$\sigma_1 = \frac{2}{n} s_1 .$$

(5) $$s_1 = \frac{n}{2} \sigma_1 .$$

Es wird also jetzt aus (3), (4) und (5):

(6) $$\mu = \frac{n \cdot \sigma_1}{\sigma_0} .$$

Wir haben also n so zu wählen, daß σ_1 und σ_0 von gleicher Größenordnung werden, also muß n von der Größenordnung von μ sein.

Fehlerquellen und Korrektionen.

Bei den später auszuführenden Messungen ergibt sich μ etwa von der Größe 36. Diese Zahl wollen wir bei der Beurteilung der Fehler zugrunde legen, ebenso die übrigen Konstanten der angewandten Anordnung. Die Größe μ mag zunächst, da sie nur zu Korrektionsgliedern gebraucht wird, durch angenäherte Messung gewonnen sein.

Da

$$\mu = \frac{2\, s_1}{\sigma_0},$$

also $s_1 = 18 \, . \, \sigma_0$ und

$$\sigma_0 = 3\, s_0 - s_1$$

ist, so folgt, ein Fehler im Werte s_1 von δ Proz. geht in σ_0, und damit in μ mit dem Betrag $18 \, . \, \delta$ Proz. ein, wenn er nicht durch einen gleichzeitigen Fehler von σ_0 kompensiert wird. Es steht uns aber frei, wenn die Rolle S_0 gleichmäßig zylindrisch gearbeitet ist, den Wert σ_0 als normal zugrunde zu legen, und alle Fehler auf s_1 abzuschieben.

1. Ungleichheit der Felder in P_1 und P_0 lassen sich dadurch konstatieren, daß man P_1 und P_2 bez. S_1 und S_2 vertauscht, und beide Male σ_0 bestimmt. Ganz geringe Abweichungen geben schon beträchtliche Abweichungen von σ_0 vor dem Vertauschen und σ_0' nach demselben. Ist in P_0 das Feld D, in P_1 $D(1 + \delta)$, so wird

$$s_0 = c\, D,$$

$$s_1 = c(1 + \delta)B,$$

nach dem Vertauschen

$$s_0' = c \, . (1 + \delta) D,$$

$$s_1' = c \, . \, B,$$

$$\frac{B}{D} = \frac{s_1 + s_1'}{s_0 + s_0'}$$

und daraus folgt, durch Anwendung von Gleichung (2),

$$\mu = \frac{s_1 + s_1'}{3\,(s_0 + s_0') - (s_1 + s_1')} = \frac{s_1 + s_1'}{\sigma_0 + \sigma_0'};$$

wir können den Fehler, der in einer Ungleichheit der Felder P_1 und P_0 beruht, durch Mittelwertbildung eliminieren, und zwar korrekt, nicht nur angenähert.

2. Der Abstand, den die Achse des auf die Kugel gewickelten Drahtes von der Kugeloberfläche besitzt, bedingt einen Fehler, der aber klein ausfällt, weil das Feld in der

Nähe des Kugeläquators sehr vermindert ist, infolge des geringen magnetischen Widerstandes der Kugel. Der Ausschlag s_1 wird dadurch zu groß, daß die ringförmige Fläche zwischen Kugelumfang und Drahtachse von Kraftlinien durchsetzt wird. Die Kugel wird durchsetzt von

$$k = \frac{3\mu}{\mu + 2} D \,.\, a^2 \pi \text{ [1]}$$

Kraftlinien. Die genannte Ringfläche von

$$K' = \left\{ - \frac{\mu - 1}{\mu + 1} D \left(\frac{a^3}{r^3} - 3 \frac{a^3}{r^3} \frac{x^2}{r^2} \right) + D \right\} . 2 a \delta \pi \text{ [1]},$$

worin a den Kugelradius, δ den genannten Achsenabstand bedeutet. Das zweite Glied in der Klammer ( ) können wir von vornherein vernachlässigen, da x gegen r stets klein ist. Und es wird die Kraftlinienzahl

$$D \left(1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \frac{a^3}{r^3} \right) \cdot 2 a \delta \pi ,$$

In unserer Ausführung ist

$$a = 20{,}288 \text{ mm}, \quad \delta = 0{,}098$$

also

$$r = 20{,}386,$$

$$\left(1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \frac{a^3}{r^3} \right) = 0{,}092 ,$$

$$\left(1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot \frac{a^3}{r^3} \right) \cdot 2 \delta = 0{,}0180,$$

$$K' = 0{,}0180 \,.\, a \pi D,$$

während

$$K = 56{,}5 \,.\, a \pi D$$

ist. Also haben wir an s_1 eine Korrektion von

$$-0{,}032 \text{ Proz.}$$

auszuführen. Im Zähler ist das zu vernachlässigen. Im Nenner, also an σ_0 angebracht, macht es, wie bereits erwähnt,

1) Vgl. E. Cohn, l. c. p. 114, Formel (82).

den 18fachen Betrag, und zwar mit umgekehrtem Vorzeichen. Es ist also σ_0 zu ersetzen durch:

$$\sigma_0 (1 + 0{,}0058).$$

3. Wenn der Kugeldurchmesser nicht genau den gleichen Durchmesser hat wie die Achse des auf die Hartgummirolle S_0 aufgewickelten Drahtes, so wird ein Fehler gemacht, der der Abweichung der umspannten Flächen voneinander proportional ist. Die Kugel und die Hartgummirolle lassen sich mit Sorgfalt sehr exakt herstellen. Es betrug bei unserem Beispiel der Kugelradius

20,288 mm,

der der Hartgummispule, gemessen zwischen den Achsen eben aufgewickelten Drahtes

20,281 mm,

das bedingt einen Fehler von 0,035 Proz. des Radius, also von 0,070 Proz. der Windungsfläche. Wir brauchen also hier wieder s_1 im Zähler nicht zu korrigieren, σ_0 dagegen muß um + 1,26 Proz. korrigiert werden. Wir haben also jetzt insgesamt σ_0 zu ersetzen durch

$$\sigma_0 (1 + 0{,}017).$$

4. Wegen der Kugelgestalt umfassen die äußeren der n Windungen von S_1 nicht alle Kraftlinien. Es ist dies in unserem Falle der bedenklichste Fehler, wie wir sehen werden.

Nennen wir λ den Abstand der Achse einer Windung vom Äquator, r ihren Abstand vom Kugelmittelpunkt, so ist ihre „geographische Breite“

$$\varphi = \frac{\lambda}{r}.$$

Die Drahtachse umfaßt dann die Fläche $r^2 \pi . \cos^2 \varphi$ statt der Fläche $r^2 \pi$, also eine um

$$r^2 \pi \sin^2 \varphi \sim r^2 \pi \varphi^2$$

zu kleine Fläche. $\varphi^2 . 100$ gibt uns also direkt den Fehler in

Prozenten. Da wir $n/2$ Windungen auf jeder Seite des Äquators haben, so ist der gesamte Fehler

$$\frac{\sum \lambda/r^2}{n/2} \cdot 100 \text{ Proz.}$$

Die Breite aller Windungen zusammen genommen war, obwohl nach der Drahtdicke weniger zu erwarten wäre, 1,8 mm, von äußerster bis äußerster Drahtachse gemessen. Es ist also λ im Maximum 0,9 mm. Zwischen 0 und 0,9 cm liegen 13 halbe Drahtdicken, jede gleich 0,9/13 mm. Die Achsen liegen somit bei

$$\frac{0,9}{13}, \quad 3 \cdot \frac{0,9}{13}, \quad 5 \cdot \frac{0,9}{13} \ldots \quad 13 \cdot \frac{0,9}{13}$$

und es wird unser Fehler:

$$\frac{1}{r^2} \frac{0,9^2}{13^2} \cdot (1 + 3^2 + 5^2 + \ldots 13^2) \cdot \frac{100}{7} \text{ Proz.},$$

worin $2r = 20,386$ ist.

Das macht eine Korrektion an s_1 von $+0,293$ Proz., also an σ_0 eine Korrektion von $-5,3$ Proz. Wir haben also im ganzen σ_0 zu ersetzen durch

$$\sigma_0(1 - 0,036) \tag{7}$$

und an s_1 etwa eine Korrektion von $+0,2$ Proz. anzubringen.

Ausführung der Messungen.

Die Primärrollen P_0 und P_1 waren 12 cm lang, 32 mm im Durchmesser, hatten 290 Windungen eines 0,35 mm dicken Cu-Drahtes und einen Widerstand von je etwa 5 Ohm. Sie waren parallel geschaltet und die eine durch einen Vorschaltwiderstand abgeglichen, so daß σ_0 nahezu gleich σ_0' war. In dem Stromkreis lagen außerdem noch 2 Ohm Vorschaltwiderstand, eine Wippe und zwei hintereinander geschaltete Akkumulatoren.

Die Stahlkugel bestand aus Remystahl[1]), war sorgfältig

1) Aus der Fabrik von H. Remy in Hagen. Ich habe diesen Stahl wegen seiner starken Magnetisierbarkeit öfters verwendet.

abgedreht und gehärtet. Der Durchmesser am Äquator wurde als das Mittel von zehn verschiedenen Messungen bestimmt, die im Maximum um etwa 1 Promille voneinander abwichen. Der Mittelwert betrug 20,288 mm. Das Aufwickeln der *n* Windungen S_1 gelingt, wenn man die Kugel mit einem dünnen Wachsüberzug bedeckt, der von kaum meßbarer Dichte sein kann. Die Windungen wurden dann der Haltbarkeit wegen lackiert und die Zuleitungen — vier an Zahl, wegen der Unterteilung — umeinander gewunden, um keine Induktion in ihnen zu erhalten.

Die Spule S_0 war auf eine Hartgummirolle aufgewickelt, die durch Abschleifen auf feinem Schmirgelpapier auf ihre definitive Dicke gebracht wurde. Diese war so gewählt, daß die Achse des aufgewickelten Drahtes einen Kreis von gleichem Durchmesser bildete wie die Kugel. Auch hier ist es nicht schwer, die Durchmesser nach den verschiedensten Richtungen hin bis auf 1 Promille übereinstimmend zu bekommen. Das Mittel aus 20 Messungen betrug

20,165 mm

ohne Umwickelung und

20,397

mit Umwickelung, so daß als Durchmesser der Drahtachse

20,281

gesetzt werden kann.

Der aufgewickelte Draht hat einen Durchmesser von 0,05 mm blank. Er wurde mir in liebenswürdiger Weise von der Firma Hartmann & Braun zur Verfügung gestellt.

Die Windungszahl von S_0 betrug 42, die von S_1 $6+8=14$. Die Widerstände waren 19,2 und 8,0 Ohm.

Die Spulen S_0 und S_1 waren hintereinander (gegeneinander) geschaltet in einen Kreis mit einem Du Bois-Rubensschen Galvanometer, das bei einem inneren Widerstand von 20 Ohm eine Empfindlichkeit von $7 \cdot 10^{-9}$ Amp. besaß. Das ist in Anbetracht des geringen inneren Widerstandes ziemlich empfindlich. Mehr ist jedenfalls in Heidelberg auch bei nächtlichem Arbeiten nicht zu erreichen. Es zeigte sich hierbei immer eine ganz langsame Schwankung der Ruhelage um

etwa 1 Skt., was bei der Größenordnung der Ausschläge schon wesentlich in Betracht kommt. Ich möchte diese Schwankungen dem Dreileitersystem der hiesigen Zentrale zuschreiben. Bei Tage zu arbeiten ist gänzlich ausgeschlossen, da die am Hause vorbeifahrende elektrische Straßenbahn Ausschläge verursacht, die die größten in den Messungen vorkommenden Ausschläge weit überschreiten.

Die folgende Tab. 1 enthält die Ausschläge σ_0, σ_1, σ_0, wie sie sich bei aufeinanderfolgenden Messungen ergaben. Die Tab. 2 enthält die entsprechenden Werte nach Vertauschung der Primärrollen P_1, P_0 gegenüber den Sekundärspulen S_1, S_0.

Tabelle 1.

σ_0	σ_1	σ_0
18,7	50,0	18,2
18,2	49,4	18,2
18,2	49,9	18,8
18,2	49,2	19,0
18,7	50,2	18,9
18,3	50,0	18,9
Mittel: 18,4	49,8	18,7

Tabelle 2.

σ_0'	σ_1'	σ_0'
18,8	49,4	19,2
18,9	49,7	19,9
18,6	49,8	19,2
19,1	49,3	19,3
18,9	49,7	19,2
19,0	49,2	19,5
Mittel: 18,9	49,5	19,4

Die einzelnen Ablesungen weichen also im Maximum um etwa 2 Proz. vom Mittelwert ab. Ein Fehler von 1 Proz. dürfte also beim Mittelwert wohl kaum zu befürchten sein.

Es ergibt sich aus den Messungen nach Formel (6) und (7)

$$\mu = 14 \cdot \frac{49,65}{18,8 \cdot (1 - 0,036)} = 38,44$$

als Permeabilität des gehärteten Remystahles.

Das in der Kugel vorhandene Magnetfeld beträgt nach Berechnung etwa $1^1/_4$ Gauss. Man mißt also mit sehr geringen Feldänderungen.

Eine weit größere Genauigkeit läßt sich an störungsfreien Orten und bei Anwendung größerer Kugeln erreichen. Es ist nicht ausgeschlossen, daß man sogar Eisenkugeln wird verwenden können.

Heidelberg, Physik. Institut, im August 1905.

(Eingegangen 6. September 1905.)

9. *Über das Eigenlicht des Radiumbromids;*
von B. Walter und R. Pohl.

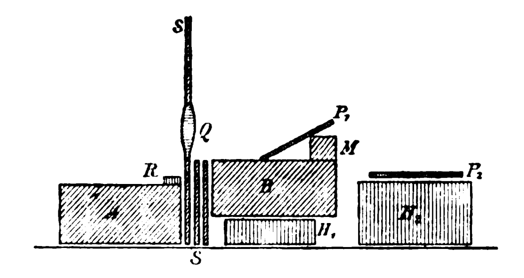
Sir William und Lady Huggins[1]) haben nachgewiesen, daß das Spektrum des Eigenlichtes des Radiumbromids nahezu vollkommen mit dem Bandenspektrum des Stickstoffs übereinstimmt — und zwar mit demjenigen des *negativen* Poles einer mit ein wenig Luft gefüllten Geisslerschen Röhre besser als mit dem *positiven* Lichte der letzteren. Sie vermuten demnach, daß das in Rede stehende Radiumlicht in der Hauptsache durch den Anprall der negativ geladenen β-Strahlen gegen die das Radiumsalz umgebenden Luftteilchen erzeugt wird, und erwarten demgemäß, daß jenes Licht seine Entstehung nicht bloß in der unmittelbaren Nachbarschaft des Salzes, sondern auch noch in einiger Entfernung davon nimmt. Diese letztere Erwartung konnten sie jedoch durch den Versuch nicht bestätigen und sprechen infolgedessen die weitere Vermutung aus, daß jene Strahlen die Stickstoffmoleküle nur „in molekularen Distanzen und im Momente ihrer Bildung" erregen dürften.

Dem gegenüber läßt sich nun aber mit Leichtigkeit zeigen, daß das Leuchten der Luft in der Umgebung des Radiumbromids *selbst noch in mehreren Zentimetern Abstand von dem Salze* stattfindet.

Von mehreren, nahezu gleichartigen Versuchen, welche diese Tatsache beweisen, sei nur der folgende beschrieben. Das Radiumpräparat *R* (Figur) — ca. 9 mg Gieselsches Radiumbromid — lag frei an der Luft in seiner Hartgummikapsel auf einem runden Bleiklotz *A* von 6 cm Höhe und 12 cm Durchmesser. Rechts daneben war zunächst ein 4 mm dicker, 24 cm hoher und 30 cm breiter Bleischirm *SS* aufgestellt, in dessen Mitte ein rundes Loch geschnitten war, in das eine Quarzlinse von $11\frac{1}{2}$ cm Brennweite und 6.5 cm Durchmesser

1) Sir William u. Lady Huggins, Proc. Roy. Soc. 72. p. 196 u. p. 409. 1903.

mit ihrer Messingfassung eingepaßt wurde. (Die *Linse* aus Quarz wurde deswegen genommen, weil sie unter den gerade vorrätigen Stücken aus dieser Substanz das größte und dickste war. Bei einem anderen Versuche dieser Art wurde mit fast gleichem Erfolge eine 8 mm dicke, aber nur 2,4 × 2,6 cm große *planparallele Platte* aus Quarz benutzt.) Der Schirm *SS* war dabei so aufgestellt, daß der untere Rand der Quarzlinse 2 cm höher lag als das Radiumpräparat. Rechts neben *SS* wurden ferner noch mehrere, bis an den unteren Rand der Quarzlinse reichende Platten aus 4 mm dickem Blei und schließlich — auf einem passenden Holzklotz H_1 — noch ein zweiter runder Bleiklotz *B* von 6 cm Höhe und 12 cm Durchmesser so gestellt, daß seine obere Fläche ebenfalls mit dem unteren Rande der Quarzlinse in gleicher Höhe war. Auf diesem



Klotze *B* lag nun — durch einen Metallklotz *M* unter einem Winkel von 30° gegen die obere, horizontale Fläche von *B* geneigt — die photographische Platte P_1, so daß der Abstand ihres vorderen Randes von der Quarzlinse *Q* 7 cm war. Die Platte P_1 war dabei mit einem lichtdichten Stück dünner schwarzer Pappe bedeckt, in dem mehrere Löcher angebracht waren, die mit verschiedenen Lichtfiltern (Quarz, farblose Gläser von verschiedener Ultraviolettdurchlässigkeit, blaues Glas, gelbes Glas) bedeckt waren. Hinter dem Bleiklotze *B* wurde auf dem Holzklotze H_2 noch eine zweite Platte P_2 mit Lichtfiltern ausgelegt, um die Abwesenheit fremden Lichtes zu beweisen. Beide Platten wurden gleichzeitig und gleich lange, nämlich 42 Stunden, exponiert; und, während P_2 bei der Entwicklung völlig klar blieb, zeigte sich P_1 hinter den genannten Lichtfiltern genau in derselben Abstufung geschwärzt wie bei

den Versuchen mit der durch Radiotellurstrahlen leuchtend gemachten Luft.[1])

Außer dieser Schwärzung, die nach der oben beschriebenen Versuchsanordnung wohl nur von solchen durch die Strahlung des Radiumbromids leuchtend gemachten Luftteilchen bewirkt sein kann, die sich in mehr als 2 cm Abstand von dem Salze befanden, zeigten die betreffenden Platten stets auch noch eine viel schwächere Schwärzung hinter der schwarzen Pappe des Filters sowie eine noch wieder viel schwächere Schwärzung in denjenigen Teilen, die sowohl durch diese Pappe als auch durch einen Teil einer Filtersubstanz (Glas bez. Quarz) bedeckt waren. Diese letzteren Schwärzungen können natürlich nur von Strahlen herrühren, welche lichtdichte Pappe zu durchdringen vermögen, so daß es sich also hier in der Hauptsache jedenfalls um eine Wirkung der von der direkten Radiumstrahlung in der umgebenden Luft erzeugten *Sekundärstrahlung* handelt. Hiermit steht es dann auch im Einklang, daß die genannten Schwärzungen in viel höherem Maße auftraten, wenn man den Schirm *SS* verkleinerte oder gar ganz fortließ.

Nach Abschluß dieser Versuche wurde uns eine Abhandlung der Herren F. Himstedt und G. Meyer[2]) zugesandt, in welcher durch spektrographische Aufnahmen ebenfalls der Nachweis geführt wird, daß auch die Luft in der weiteren Umgebung des Radiumbromids zum Leuchten gebracht wird, sodaß demnach wohl die eingangs zuerst erwähnte Vermutung von Sir William und Lady Huggins als die richtige anzusehen ist, d. h. die Vermutung, daß jenes Licht lediglich durch den *Anprall* der von dem Radiumsalz ausgesandten Becquerelstrahlen an die Moleküle der umgebenden Luft zustande kommt. Freilich dürften aber hierbei nicht bloß die von den genannten Verfassern heran-

1) B. Walter, Ann. d. Phys. **17**. p. 367. 1905. Es sei noch erwähnt, daß neuerdings auch B. Walter in der durch Radiotellurstrahlung erregten lichtartigen Strahlung der Luft durch sehr lange Expositionen — außer dem ganz überwiegend vorhandenen Ultraviolett — auch schwaches Licht aus den sichtbaren Teilen des Spektrums festgestellt hat, wie dies zuerst von R. Pohl (Ann. d. Phys. **17**. p. 375. 1905) nachgewiesen wurde.

2) F. Himstedt u. G. Meyer, Ber. d. Naturf. Gesellsch. Freiburg i. Br. **16**. p. 13. 1905.

gezogenen β-Strahlen, sondern auch die α-Strahlen in Betracht kommen, da es sich doch beim Radiotellur nur um solche handelt.

Schließlich sei noch erwähnt, daß unsere Versuche, um die Sekundärstrahlung der die Platte P_1 umgebenden Gegenstände nach Möglichkeit zu verringern, stets im freien Zimmer, d. h. also auch in gewöhnlicher, feuchter Zimmerluft angestellt wurden, und daß sich also nach den Versuchen der Herren Himstedt und Meyer bei Anwendung einer vollkommen trockenen Luft noch stärkere Wirkungen ergeben haben dürften.

Hamburg, Physik. Staatslabor., September 1905.

(Eingegangen 17. September 1905).

10. *Bemerkung zu der Arbeit des Hrn. Becker: „Messungen an Kathodenstrahlen"; von G. E. Leithäuser.*

In meiner Arbeit über den Geschwindigkeitsverlust, welchen die Kathodenstrahlen beim Durchgang durch dünne Metallblättchen erleiden, und über die Ausmessung magnetischer Spektren [1]), habe ich die Durchlässigkeit der von mir benutzten Metallblättchen für die verschiedenen bei den Messungen angewandten Kathodenstrahlen bestimmt. Hr. Becker [2]) berechnet aus der von mir angegebenen Durchlässigkeit D den Absorptionskoeffizienten α nach der Formel:

$$\alpha = \frac{1}{d} \lg \text{nat} \frac{1}{D} \tag{1}$$

und erhält dabei bei einer bestimmten Kathodenstrahlengeschwindigkeit für zwei verschiedene Blättchendicken Werte von α, die bei dem dickeren Blättchen um 15 Proz. kleiner sind als bei dem dünneren. Er findet aus seinen Messungen einen von der Dicke unabhängigen Absorptionskoeffizienten und beanstandet aus diesem Grunde die Richtigkeit meiner Messungen.

Nun geht aber aus der von mir gegebenen Erklärung der Durchlässigkeit:

$$D = \frac{\text{Ladung der durchgegangenen Strahlen}}{\text{Ladung der auffallenden Strahlen}}$$

und auch aus der beschriebenen Versuchsanordnung deutlich hervor, daß die Formel (1) zur Berechnung von α nicht zutrifft. Legt man die bisherigen Anschauungen über den Vorgang beim Auftreffen von Kathodenstrahlen auf Metallblättchen zugrunde, nach denen vom Blättchen eine der einfallenden

1) G. E. Leithäuser, Ann. d. Phys. **15**. p. 306. 1904.
2) A. Becker, Ann. d. Phys. **17**. p. 445. 1905.

Intensität proportionale Menge reflektiert wird, so muß man die Ladung der durchgegangenen Strahlen gleich

$$J_0 (1 - \varkappa_s) e^{-\alpha d}$$

setzen, woraus sich

$$D = (1 - \varkappa_s) e^{-\alpha d}$$

und

$$\alpha = \frac{1}{d} \lg \text{nat} \frac{1 - \varkappa_s}{D}$$

ergibt. $\varkappa_s$ ist der Reflexionskoeffizient des Blättchens und nach Hrn. Starke für Aluminium gleich 0,25 zu setzen. Rechnet man hiernach aus meinen Zahlen α aus, so findet man für ein Entladungspotential von 14000 Volt:

α = 8580 für die Dicke 0,00018 cm
α = 8300 „ „ „ 0,00036 „

Für ein Entladungspotential von 16500 Volt:

α = 4550 für die Dicke 0,00018 cm
α = 4470 „ „ „ 0,00036 „

Es besteht also die von Hrn. Becker berechnete Abnahme des Absorptionskoeffizienten für das dickere Blättchen nicht, wenn man die bisherigen Anschauungen über die Kathodenstrahlen zugrunde legt. Die geringen Unterschiede mögen in der Verschiedenheit der Aluminiumblättchen ihre Erklärung finden. Die Differenzen der Absorptionskoeffizienten werden größer, wenn man ihrer Berechnung die Anschauung des Hrn. Becker zugrunde legt, nach der beim Durchfahren der Materie die Kathodenstrahlen eine der einfallenden Menge proportionale sekundäre Strahlung auslösen, deren Energie dem durchfahrenen Atome entstammt; — eine Anschauung, die der Bestätigung allerdings bedarf. In diesem Falle mißt ein die durchgegangene Strahlung auffangender Faradayscher Käfig außer dieser die an der Hinterseite des Blättchens entstehende und mit der dort herrschenden Strahlungsintensität, also mit $J_0 (1 - \varkappa_B) e^{-\alpha d}$, proportionale Sekundärstrahlung mit; in der Formel für die Durchlässigkeit ist also für Ladung der durchgegangenen Strahlen zu setzen:

$$J_0 (1 - \varkappa_B) e^{-\alpha d} \{1 + \sigma\},$$

wo $\varkappa_B$ der Reflexionskoeffizient für diesen Fall, nach Hrn.

Becker $= 0{,}174$, σ, der Koeffizient der sekundären Emission, gleich 0,134 zu setzen ist. Die Durchlässigkeit wird dann:

$$D = (1 - \varkappa_B) e^{-\alpha d} \{1 + \sigma\}.$$

Rechnet man hieraus α aus, so findet man für 14000 Volt:

$\alpha = 9810$ für die Dicke 0,00018 cm
$\alpha = 8900$ „ „ „ 0,00036 „

Für 16500 Volt:

$\alpha = 5790$ für die Dicke 0,00018 cm
$\alpha = 5082$ „ „ „ 0,00036 „

Auffällig und mir nicht recht erklärlich ist es, daß meine Absorptionskoeffizienten bei 16500 Volt von dem durch Hrn. Becker gefundenen Wert nicht sehr verschieden sind, da doch Hr. Becker ein bedeutend höheres Entladungspotential, etwa 35000 Volt, benutzt hat, und der Wert des Absorptionskoeffizienten mit steigendem Potential stets abnimmt.

Charlottenburg, den 1. Oktober 1905.

(Eingegangen 11. Oktober 1905.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



Julius Peters, Berlin NW. 21, Thurmstr. 4.

Polarisations-Apparate

in allen Konstruktionen für wissenschaftl. u. technischen Bedarf.

Neu! *Neu!*

Calorimeter

nach Berthelot-Mahler,
verbessert nach Dr. Kroeker
(gesetzlich geschützt).



Alt, Eberhardt & Jäger, Ilmenau i. Th.

Eigene Hohlglashütte, Lampenbläsereien, Glasschleifereien, Holzwarenfabrik, Thermometerfabriken, Präzis.-mechanische Werkstatt, Klempnerei, Schriftflaschenmalerei und Emaillieranstalt.

Glasapparate, Instrumente und Utensilien für wissenschaftlichen Gebrauch und in jeder Ausführung. Hohlglas aller Art.

Einrichtung für Laboratorien an Lehranstalten, Universitäten usw.

Elektrolytische Apparate für Demonstrations- und praktischen Gebrauch.

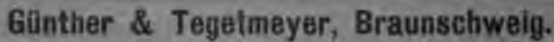
Elektrische Röhren jeder Art, auch nach besonderen Angaben. Dewargefäfse. Apparate für Pflanzenphysiologie.

Standgefäfse aller Art für Präparate usw.

Chemische Thermometer, tief- u. hochgradig (bis 550° C.), Ia. fein gekühlt, a. widerstandsfähigem, weifsbelegtem Glase, gut ablesbar.

Thermometer aller Art und für jeden Zweck.

Glasgefäfse aus Spiegelglas für mikroskopischen, spektralanalytischen und speziellen Gebrauch, widerstandsfähig gegen Wasser, Alkohol und Säuren.



Gewissenhafte Anfertigung. Nachprüfung im eigenen Laboratorium.

400 Arbeiter.

☞ Glasapparate, Glaskörper, Glasplatten usw. nach besonderen Angaben. ☜

Günther & Tegetmeyer, Braunschweig.

Werkstatt für wissenschaftliche und technische Präzisions-Instrumente.

Weltausstellung St. Louis 1904 Goldene Medaille.

Transportable Apparate zur Beobachtung der atmosphärischen Elektrizität nach **Exner.** Elektroskope mit innerer Isolation aus Bernstein, Natriumtrocknung und Einrichtung zum parallaxenfreien Ablesen (D.R.G.M.). Apparate zur Messung der Elektrizitätszerstreuung in der Luft. Zamboni'sche Säulen. Hochspannungs-Trockensäulen (D.R.G.M.). Instrumentarien zur Bestimmung der Radioaktivität von Luft- und Bodenproben. Quadrantenelektrometer. Aktinometer (Neukonstruktion). Wasserstrahlduplikatoren nach **Elster und Geitel.** Hochspannungselektroskope (**Braun**sches Prinzip) mit innerer Isolation und Natriumtrocknung nach **Elster und Geitel.** Transportable Elektrometer-Aspirationsapparate nach **Ebert** nebst Zusatzkondensatoren zur Bestimmung der Ionengeschwindigkeiten und des elektrischen Leitvermögens der Luft nach der Methode **Mache.** Kondensatoren nach **Harms** zur Bestimmung der Kapazitäten von Elektrometern.

F. Sartorius, Göttingen.

Mechanische Werkstätten zu Göttingen und Rauschenwasser.

Waagen und Gewichte

für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke.

Specialität:

Analysenwaagen

nur eigener bewährtester Construction.

Man verlange ausdrücklich Original-Sartorius-Waagen, da Nachahmungen in den Handel gebracht werden.



Sartorius' neuer Wärmekasten

zum Brüten von Bacillen und zum Einbetten mikroskopischer Präparate in Paraffin für beliebiges Heizmaterial, unabhängig von Gasleitung, mit vielfach prämiirter Wärmeregulirung.

Patentirt in Deutschland, England, Belgien, Oesterreich-Ungarn etc.

Auf allen beschickten Ausstellungen prämiirt, zuletzt Weltausstellung Brüssel, Diplom d'honneur und Preis 500 Frs., für beste Construction in Feinwaagen.

Kataloge in 3 Sprachen gratis und franco.

— Vertreter in allen Ländern. —

KRÖPLIN & STRECKER,

Hamburg-Altona, am neuen Pferdemarkt

bauen als Spezialität: **Funkeninduktoren**



ferner: Demonstrationsapparate für Universitäten und Schulen.
Tesla-Apparate. Röntgen-Apparate. Apparate nach Hertz, Lodge und Lecher.

Stationen für Funken-Telegraphie.

Messinstrumente. Zündinduktoren. Technische Artikel für Industrie und Sport. [illegible].

Ausarbeitung und Fabrikation von Neuheiten.


SIEMENS & HALSKE A.-G.
Wernerwerk, Berlin-Westend,
früher Berliner Werk, Berlin SW., Markgrafenstr. 94.

1905. № 13.

ANNALEN

DER

PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 18. HEFT 3.

DER GANZEN REIHE 323. BANDES 3. HEFT.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1905.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
ROSSPLATZ 17.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 ℳ.

(Ausgegeben am 21 November 1905.)

Inhalt.

Seite

1. R. Malmström. Versuch einer Theorie der elektrolytischen Dissoziation unter Berücksichtigung der elektrischen Energie 413
2. A. Kalähne. Über die Strahlung des Chininsulfates . . . 450
3. W. Matthies. Über die Glimmentladung in den Halogenen Chlor, Brom, Jod 473
4. W. v. Ignatowsky. Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht 495
5. M. Laue. Die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien 523
6. Martin Gildemeister und Hans Strehl. Über den Geschwindigkeits- und Energieverlust von Geschossen in Wasser 567
7. Georg Wulff. Zur Geometrie der Doppelbrechung. . . . 579
8. W. Betz. Eine Methode zur Bestimmung der Dicke und optischen Konstanten durchsichtiger Metallschichten 590
9. W. Voege. Ein Beitrag zur Kenntnis der Funkenentladung in Gasen. (Hierzu Taf. IV.) 606
10. K. Prytz. Poröse Körper als Durchwege für Gase. Poröser Kontakt 617
11. August Schmauss. Über den Vorgang der Abscheidung eines Kolloides im elektrischen Strome 628
12. F. Hack. Das elektromagnetische Feld in der Umgebung eines gedämpft schwingenden linearen Oszillators 631
13. A. Einstein. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? 639
14. Arthur Boltzmann. Bemerkungen zu Hrn. S. Valentiners Abhandlung: „Über den maximalen Wirkungsgrad umkehrbarer Kreisprozesse" 642

Manuskripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude,** zu senden. Seine Adresse ist **Berlin N.W. 7,** Neue Wilhelmstr. 16.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

1905. № 13.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 18.

1. *Versuch einer Theorie der elektrolytischen Dissoziation unter Berücksichtigung der elektrischen Energie;*

von R. Malmström.

Nachdem es sich gezeigt hatte, daß das Ostwaldsche Verdünnungsgesetz, welches von so großer Bedeutung ist für die Beurteilung der Stärke schwach dissoziierter Säuren und Basen, nicht mehr für die stark dissoziierten Elektrolyte Gültigkeit besitzt, wenn man die Leitfähigkeit als Maß des Dissoziationsgrades benutzt, bemühte man sich zunächst eine empirische Formel zu finden, die den Gang der molekularen Leitfähigkeit der Salze wiedergibt.

Rudolphi fand zuerst[1]), daß die durch eine kleine Änderung des Ostwaldschen Verdünnungsgesetzes entstandene Formel

$$\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\sqrt{v}} = k,$$

wo

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda_\infty},$$

v das Molekularvolumen und k eine Konstante, die Beobachtungen gut darstellt. Hierdurch stand aber die Formel in keiner Beziehung zu den Konzentrationen der Ionen und des nicht dissoziierten Salzes.

Um diesem Übelstand abzuhelfen, änderte van't Hoff[2]) die Formel, indem er schrieb

$$\frac{c_j^3}{c_s^2} = k,$$

wo c_j die Ionenkonzentration, c_s diejenige des nicht dissoziierten Teiles, und zeigte, daß die neue Formel eine sogar bessere Übereinstimmung ergab, als die von Rudolphi.

1) M. Rudolphi, Zeitschr. f. phys. Chem. 17. p. 385. 1895.
2) van't Hoff, Zeitschr. f. phys. Chem. 18. p. 300. 1895.

Eine sehr anschauliche Deutung gab darauf Kohlrausch[1]) der van't Hoffschen Formel, indem er sie in die Form

$$\frac{c_j}{c_s} = \frac{k}{c_s^{1/3}}$$

brachte, oder da $c_s^{-1/3}$ den mittleren Abstand r_s der nicht dissoziierten Molekeln darstellt

$$\frac{c_j}{c_s} = k\, r_s .$$

Es folgen jetzt einige experimentelle Arbeiten, die sich die Aufgabe stellten, die Ursache der Abweichungen zu finden. Hans Euler kommt in zwei Arbeiten[2]) zu dem Schluß, daß „die Annahme einer Änderung der dissoziierenden Kraft" d. h. der Dielektrizitätskonstante „des Lösungsmittels durch den Salzgehalt die wahrscheinlichste Deutung der genannten Abweichungen zu sein scheint".

In einer weiteren experimentellen Arbeit hat Arrhenius[3]) untersucht, ob nicht die stark dissoziierten Elektrolyte einen ähnlichen Einfluß auf die schwach dissoziierten ausüben wie auf sich selbst, und findet, daß die Dissoziationskonstante einer schwachen Säure durch die rein elektrische Einwirkung des Zusatzes fremder Ionen vergrößert wird und zwar proportional der Quadratwurzel aus der Ionenkonzentration.

Der erste, der das Problem vom thermodynamischen Standpunkt aus in Angriff nahm, war von Steinwehr. In einer kleinen Arbeit[4]), wo er seine Theorie nur ganz kurz skizziert, sucht er eine Erklärung der Abweichungen vom Ostwaldschen Verdünnungsgesetz in der bei der Dissoziation durch Elektrostriktion verursachten Kontraktionsarbeit.

Kurz darauf erschien eine Arbeit von Jahn[5]), wo er, ausgehend von einem von Planck gegebenen Ansatz[6]) für eine verdünnte Lösung, zwischen deren Molekeln Wechselwirkungen stattfinden, die Formeln thermodynamisch ableitet. Dieselben

---

1) F. Kohlrausch, Zeitschr. f. phys. Chem. 18. p. 662. 1895.
2) Hans Euler, Zeitschr. f. phys. Chem. 28. p. 619; 29. p. 603. 1899.
3) S. Arrhenius, Zeitschr. f. phys. Chem. 31. p. 197. 1899.
4) H. von Steinwehr, Zeitschr. f. Elektrochem. 7. p. 685. 1901.
5) H. Jahn, Zeitschr. f. phys. Chem. 37. p. 490. 1901.
6) M. Planck, Thermodynamik, p. 210 ff.

Formeln wurden dann von Nernst[1]) nach einer anschaulicheren Methode abgeleitet. Wir werden in dieser Arbeit zeigen, wie man noch auf einem dritten Wege zu diesen Formeln gelangen kann.

Schließlich stellte Liebenow[2]) durch kinetische Betrachtungen, ausgehend von den elektrischen Kräften der Ionen, die er proportional der $^2/_3$-Potenz der Ionenkonzentration setzt, das Verdünnungsgesetz

$$\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)v} = A + B\left(\frac{\alpha}{v}\right)^{2/3}$$

auf, wo A und B Konstanten sind.

Neue Ableitung der Formeln von Jahn und Nernst.

Wir betrachten eine Lösung, bestehend aus n_1, n_2 und n_3 Grammolekel der gelösten Stoffe. Das Volumen der Lösung sei V. Es mögen nun Molekularkräfte wirksam sein, so daß die für verdünnte Lösungen geltenden Gasgesetze durch das van der Waalssche Gesetz ersetzt werden müssen. Die Lösung sei aber so verdünnt, daß die Volumkorrektion vernachlässigt werden kann. Die Konstante a der van der Waalsschen Gleichung ist nach van der Waals für eine Mischung von zwei Stoffen eine quadratische Funktion der Molekelzahlen. Dieses dürfen wir auf ein Gemisch von drei Stoffen erweitern. Unter dieser Annahme erhalten wir für die Lösung folgende Zustandsgleichung

$$p + \frac{n_1^2 a_{11} + n_2^2 a_{22} + n_3^2 a_{33} + 2 n_1 n_2 a_{12} + 2 n_1 n_3 a_{13} + 2 n_2 n_3 a_{23}}{V^2}$$
$$= \frac{n_1 + n_2 + n_3}{V} R T.$$

p ist der osmotische Druck. Die Bedeutung der übrigen Buchstaben ist ohne weiteres verständlich.

Wir wollen jetzt einen Ausdruck für die freie Energie der gelösten Stoffe aufstellen. Es seien U die innere Energie und S die Entropie derselben. Für eine umkehrbare Veränderung, wobei nur Wärme zu- oder abgeführt wird und das Volumen durch Ausdehnung oder Zusammendrückung gegen

1) W. Nernst, Zeitschr. f. phys. Chem. 38. p. 487. 1901.
2) C. Liebenow, Zeitschr. f. Elektrochem. 8. p. 933. 1902.

eine halbdurchlässige Wand sich ändert, lautet die Energiegleichung

$$dU = TdS - pdV,$$

oder wenn wir die freie Energie

$$F = U - TS$$

einführen

$$dF = -SdT - pdV.$$

Da dF ein vollständiges Differential, so erhält man

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial p}{\partial T}.$$

Wählen wir V und T als unabhängige Variable, so wird die Energiegleichung

$$dU = T\frac{\partial S}{\partial T}dT + T\frac{\partial S}{\partial V}dV - pdV.$$

Setzt man in dieser Gleichung den Wert von $\partial S/\partial V$ ein und beachtet, daß bei konstantem Volumen

$$dQ = TdS_v = C_v dT,$$

wo dQ die zugeführte Wärmemenge und C_v die spezifische Wärme der gelösten Stoffe bei konstantem Volumen, so erhält man

$$dU = C_v dT + T\frac{\partial p}{\partial T}dT - pdV.$$

Setzt man nun aus der Zustandsgleichung den Wert von p und

$$T\frac{\partial p}{\partial T} = RT\frac{n_1 + n_2 + n_3}{V}$$

ein, so ergibt sich

$$dU = C_v dT + \frac{a_{11} n_1^2 + a_{22} n_2^2 + \dots}{V^2} dV$$

und

$$U = \int C_v dT - \frac{a_{11} n_1^2 + a_{22} n_2^2 + \dots}{V} + \text{konst.}$$

Die Konstante ist nur von den Molekelzahlen abhängig, wir können sie deshalb schreiben gleich

$$n_1 u_{1,0} + n_2 u_{2,0} + n_3 u_{3,0}.$$

Nehmen wir außerdem an, daß die spezifische Wärme gleich der Summe der spezifischen Wärmen der Bestandteile ist

$$C_v = n_1 c_{v_1} + n_2 c_{v_2} + n_3 c_{v_3},$$

so erhalten wir für die Energie folgenden Ausdruck

$$U = \sum_1^3 n_i \left(u_{0i} + \int c_{vi} dT\right) - a_{11} \frac{n_1^2}{V} - a_{22} \frac{n_2^2}{V} - \ldots,$$

oder mit der Abkürzung

$$u_{1,0} + \int c_{v_1} dT = u_1,$$

$$U = \sum n_i u_i - a_{11} \frac{n_1^2}{V} - a_{22} \frac{n_2^2}{V} - a_{33} \frac{n_3^2}{V}$$

$$- 2 a_{12} \frac{n_1 n_2}{V} - 2 a_{13} \frac{n_1 n_3}{V} - 2 a_{23} \frac{n_2 n_3}{V}. \text{ }^{1)}$$

Die Entropie berechnet sich aus der Formel

$$dS = \frac{dU + p\,dV}{T}$$

$$= \frac{\frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV + p\,dV}{T}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial U}{\partial T} = n_1 c_{v_1} + n_2 c_{v_2} + n_3 c_{v_3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial V} + p = \frac{(n_1 + n_2 + n_3)}{V} R T,$$

also

$$dS = n_1 c_{v_1} \frac{dT}{T} + n_2 c_{v_2} \frac{dT}{T} + n_3 c_{v_3} \frac{dT}{T}$$

$$+ n_1 R \frac{dV}{V} + n_2 R \frac{dV}{V} + n_3 R \frac{dV}{V},$$

oder da

$$V = n_1 v_1 = n_2 v_2 = n_3 v_3,$$

wo v_1, v_2 und v_3 die Molekularvolume sind.

$$dS = \sum n c_v \cdot \frac{dT}{T} + n_1 R \frac{dv_1}{v_1} + n_2 R \frac{dv_2}{v_2} + n_3 R \frac{dv_3}{v_3},$$

woraus

$$S = \int \frac{dT}{T} \sum n c_v + n_1 R \log v_1 + n_2 R \log v_2 + n_3 R \log v_3 + \text{konst.}$$

Die Konstante hängt wieder nur von den Molekelzahlen ab. Wir schreiben sie

$$n_1 s_{0,1} + n_2 s_{0,2} + n_3 s_{0,3}$$

---

1) Umgekehrt kann man aus dieser Formel für die Energie natürlich die van der Waalssche Gleichung ohne Volumkorrektion) ableiten.

und kürzen ab

$$n_1\left(s_{0,1}+\int c_{v,1}\frac{dT}{T}\right)=n_1 s_1 .$$

Schließlich führen wir anstatt der Molekularvolume ihre reziproken Werte, die Molekularkonzentrationen

$$v_1=\frac{V}{n_1}=\frac{1}{c_1}$$

ein. Für die Entropie erhalten wir dann schließlich den Ausdruck

$$S=\sum n_i[s_i-R\log c_i].$$

Die freie Energie wird nun

$$F=U-TS=\sum n_i(u_i-Ts_i+RT\log c_i)$$
$$-a_{11}\frac{n_1^2}{V}-a_{22}\frac{n_2^2}{V}-\cdots,$$

oder, falls wir wieder zur Abkürzung schreiben

$$u_1-Ts_1=f_1$$

$$F=n_1 f_1+n_2 f_2+n_3 f_3+n_1 RT\log c_1+n_2 RT\log c_2+n_3 RT\log c_3$$
$$-a_{11}\frac{n_1^2}{V}-a_{22}\frac{n_2^2}{V}-a_{33}\frac{n_3^2}{V}$$
$$-2a_{12}\frac{n_1 n_2}{V}-2a_{13}\frac{n_1 n_3}{V}-2a_{23}\frac{n_2 n_3}{V}.$$

Diesen Ausdruck wollen wir jetzt auf einen binären Elektrolyten anwenden. Hierbei wird wie bei jeder Theorie der Dissoziation die Annahme gemacht, daß die Gesetze einer Mischung nicht miteinander reagierender Bestandteile auf einen dissoziierten Körper anwendbar sind.

Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann, wenn Temperatur und Volumen konstant gehalten werden und infolgedessen n_1, n_2, n_3 die einzigen Veränderlichen sind,

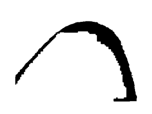
$$\frac{\partial F}{\partial n_1}dn_1+\frac{\partial F}{\partial n_2}dn_2+\frac{\partial F}{\partial n_3}dn_3=0.$$

Es sei nun n_1 der nicht dissoziierte Teil, n_2 und n_3 die Ionen, dann ist

$$dn_1:dn_2:dn_3:=-1:+1:+1,$$

also

$$-\frac{dF}{dn_1}+\frac{dF}{dn_2}+\frac{dF}{dn_3}=0.$$



Durch Ausführung der Differentiation ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} -f_1 - RT - RT\log c_1 + 2a_{11}c_1 + 2a_{12}c_2 + 2a_{13}c_3 \\ + f_2 + RT + RT\log c_2 - 2a_{22}c_2 - 2a_{12}c_1 - 2a_{23}c_3 \\ + f_3 + RT + RT\log c_3 + 2a_{33}c_3 - 2a_{13}c_1 - 2a_{23}c_2 \end{array}\right\} = 0,$$

oder

$$RT\log\frac{c_2c_3}{c_1} - 2(a_{12} + a_{13} - a_{11})c_1 - 2(a_{22} + a_{23} - a_{12})c_2$$
$$- 2(a_{33} + a_{23} - a_{13})c_3 = f_1 - f_2 - f_3 - RT.$$

Bei der elektrolytischen Dissoziation ist $c_2 = c_3$, also

$$RT\log\frac{c_2^2}{c_1} - 2(a_{12} + a_{13} - a_{11})c_1$$
$$- 2(a_{22} + a_{33} + 2a_{23} - a_{12} - a_{13})c_2$$
$$= f_1 - f_2 - f_3 - RT.$$

Um die Anzahl der Konstanten zu vermindern, kann man verschiedene Annahmen machen.

1. Zwischen den Molekeln des nicht dissoziierten Teiles, sowie zwischen diesen und den Ionen finden keine Wechselwirkungen statt. Dann sind

$$a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$$

und die Gleichgewichtsbedingung wird

$$RT\log\frac{c_2^2}{c_1} - 2(a_{22} + a_{33} + 2a_{23})c_2 = f_1 - f_2 - f_3 - RT.$$

2. Es finden nur zwischen den Molekeln des nicht dissoziierten Teiles Wechselwirkungen statt:

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{22} = a_{33} = 0,$$

$$RT\log\frac{c_2^2}{c_1} + 2a_{11}c_1 = f_1 - f_2 - f_3 - RT.$$

3. Nur zwischen den Ionen und dem nicht dissoziierten Teil sind Wechselwirkungen vorhanden

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{23} = 0,$$

$$RT\log\frac{c_2^2}{c_1} - 2(a_{12} + a_{13})c_1 + 2(a_{12} + a_{13})c_2$$

$$= RT\log\frac{c_2^2}{c_1} + 2(a_{12} + a_{13})(c_2 - c_1) = f_1 - f_2 - f_3 - RT.$$

Von diesen Annahmen kann man wohl ohne weiteres die zweite fallen lassen. Die dritte führt zu den Formeln von Jahn.

Versuch einer neuen Theorie.

Die bisherige Theorie der Dissoziation ist bei der Anwendung auf dissoziierte Gase, sowie auf die schwach dissoziierten Elektrolyte bestätigt worden. Es liegt deshalb die Annahme nahe, daß die Unmöglichkeit, diese Theorie auf stark dissoziierte Elektrolyte anzuwenden, ihren Grund darin hat, daß eben die Dissoziation eine elektrolytische ist, und daß die elektrische Energie der Ionen mit in Betracht gezogen werden muß.

Eine Vorstellung von der Größenordnung der elektrischen Energie kann man durch die Betrachtungen von Budde[1]) erhalten. Budde berechnet unter der Annahme, daß die Ionen geladene Kugeln sind und daß ein Grammolekel 10^{20} Molekel enthält, das Potential eines Wasserstoffatoms zu 10 Volt. Für andere Atome wird das Potential kleiner, nehmen wir also rund 1 Volt an. Ist nun eine Normallösung zu 50 Proz. dissoziiert, so enthält sie im Liter 10^{20} Ionen. Da in der Nähe eines positiven Ions sich negative Ionen befinden müssen, weil keine freie Elektrizität sich ansammeln kann, so ist der Spannungsabfall zwischen zwei benachbarten Ionen rund 2 Volt. Der Abstand ist aber

$$\left[\frac{1000 \text{ cm}^3}{10^{20}}\right]^{1/3} = 10^{-17/3} = \frac{1}{5 \cdot 10^5} \text{ cm}.$$

Der Spannungsabfall pro Zentimeter wird also

$$2 \cdot 5 \cdot 10^5 = 10^6 \text{ Volt}.$$

Wenn auch diese Berechnung keine genaue ist, so zeigt sie doch, daß die elektrische Energie keineswegs vernachlässigt werden darf. Es lohnt sich deshalb jedenfalls, die Theorie der elektrolytischen Dissoziation durch Berücksichtigung der elektrischen Energie zu vervollständigen und die Resultate mit der Erfahrung zu vergleichen.

Zu diesem Zwecke müssen wir wieder einen Ausdruck für die freie Energie eines dissoziierten Elektrolyten aufsuchen. Hierzu brauchen wir Formeln für die Energie und Entropie.

Wir betrachten wieder eine Lösung, die im Volumen Vn' nicht dissoziierte und $2n$ Ionen enthält. Um einen Ausdruck

1) Vgl. z. B. W. Ostwald, Lehrb. d. allgem. Chem. 2. p. 592.

für die Energie zu finden, nehmen wir an, daß die elektrische Energie der Ladungen sich einfach zu der sonstigen Energie des gelösten Stoffs addiert. Die Energie wird dann

$$U = n' u_1 + n u_2 + n u_3 + E,$$

wenn E die elektrische Energie bezeichnet und $u_1\, u_2\, u_3$ die Eigenenergien der verschiedenen Molekelgattungen.

Die elektrische Energie besteht aus zwei Teilen: 1. der Eigenenergie der Ladungen, die einfach proportional der Anzahl der Ionen ist und somit in den u_2 und u_3 enthalten angesehen werden kann; 2. aus der gegenseitigen Energie der Ladungen oder der Energie des elektrischen Feldes, die von dem Abstande und der Anordnung der Ionen im Raume abhängt. Es gilt also diesen Teil der Energie als Funktion der Konzentration aufzustellen.

Die elektrische Energie einer Anzahl elektrischer Massenpunkte ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\,\varepsilon} \Big\{ & m_1 \left(\frac{m_2}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{13}} + \frac{m_4}{r_{14}} + \ldots \right) \\ & + m_2 \left(\frac{m_1}{r_{21}} + \frac{m_3}{r_{23}} + \ldots \right) \\ & + \ldots \\ & \ldots\ldots \\ & + m_n \left(\frac{m_1}{r_{1n}} + \frac{m_2}{r_{2n}} + \ldots \right) \Big\}, \end{aligned}$$

wo ε die Dielektrizitätskonstante des Mediums, $m_1\, m_2$ etc. Ladungen (in unserem Falle sind alle gleich groß, positiv oder negativ, sie sind nur der Übersichtlichkeit halber numeriert), r_{12} etc. die gegenseitigen Abstände.

Vom Standpunkte der kinetischen Theorie können wir die Gesamtenergie der Ionen in ihre kinetische Energie und ihr gegenseitiges Potential zerlegen. Die kinetische Energie sei gleich ψ, die potentielle, die dem oben stehenden Ausdruck gleich ist, sei mit E bezeichnet. Wenn keine äußere Arbeit verrichtet wird, muß die Summe der beiden Energien konstant bleiben

$$E + \psi = \text{konst.}$$

Infolge der kinetischen Energie werden die Ionen über dem ganzen Volumen gleichmäßig verteilt und infolge der

gegenseitigen Kräfte muß die Verteilung eine solche sein, daß die potentielle Energie ein Minimum wird. Da sich die Ionen bewegen, bleibt dieser Minimalwert der potentiellen Energie nicht immer erhalten, sondern es findet fortwährend eine Verwandlung potentieller in kinetische Energie und umgekehrt statt. Nehmen wir jetzt noch an, daß die Ionen um die durch die Minimumsbedingung bestimmten Gleichgewichtslagen kleine Schwingungen ausführen (welches auch der Fall sein muß, wenn die wirkenden Kräfte groß sind), so kann man aus der angegebenen Formel die elektrische Energie als Funktion der Konzentration berechnen, wenn man die durch die Schwingungen bedingte Variation der elektrischen Energie in erster Annäherung vernachlässigt. In dem Ausdruck kommt jede Ladung vor multipliziert mit einer Reihe. Die Größe der Energie ist also erstens proportional der Anzahl der Ionen. Die Reihen enthalten weiter im Nenner die gegenseitigen Abstände. Da nun die Anordnung von der Konzentration unabhängig ist, so sind auch die Reihen für alle Konzentrationen dieselben, nur sind die Größen der Nenner verschieden und zwar proportional der dritten Wurzel aus dem Molekularvolumen, d. h. umgekehrt proportional der dritten Wurzel aus der Konzentration, wobei natürlich die Konzentration als n/V definiert werden muß.

Die elektrische Energie ist also proportional $n.(n/V)^{1/3}$

$$E = k \frac{n^{4/3}}{V^{1/3}}.$$

Die Proportionalitätskonstante enthält im Zähler m^2 und im Nenner die Dielektrizitätskonstante.

Wir können für die Energie des Feldes auch folgenden Ausdruck verwenden

$$E = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int \mathfrak{E}^2 \, dV,$$

wo $\mathfrak{E}$ die Feldstärke und dV ein Volumenelement bedeutet. Die Integration soll über den ganzen Raum mit Ausnahme der Ionen erstreckt werden. In einem bestimmten Punkt ist nun die Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \frac{m}{\varepsilon} \sum \frac{1}{r^2},$$

wo Σ geometrische Summation andeuten soll, sie ist also dem Quadrat der Abstände umgekehrt proportional. Da diese Abstände wieder umgekehrt proportional der dritten Wurzel aus der Ionenkonzentration sind, so wird die Energie proportional

$$\left(\frac{n}{V}\right)^{4/3}.$$

Da außerdem der Verlauf der Kraftlinien sich in verschiedenen Teilen des Volumens wiederholen muß, so ist die Energie dem Volumen proportional, also im ganzen gleich

$$k\left(\frac{n}{V}\right)^{4/3}.V.$$

Die Konstante enthält wieder im Zähler m^2 und im Nenner die Dielektrizitätskonstante.

Daß die Konstante für alle Konzentrationen denselben Wert haben muß, geht aus folgender Betrachtung hervor.

Wir denken uns zwei verschiedene Lösungen mit derselben Anzahl Ionen und von derselben Temperatur, aber von verschiedenen Volumen. Die kinetische Energie ist in beiden Fällen dieselbe und die potentielle ein Minimum. Kennt man nun für die eine Lösung die Konfiguration der Gleichgewichtslagen der Ionen, so ist sie auch für die andere Lösung bekannt und zwar muß sie in beiden Fällen dieselbe sein, nur ist der Abstand im Verhältnis der dritten Wurzel der Molekularvolumine vergrößert bez. verkleinert. Denn das Problem besteht im folgenden: Man soll eine Anzahl Massenpunkte so über ein gewisses Volumen gleichmäßig verteilen, daß eine Funktion ihrer gegenseitigen Abstände ein Minimum wird, wenn die Konzentration, d. h. der Abstand zweier benachbarter Punkte gegeben ist. Hat man diese Anordnung für einen Abstand r gefunden, so gilt sie unabhängig von der absoluten Größe von r und ist für alle Konzentrationen gegeben.

Bei diesen Betrachtungen ist vorausgesetzt, daß die in den Ausdrücken für die elektrische Energie vorkommenden Reihen konvergieren. Das muß auch der Fall sein. Denn sonst würde die in dem Ausdruck für die elektrische Energie vorkommende Konstante von der absoluten Menge der Lösung abhängig sein. Und die elektrische Energie der Volumeinheit,

die wir gleich $k(n/V)^{4/3}$ fanden, würde ebenfalls nicht nur von der Konzentration, sondern auch von der Menge der Lösung abhängen und man müßte bei der Mischung zweier Portionen derselben Lösung eine Wärmetönung erhalten. Dies ist aber nie beobachtet worden und wir können somit die Reihen als konvergent ansehen.

Dagegen ist es wenigstens fraglich, ob der gefundene Ausdruck noch gilt für Fälle, wo die Konzentration von Punkt zu Punkt variiert, z. B. bei der Diffusion von Elektrolyten. Das wäre nur der Fall, wenn die Reihen sehr schnell konvergieren.

Es liegt der Gedanke nahe, eine bestimmte Verteilung der Ionen anzunehmen und hieraus die Konstante k aus der nach anderer Berechnung gefundenen Zahl der Atome in einem Grammolekel zu berechnen oder umgekehrt aus einem gefundenen Wert von k die Anzahl Ionen in einem Grammmolekel.

Eine vollkommene gleichmäßige Verteilung wäre z. B. die, daß man den ganzen Raum in Würfel einteilt und in die Ecken abwechselnd positive und negative Ionen anbringt. In einer Ebene würde dann folgende Verteilung zustande kommen:

+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−

In der folgenden parallelen Ebene findet dann Umkehrung aller Vorzeichen statt. Natürlich muß hierbei bewiesen werden, daß diese Verteilung die genannte Minimumsbedingung erfüllt. Ich habe versucht, für diese Anordnung die Rechnung durchzuführen, bin aber damit noch nicht fertig geworden.

Es ist noch hinzuzufügen, daß die elektrische Energie ein negatives Verzeichen bekommen muß, weil in der nächsten Nähe eines positiven Ions sich mehr negative als positive Ionen befinden müssen und hierdurch die negativen Glieder in den Reihen überwiegen. Oder anders ausgedrückt: da die Anziehung der ungleichnamigen über die Abstoßung der gleichnamigen Ionen überwiegen muß, so hat das Potential der Kräfte ein negatives Vorzeichen.

Um einen vollständigen Ausdruck für die Energie der Ionen zu bekommen, müssen wir noch die Energie der Schwingungen, d. h. die magnetische Energie in Betracht ziehen. Diese wird aber, wie leicht einzusehen, gegen die elektrische Energie zu vernachlässigen sein. Denn die elektrische Anziehung zwischen zwei Massen m ist gleich

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{m^2}{r^2}.$$

Bewegen sich die Massen parallel, in welchem Falle die elektrodynamische Anziehung am größten ist, so ist diese gleich

$$\frac{m^2}{r^2}\frac{v^2}{c^2},$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit. Da die Geschwindigkeit höchstens gleich derjenigen der Wasserstoffmolekeln sein kann, d. h. gleich 1874 oder rund 2000 m/sek, so wird

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{2000^2}{(3\,.\,10^8)^2} = \tfrac{4}{9}\,.\,10^{-10}.$$

Wir erhalten also schließlich für die Energie des gelösten Elektrolyten folgenden Ausdruck:

$$U = n' u_1 + n u_2 + n u_3 - k\frac{n^{4/3}}{V^{1/3}}.$$

Die Entropie berechnet sich aus der Formel

$$d S = \frac{d U + p d V}{T},$$

wo p der osmotische Druck ist. Infolge der oben gemachten Annahme, daß die elektrische Energie sich über die sonstige Energie einfach superponiert, sind die u_1, u_2, u_3 wie bei den Gasen nur von der Temperatur abhängig und zwar

$$\frac{d u}{d t} = c_v,$$

während die Abhängigkeit der Energie vom Volumen in dem Glied $-k(n^{4/3}/V^{1/3})$ steckt. Wählen wir also T und V als Veränderliche, so wird

$$d U = (n' c_{v_1} + n c_{v_2} + n c_{v_3})\, d T + \tfrac{1}{3} k \left(\frac{n}{V}\right)^{4/3} d V.$$

Um die bei Volumvergrößerung geleistete äußere Arbeit $p dV$ zu berechnen, müssen wir die Abhängigkeit des Druckes vom

Volumen, d. h. die Zustandsgleichung kennen. Da der Dissoziationsgrad sich mit dem Volumen verändert, und diese Abhängigkeit erst aus dem Ausdruck der freien Energie berechnet werden kann, muß jetzt die Annahme gemacht werden, daß das Gemisch aus nicht dissoziierten Molekeln und Ionen sich so verhält, als ob keine Reaktion zwischen ihnen stattfinden würde, d. h. daß die freie Energie oder die Entropie dieser Molekelgattungen denselben Wert hat, als wenn sie allein in der Lösung bei ihrem Partialdruck existieren könnten. Diese Annahme muß auch bei der gewöhnlichen Theorie der Dissoziation gemacht werden. Es geschieht zwar oft stillschweigend, indem der Ausdruck der freien Energie eines Gemisches nicht reagierender Bestandteile auf ein dissoziiertes Gas angewendet wird.

Wenn keine Ladungen vorhanden wären, würde die bei der Volumvergrößerung dV geleiste äußere Arbeit gleich

$$(n' + 2n) R T \frac{dV}{V}$$

sein. Hierzu addiert sich jetzt nach der Annahme der Superposition der elektrischen Energie die Arbeit der elektrischen Kräfte. Diese ist aber

$$-\frac{\partial E}{\partial V} dV = -\tfrac{1}{3} k \left(\frac{n}{V}\right)^{4/3} dV.$$

Die ganze Arbeit, die wir jetzt in die Form $p\,dV$ bringen, wird also

$$p\,dV = (n' + 2n) \frac{RT}{V} dV - \tfrac{1}{3} k \left(\frac{n}{V}\right)^{4/3} dV.$$

Die Zustandsgleichung lautet also

$$\left[p + \tfrac{1}{3} k \left(\frac{n}{V}\right)^{4/3}\right] V = (n' + 2n) R T.$$

Sie gilt natürlich nur bei konstantem Dissoziationsgrad. Für einen vollständig dissoziierten Elektrolyten oder überhaupt für ein Gas, zwischen deren Molekeln Kräfte wirken, die ein Newtonsches Potential haben, wird die Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{v^{4/3}}\right) v = 2 R T,$$

wo v das Molekularvolumen und a eine Konstante.

Diese Gleichung ist der van der Waalsschen Gleichung ganz analog, nur fehlt die Volumkorrektion, da wir nur verdünnte Lösungen betrachten, und anstatt der 2. Potenz steht hier die $\frac{4}{3}$ Potenz. Hierdurch wird auch der Unterschied zwischen der Jahn-Nernstschen Theorie und der hier abzuleitenden besonders klar. Die van der Waalssche Theorie macht über die zwischen den Molekeln wirkenden Kräfte nur die Annahme, daß sie den Massen, d. h. dem Quadrat der Dichte proportional sind. Wir haben wieder die Kräfte eingeführt, die zwischen elektrisch geladenen Ionen herrschen müssen und deshalb dürfte diese Theorie jedenfalls für die elektrolytische Dissoziation[1]) eher anwendbar sein als die von Jahn und Nernst, die ja mit der aus der van der Waalsschen Gleichung abgeleiteten formell übereinstimmt.

Nebenbei sei bemerkt, daß man die van der Waalssche Gleichung nach derselben Methode ableiten kann, wie die hier aufgestellte. Nimmt man nämlich an, daß zwischen den Molekeln eines Gases Kräfte umgekehrt proportional der 4. Potenz des Abstandes wirken, so ist das Potential dieser Kräfte umgekehrt proportional der 3. Potenz des Abstandes, d. h. proportional

$$\left[\left(\frac{n}{V}\right)^{1/3}\right]^3 = \frac{n}{V}$$

und außerdem proportional der Anzahl Molekeln, also im ganzen gleich

$$-a\frac{n^2}{V}.$$

Das negative Vorzeichen kommt hinzu, wenn die Kräfte anziehend sind. Bei der Ausdehnung des Gases wird dann die geleistete Arbeit

$$p\,dV = nRT\frac{dV}{V} - a\frac{n^2}{V^2}dV$$

und die Zustandsgleichung, wenn

$$\frac{V}{n} = v$$

gesetzt wird

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)v = RT,$$

d. h. die van der Waalssche ohne Volumkorrektion.

---

1) Ein anderes Gebiet, wo diese Theorie Verwendung finden dürfte, ist diejenige der Elektronentheorie der Metalle.

Bis jetzt haben wir nicht in Betracht gezogen, daß bei einer Veränderung des Volumens auch dadurch Arbeit geleistet wird, daß das Lösungsmittel sich kontrahiert bzw. ausdehnt infolge der Elektrostriktion. Da wir hier die elektrische Arbeit berechnen, so wird die Elektrostriktion nur dadurch in Betracht gezogen, daß man die Veränderlichkeit der Dielektrizitätskonstante in Rechnung zieht. Denn die Arbeit der elektrischen Kräfte bei der Ausdehnung ist gleich der Abnahme der elektrischen Energie.

Schreiben wir also

$$k = \frac{k'}{\varepsilon},$$

so erhalten wir also für die elektrische Arbeit während der Ausdehnung dV

$$-\frac{\partial E}{\partial V}\,dV = -\frac{k'}{\varepsilon^2}\,\frac{n^{4/3}}{V^{1/3}}\,d\varepsilon - \frac{1}{3}\,\frac{k'}{\varepsilon}\,\frac{n^{4/3}}{V^{4/3}}\,dV.$$

Führt man die Dielektrizitätskonstante als Funktion der Feldstärke, die proportional $(n/V)^{2/3}$ ist, ein, so erhält man

$$\frac{d\varepsilon}{dV} = \frac{d\varepsilon}{d\left(\frac{n}{V}\right)^{2/3}}\cdot\frac{d\left(\frac{n}{V}\right)^{2/3}}{dV} = -\frac{2}{3}\,\frac{n^{2/3}}{V^{5/3}}\,\frac{d\varepsilon}{d\left(\frac{n}{V}\right)^{2/3}}.$$

Dies eingesetzt gibt für die elektrische Ausdehnungsarbeit

$$-\frac{1}{3}\,\frac{k'}{\varepsilon}\left(\frac{n}{V}\right)^{4/3} dV + \frac{2}{3}\,\frac{k'}{\varepsilon^2}\left(\frac{n}{V}\right)^{2}\frac{d\varepsilon}{d\left(\frac{n}{V}\right)^{2/3}}\,dV,$$

und die Zustandsgleichung wird für die Ionen

$$\left[p + \frac{1}{3}\,\frac{k'}{\varepsilon}\left(\frac{n}{V}\right)^{4/3} - \frac{2}{3}\,\frac{k'}{\varepsilon^2}\,\frac{d\varepsilon}{d\left(\frac{n}{V}\right)^{2/3}}\left(\frac{n}{V}\right)^{2}\right] V = 2\,n\,R\,T.$$

In der Zustandsgleichung tritt also eine neue Funktion, nämlich

$$\frac{d\varepsilon}{d\left(\frac{n}{V}\right)^{2/3}}$$

auf. Da diese vollkommen unbekannt ist, wollen wir zunächst bei der Annahme einer unveränderlichen Dielektrizitätskonstante bleiben. Würde sich diese Annahme als unrichtig erweisen, so sind die Formeln leicht zu erweitern.

Wir kehren jetzt zur Berechnung der Entropie zurück. Setzt man den oben gefundenen Wert für dU und den Wert für $p\,dV$ aus der Zustandsgleichung in die Entropiegleichung ein, so erhält man

$$T\,dS = n' c_{v_1}\,dT + n\,c_{v_2}\,dT + n\,c_{v_3}\,dT + \tfrac{1}{3} k \frac{n^{4/3}}{V}\,dV + (n' + 2n) R T \frac{dV}{V} - \tfrac{1}{3} k \left(\frac{n}{V}\right)^{4/3} dV.$$

Das Glied der Energieveränderung, welches vom Volumen abhängt, hebt sich also gegen ein entsprechendes Glied der äußeren Arbeit. Dies war auch a priori klar, denn in der Gleichung

$$dS = \frac{dU + p\,dV}{T}$$

steht im Zähler die Zunahme der Energie vermehrt um die äußere Arbeit. Wenn nun zwischen den Molekeln konservative Kräfte wirken, so ist eben die Zunahme ihres Potentiales gleich der negativen äußeren Arbeit der Molekularkräfte. Die lange Betrachtung war aber deshalb nicht überflüssig, weil sie uns die Zustandsgleichung gegeben hat.

Wir können nun direkt den oben bei der Besprechung der Jahn-Nernstschen Theorie gefundenen Ausdruck der Entropie (mit entsprechender Änderung der Bezeichnungen) hinschreiben

$$S = n' s_1 + n s_2 + n s_3 - n' R \log \frac{n'}{V} - 2 n R \log \frac{n}{V}$$

und für die freie Energie erhalten wir

$$F = n' f_1 + n f_2 + n f_3 + n' R T \log \frac{n'}{V} + 2 n R T \log \frac{n}{V} - k \frac{n^{4/3}}{V^{1/3}}.$$

Führen wir jetzt den Dissoziationsgrad α ein und bezeichnen wir die Gesamtzahl der gelösten Salzmolekeln mit n, so kommt anstatt n' $n(1-\alpha)$ und anstatt n $n\alpha$. Die Formel wird dann

$$F = n(1-\alpha) f_1 + n\alpha f_2 + n\alpha f_3 + n(1-\alpha) R T \log \frac{n(1-\alpha)}{V} + 2 n\alpha R T \log \frac{n\alpha}{V} - k \frac{(n\alpha)^{4/3}}{V^{1/3}}.$$

Behandlung verschiedener Fälle.

Nachdem wir jetzt einen Ausdruck für die freie Energie des binären Elektrolyten gewonnen haben, ist es leicht, die gewöhnlich in Betracht kommenden speziellen Fälle zu behandeln.

Dissoziationsgleichgewicht. **Ein in einem bestimmten Volumen Wasser aufgelöster Elektrolyt kann als ein System von konstantem Volumen betrachtet werden. Wird außerdem die Temperatur konstant gehalten, so ist die einzig mögliche Veränderung die einer Veränderung des Dissoziationsgrades. Die bei konstantem Volumen und Temperatur geltende Gleichgewichtsbedingung**

$$dF = 0$$

wird also, da α die einzige Veränderliche

$$\frac{dF}{d\alpha} = 0.$$

Durch Differentiation des oben gefundenen Ausdruckes nach α ergibt sich aber

$$RT\log\frac{n\alpha^2}{(1-\alpha)V} - \frac{4}{3}k\left(\frac{n\alpha}{V}\right)^{1/3} = f_1 - f_2 - f_3 - RT,$$

oder wenn wir die Konzentration $c = n/V$ einführen

$$RT\log\frac{c\alpha^2}{1-\alpha} - \frac{4}{3}k(c\alpha)^{1/3} = f_1 - f_2 - f_3 - RT.$$

Der Logarithmus der gewöhnlichen Dissoziationskonstante ist eine lineare Funktion der dritten Wurzel aus der Ionenkonzentration oder des reziproken Abstandes der Ionen.

Befindet sich in der Lösung noch ein zweiter Elektrolyt, so sind für alle vorkommenden Molekelgattungen solche Gleichungen aufzustellen. Haben die beiden Elektrolyte keine gemeinsame Ionen, so erhält man vier solche Gleichungen. Da sie transzendent sind, so ist die Lösung derselben nicht einfach. Jedenfalls sieht man aber schon, daß die rein elektrische Einwirkung des Zusatzes von fremden Ionen den Dissoziationsgrad vergrößern wird. Denn wenn wir die Dissoziationsgleichung so schreiben

$$\log\frac{c\alpha^2}{1-\alpha} - k_1(c\alpha)^{1/3} = k_2.$$

so besteht eben die rein elektrische Einwirkung darin, daß die gesamte Ionenkonzentration größer wird, d. h. das zweite Glied des linken Membrums wird größer und infolgedessen auch das erste, d. h. α nimmt zu. Hat man speziell einen schwach dissoziierten Elektrolyten, so wird angenähert nach dem Zusatz eines stark dissoziierten die Gleichung gelten:

$$\log D - k_1 c_1^{1/3} = k_2,$$

wo D die gewöhnliche Dissoziationskonstante und c_1 die Ionenkonzentration, d. h. die Konzentration der positiven oder negativen Ionen bedeutet. Nach dem Zusatz gilt die Gleichung

$$\log D' - k_1 (c_1' + c_2)^{1/3} = k_2,$$

wo D' die neue Dissoziationskonstante, c_1' die neue Konzentration der positiven Ionen des ersten Elektrolyten, c_2 die Ionenkonzentration des zweiten Elektrolyten bezeichnet. Durch Subtraktion erhält man

$$\log \frac{D'}{D} - k_1 [(c_1' + c_2)^{1/3} - c_1^{1/3}] = 0.$$

Schreibt man nun $D' = D + d$ und entwickelt den Logarithmus, so ergibt sich

$$\frac{d}{D} = k_1 [(c_1' + c_2)^{1/3} - c_2^{1/3}] = 0.$$

Ist c_2 sehr groß im Verhältnis zu c_1' und c_1, so erhält man angenähert

$$\frac{d}{D} = k_1 c_2^{1/3}.$$

Die relative Veränderung der Dissoziationskonstante ist proportional der dritten Wurzel der zugesetzten Ionenmenge und die Formel gibt auch eine angenäherte Methode zur Berechnung von k. Arrhenius hat nun in der oben erwähnten Arbeit die Veränderung proportional der Quadratwurzel gefunden. Um unsere Formeln auf den Fall anzuwenden, müßte aber c_1, c_1' und c_2 durch Lösung der genannten vier Gleichungen berechnet werden.

Elektromotorische Kraft von Konzentrationselementen. Es seien gegeben zwei gegeneinander geschaltete Elemente mit in bezug auf die Ionen umkehrbaren Elektroden. Der Stromkreis sei durch einen sehr großen Widerstand geschlossen.

Die einzige Veränderung, die im System vor sich gehen kann, ist dann die Überführung von Salz aus der einen Lösung in die andere, wobei äußere Arbeit geleistet wird und zwar ist die äußere elektrische Arbeit gleich $E . dM$, wo E die elektromotorische Kraft der Kombination und dM die bei der Überführung von dn Molekeln durch die Leitung geflossene Elektrizitätsmenge. Als Gleichgewichtsbedingung gilt dann, daß die Veränderung (Abnahme) der freien Energie gleich der äußeren Arbeit sein muß. Sind F und F' die freien Energien der Salzlösungen, so erhalten wir also

$$- d(F + F') = E . dM.$$

Die einzige Variable ist die Anzahl gelöster Salzmolekeln n und da in der einen Lösung n ebensoviel wächst wie sie in der anderen abnimmt, so erhalten wir

$$+ \frac{dF}{dn} - \frac{dF'}{dn} = E \frac{dM}{dn}.$$

Für F haben wir den Wert erhalten

$$F = n(1 - \alpha) f_1 + n\alpha f_2 + n\alpha f_3 + n(1 - \alpha) RT \log \frac{n(1 - \alpha)}{V} + 2 n\alpha RT \log \frac{n\alpha}{V} - k \frac{(n\alpha)^{4/3}}{V^{1/3}}.$$

Bei der Differentiation nach n hat man zu beachten, daß bei Veränderungen auch die Konzentration und infolgedessen α verändert wird. Es ergibt sich

$$\frac{dF}{dn} = (1 - \alpha) f_1 + \alpha f_2 + \alpha f_3 + (1 - \alpha) RT \log \frac{n(1 - \alpha)}{V} + (1 - \alpha) RT + 2\alpha RT \log \frac{n\alpha}{V} + 2\alpha RT - \tfrac{4}{3} k\alpha \left(\frac{n\alpha}{V}\right)^{1/3} + \frac{dF}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dn}.$$

Da das Dissoziationsgleichgewicht erhalten bleiben muß, ist $dF/d\alpha = 0$ und es bleibt übrig

$$\frac{dF}{dn} = f_1 + RT \log \frac{n(1 - \alpha)}{V} + RT - \alpha \left[f_1 - f_2 - f_3 + RT \log \frac{n(1 - \alpha)}{V} + 2 RT \log \frac{n\alpha}{V} - RT + \tfrac{4}{3} k \left(\frac{n\alpha}{V}\right)^{1/3} \right].$$

Das letzte Glied ist aus demselben Grunde gleich Null und wir erhalten

$$\frac{dF}{dn} = f_1 + RT\log c(1-\alpha) + RT.$$

Die Gleichgewichtsbedingung wird also

$$E\frac{dM}{dn} = RT\log\frac{c(1-\alpha)}{c'(1-\alpha')}.$$

dM/dn ist die bei der Überführung eines Grammolekels durchgeflossene Elektrizitätsmenge, also gleich $2M_0$, wenn man mit M_0 die bei der Abscheidung eines Grammolekels durchgeflossene Elektrizitätsmenge berechnet. Dieses eingesetzt ergibt

$$E = \frac{1}{2M_0}RT\log\frac{c(1-\alpha)}{c'(1-\alpha')}.$$

Die Nernstsche Formel ist also auch in diesem Falle gültig, wenn man sie auf das nicht dissoziierte Salz bezieht. Will man die elektromotorische Kraft durch die Ionenkonzentrationen ausdrücken, so hat man die gefundene Gleichung mit den für die beiden Lösungen geltenden Dissoziationsgleichungen zu kombinieren und bekommt

$$EM_0 = RT\log\frac{c\alpha}{c'\alpha'} - \frac{2}{3}k\left[(c\alpha)^{1/3} - c'\alpha')^{1/3}\right].$$

Enthalten die beiden Elemente verschiedene Lösungsmittel, so wird die elektromotorische Kraft

$$E.2M_0 = f_1 - f_1' + RT\log\frac{c(1-\alpha)}{c'(1-\alpha')}$$

mit entsprechender Änderung, falls die Formel auf die Ionenkonzentration bezogen wird.

Gefrierpunktserniedrigung. Die Lösung eines Elektrolyten stehe in Berührung mit der festen Phase des Lösungsmittels. Die freie Energie der festen Phase sei

$$F' = n_0' f_0',$$

ihr Volumen gleich V', dieselben Größen für die flüssige Phase sind V und

$$F = n_0 f_0 + n(1-\alpha)f_1 + n(1-\alpha)RT\log\frac{n(1-\alpha)}{V}$$
$$+ n\alpha f_2 + n\alpha f_3 + 2n\alpha RT\log\frac{n\alpha}{V} - k\frac{(n\alpha)^{4/3}}{V^{1/3}}.$$

Bei dem Übergang von Eis in Lösung oder umgekehrt wird das Volumen verändert und Arbeit gegen den äußeren Druck Π geleistet. Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann

$$d[F + F' + \Pi V + \Pi V'] = 0.$$

Die unabhängige Variable ist n_0, und da n_0 in der einen Phase ebensoviel zunimmt wie sie in der anderen Phase abnimmt, wird die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d}{d n_0}(F + \Pi V) = \frac{d}{d n_0}(F' + \Pi V').$$

Mit n_0 verändert sich V und auch α. Die Differentiation ergibt

$$\frac{d F'}{d n_0} = f_0' + \Pi \frac{d V}{d n_0'} = f_0' + \Pi v',$$

wo v' das Molekularvolumen des Eises.

$$\frac{d F}{d n_0} = f_0 - R T \frac{n(1+\alpha)}{V} \frac{d V}{d n_0} + \tfrac{1}{3} k \left(\frac{n \alpha}{V}\right)^{4/3} \frac{d V}{d n_0}.$$

Nehmen wir jetzt an, die Lösung sei so verdünnt, daß bei Zusatz von Lösungsmitteln das Volumen der Lösung sich nur um das Volumen des zugesetzten Lösungsmittels verändert, so ist $d V / d n_0 = v$ gleich Molekularvolumen und

$$\frac{1}{V} \frac{d V}{d n_0} = \frac{1}{n_0}.$$

Dieses eingesetzt gibt

$$\frac{d F}{d n_0} = f_0 - R T \frac{n \left[1 + \alpha\left(1 - \frac{1}{3} \frac{k}{R T} \left(\frac{n \alpha}{V}\right)^{1/3}\right)\right]}{n_0}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung wird also

$$f_0 - R T \frac{n}{n_0} \left[1 + \alpha\left(1 - \frac{1}{3} \frac{k}{R T} \left(\frac{n \alpha}{V}\right)^{1/3}\right)\right] + \Pi v = f_0' + \Pi v'.$$

Machen wir noch die Annahme, daß durch den Salzzusatz das Lösungsmittel nicht verändert worden ist, so ist beim Gefrierpunkt des reinen Lösungsmittels das thermodynamische Potential $f_0 + \Pi v$ derselben in den beiden Phasen gleich und wir erhahlten, da für kleine Gefrierpunktserniedrigungen

$$f_0 + \Pi v = (f_0 + \Pi v)_{t=0} - \frac{\partial (f_0 + \Pi v)}{\partial t} \cdot \Delta T,$$

$$f_0' + \Pi v' = (f_0' + \Pi v')_{t=0} - \frac{\partial (f_0' + \Pi v')}{\partial t} \cdot \Delta T,$$

$$f_0 + \Pi v - f_0' - \Pi v' = - \left[\frac{d (f_0 + \Pi v)}{\partial t} - \frac{\partial (f_0' + \Pi v')}{\partial t}\right] \cdot \Delta T.$$

Außerdem gilt bei konstantem Druck allgemein

$$d(U - TS + \Pi V) = - S\,d T,$$

also in unserem speziellen Falle

$$-\left[\frac{\partial (f_0 + \Pi v)}{\partial t} - \frac{\partial (f_0' + \Pi v')}{\partial t}\right] = s_0 - s_0' = \frac{q}{T},$$

wo q die molekulare Schmelzwärme des Lösungsmittels bedeutet. Die Gefrierpunktsformel wird dann

$$\frac{q}{R T^2} \cdot \Delta T = \frac{n}{n_0}\left[1 + \alpha\left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{k}{R T}(c\,\alpha)^{1/3}\right)\right].$$

Die Gefrierpunktserniedrigung wird also kleiner als aus der Molekelzahl $n(1 + \alpha)$ folgen würde.

Verteilung eines Elektrolyten zwischen zwei Lösungsmitteln. Bei der Verteilung eines Elektrolyten zwischen zwei gegenseitig unlöslichen Lösungsmitteln können zwei Fälle des Gleichgewichtes eintreten. Entweder verteilen sich beide Ionenarten in demselben Verhältnis, oder aber, es gehen mehr Ionen der einen Art in das eine Lösungsmittel über. Hierdurch entsteht an der Grenze eine elektrische Doppelschicht. Wir wollen die beiden Fälle einzeln behandeln.

1. Bezeichnen wir wieder die freien Energien der gelösten Stoffe in den beiden Phasen F und F', so lautet die Gleichgewichtsbedingung, da in diesem Falle nur die Gesamtkonzentrationen verändert werden können

$$\frac{d F}{d n} = \frac{d F'}{d n'},$$

also

$$f_1 + R T \log c (1 - \alpha) + R T = f_1' + R T \log c' (1 - \alpha') + R T$$

oder

$$R T \log \frac{c (1 - \alpha)}{c' (1 - \alpha')} = f_1' - f_1 = \text{konst.}$$

Für den nicht dissoziierten Teil gilt also der Nernstsche Verteilungssatz. Die Ionen dagegen verteilen sich nach der Formel

$$2 R T \log \frac{c\,\alpha}{c'\,\alpha'} - \left[\tfrac{4}{3} k (c\,\alpha)^{1/3} - \tfrac{4}{3} k' (c'\,\alpha')^{1/3}\right] = f_2' + f_3' - f_2 - f_3.$$

In den Ausdrücken $f_2 f_3 f_2' f_3'$ sind die Eigenenergien der Ladungen mit enthalten. Nimmt man an, daß diese über die sonstige Eigenenergie der Ionen überwiegt, so ist das rechte

Membrum gleich Null. Wenn außerdem das erste Glied der rechten Seite zu vernachlässigen wäre, d. h. wenn man überhaupt nur die elektrischen Kräfte in Betracht zu ziehen braucht, so erhält man

$$k(c\,\alpha)^{1/3} = k'(c'\,\alpha')^{1/3}$$

oder

$$\frac{c\,\alpha}{c'\,\alpha'} = \left(\frac{k'}{k}\right)^3.$$

Da die Konstanten k und k' im Nenner die Dielektrizitätskonstanten enthalten, so können wir schreiben

$$\frac{\alpha\,c}{c'\,\alpha'} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^3.$$

Die Ionen würden sich also unter den gemachten Annahmen im Verhältnis der dritten Potenzen der Dielektrizitätskonstanten verteilen, was nicht so ganz unwahrscheinlich ist.

2. Im zweiten Falle, wenn die beiden Ionenarten sich nicht in demselben Verhältnis verteilen, entsteht an der Grenze eine elektrische Doppelschicht mit gleich viel positiven und negativen Ionen. Die Energie dieser Doppelschicht ist mit Vernachlässigung aller übrigen Energie mit Ausnahme der elektrischen, und da eine solche Schicht als ein Kondensator angesehen werden kann

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{M^2}{K},$$

wo M die Ladung und K die Kapazität ist. Die freie Energie des ganzen Systems ist dann

$$F + F' + \tfrac{1}{2}\,\frac{M^2}{K}.$$

Da in der Grenzschicht sich ebensoviel + wie −Ionen befinden, so kommt das Gleichgewicht dadurch zustande, daß aus der ursprünglich konzentrierten Lösung eine gewisse Anzahl Grammolekeln in das andere Lösungsmittel und in die Grenzschicht wandern. In der Gleichgewichtsbedingung können wir deshalb n als Variable wählen und erhalten

$$\frac{\partial F}{\partial n}\,d\,n + \frac{\partial F}{\partial n'}\,d\,n' + \frac{M}{K}\,\frac{\partial M}{\partial n''}\,d\,n'' = 0,$$

wo n, n', n'' die Anzahl Molekeln in den Lösungsmitteln und in der Grenzschicht bedeuten. Außerdem muß

$$n + n' + n'' = \text{konst.}$$

Mit der Lagrangeschen Methode der unbestimmten Multiplikatoren erhält man dann als Minimumsbedingung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n} - \lambda\right) d n + \left(\frac{\partial F'}{\partial n'} - \lambda\right) d n' + \left(\frac{M}{K}\frac{\partial M}{\partial n''} - \lambda\right) d n'' = 0,$$

oder

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F'}{\partial n'} = \frac{M}{K}\frac{\partial M}{\partial n''} = E\frac{\partial M}{\partial n''},$$

d. h.

$$f_1 + R T \log c(1-\alpha) + R T = f_1' + R T \log c'(1-\alpha') + R T = E M_0,$$

oder wenn man mit der Dissoziationsgleichung kombiniert

$$f_2 + f_3 + 2 R T \log(c\alpha) - \tfrac{4}{3} k\, (c\alpha)^{1/3} + 2 R T = f_2' + f_3'$$
$$+ 2 R T \log(c'\alpha') - \tfrac{4}{3} k' (c'\alpha')^{1/3} + 2 R T = E M_0 . \text{ —}$$

Mit Hilfe der von Nernst gegebenen Ableitung der Dissoziationsgleichung[1]) durch Berechnung der isothermen Überführungsarbeit kann man auch die für diese Theorie geltende Gleichung erhalten. Man braucht dazu nur die gewöhnliche Gasgleichung durch die oben gegebene Zustandsgleichung zu ersetzen. Hierbei muß angenommen werden, daß sowohl der nicht dissoziierte Teil wie die Ionen für sich allein existenzfähig sind, welches mit der bei der jetzigen Ableitung gemachten Annahme, daß die Gesetze einer Mischung nicht reagierender Bestandteile auch für einen Dissoziationselektrolyten gelten, identisch ist.

Die übrigen Gleichungen können dann auf ähnliche Weise erhalten werden mit Hilfe der für einen Elektrolyten geltenden Zustandsgleichung

$$p + \tfrac{1}{3} k (c\alpha)^{4/3} = c(1+\alpha) R T,$$

wobei α entsprechend der Dissoziationsgleichung mit V variiert.

Prüfung der Formeln.

Zu einer Prüfung der Formeln wollen wir zunächst die aus der Leitfähigkeit berechneten Dissoziationsgrade heranziehen. Es sind zwar gegen die Anwendung der Formel

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda_0},$$

wo λ die molekulare Leitfähigkeit bei der betreffenden Konzen-

1) Vgl. W. Nernst, Theoretische Chemie.

tration, λ_0 diejenige bei der Konzentration Null, von vielen Seiten Einwände erhoben worden. Hierüber läßt sich aber wohl nichts bestimmtes sagen, solange für die Stromleitung in Elektrolyten keine exakte Theorie existiert. Sollte es sich ergeben, daß kein anderer Grund als die Veränderlichkeit der Ionenreibung mit der Konzentration gegen die Anwendung der Formel vorhanden ist, so muß sie doch in ziemlich großer Annäherung gültig sein.

Ein anderes Bedenken speziell gegen die Anwendung der hier abgeleiteten Theorie auf den Fall der Stromleitung liegt darin, daß die Theorie nur für den Fall abgeleitet wurde, daß die Ionen um ihre durch das Minimum der elektrischen Energie bestimmte Gleichgewichtslagen kleine Schwingungen machen. Beim Stromdurchgang bewegen sich die Ionen unter der Einwirkung äußerer Kräfte und da könnten vielleicht die Verhältnisse ganz anders sein. Jedenfalls kann es aber nützlich sein, eine unter möglichst einfachen Annahmen abgeleitete Theorie auch auf diesen Fall zu verwenden, weil dadurch jedenfalls ein Anhalt gewonnen werden kann, nach welcher Richtung die Theorie eventuell zu erweitern wäre.

Bevor wir aber zu einer solchen Prüfung schreiten, muß eine Bemerkung gemacht werden. Vom Standpunkt der hier dargestellten Theorie wäre es wohl möglich, daß das Dissoziationsgleichgewicht bei der Stromleitung ein anderes ist als sonst. Denn hierbei könnte die Verteilung der Ionen eine andere werden und zwar so, daß sich die positiven Ionen den negativen mehr nähern würden, weil sie sich gegeneinander bewegen, als bei Abwesenheit äußerer elektrischer Kräfte der Fall wäre. Hierdurch wird die Konstante k größer und infolgedessen muß in der Dissoziationsgleichung, damit die rechte Seite ihren Wert beibehält, das Glied

$$R\,T \log \frac{c\,\alpha^2}{1-\alpha}$$

wachsen, d. h. α wird größer. Ob nun die Stromzuführung einen solchen Einfluß auf das Gleichgewicht wirklich hat, kann nur experimentell entschieden werden. Jedenfalls muß, wenn dieses der Fall ist, ein neuer Gleichgewichtszustand eintreten, der unabhängig vom Strome, d. h. von der Geschwindigkeit

der Ionen ist. Denn sonst würde das Ohmsche Gesetz nicht gelten.

Wir wollen also die gefundene Formel des Dissoziationsgleichgewichtes auf dieses eventuell neue Gleichgewicht anwenden und mit der entsprechenden Formel von Jahn und Nernst vergleichen. Zu diesem Zwecke schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\text{I.}\quad \log \frac{c\,\alpha^2}{1-\alpha} - k_1 (c\,\alpha)^{1/2} = k_2\,.$$

Die Jahnsche Gleichung lautet

$$\text{II.}\quad \log \frac{c\,\alpha^2}{1-\alpha} + k_1\, c(2\,\alpha - 1) = k_2\,.$$

Außerdem nehmen wir noch die Formel, die man bei der Annahme van der Waalsscher Wechselwirkungen zwischen den Ionen erhält. Diese lautet

$$\text{III.}\quad \log \frac{c\,\alpha^2}{1-\alpha} - k_1\, c\,\alpha = k_2\,.$$

In den Formeln bedeutet jetzt log Briggschen Logarithmus. Die Werte für die Leitfähigkeiten entnehmen wir den neuesten Arbeiten von Kohlrausch[1]) und als Endleitfähigkeiten nehmen wir die daselbst extrapolierten Werte. Da ein kleiner Fehler in λ_0 bei dem größten Dissoziationsgrade einen großen Fehler in $c\,\alpha^2/1-\alpha$ bewirkt und die λ_0 als extrapolierte Werte immerhin mit einer kleinen Unsicherheit behaftet sein können, wollen wir die drei kleinsten Konzentrationen (0,0001 bis 0,0005 normal) fortlassen. Zum Vergleich der drei Formeln nehmen wir KCl. In der Fig. 1 sind die Werte von $\log(c\,\alpha^2/1-\alpha)$ als Funktion von bez. $(c\,\alpha)^{1/2}$, $c(2\,\alpha - 1)$ und $c\,\alpha$ aufgetragen. Die Linien sollten gerade sein, falls die Theorien richtig sind und die Leitfähigkeit ein genaues Maß des Dissoziationsgrades wäre. Wenn aber die Ionenreibung bei größeren Konzentrationen größer ist als bei kleineren, so sind alle α zu klein und infolgedessen wird die Kurve bei kleineren Konzentrationen, wo eine kleine Verände-

---

1) F. Kohlrausch, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin **44.** p. 1002. 1900.

rung von α sehr viel ausmacht, sich nach unten biegen. Dieses ist auch bei allen Kurven der Fall, allerdings bei II und III in viel höherem Grade als bei I.

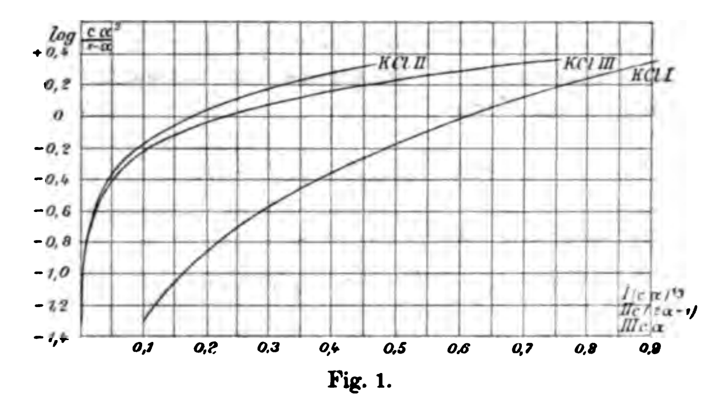


Fig. 1.

Für einen zahlenmäßigen Vergleich der drei Formeln ist in folgender Tabelle k_1 aus je zwei aufeinander folgenden Werten berechnet.

KCl (λ_0 = 130,10).

c	λ	α	$\log \frac{c\,\alpha}{1-\alpha}$	$(c\,\alpha)^{1/3}$
0,001	127,34	0,979	−1,341	0,0993
0,002	126,31	0,971	−1,187	0,1248
0,005	124,41	0,956	−0,974	0,1685
0,01	122,43	0,941	−0,824	0,2111
0,02	119,96	0,922	−0,662	0,2642
0,05	115,75	0,890	−0,444	0,3544
0,1	112,03	0,861	−0,272	0,4416
0,2	107,96	0,830	−0,091	0,5496
0,5	102,41	0,787	+0,163	0,733
1,0	98,27	0,755	+0,367	0,911

$c\,(2\,\alpha-1)$	$c\,\alpha$	k_1 I	k_1 II	k_1 III
0,000958	0,000979	6,05	−166	160
0,001884	0,001942	4,9	− 80	75
0,00456	0,00478	3,5	− 35	32
0,00882	0,00941	3,1	− 20	18
0,01688	0,01844	2,4	− 9,9	8,4
0,0390	0,0445	2,0	− 5,2	4,1
0,0722	0,0861	1,7	− 3,0	2,3
0,132	0,166	1,4	− 1,6	1,1
0,287	0,394	1,2	− 0,9	0,6
0,510	0,755			

Bei der Theorie I variiert k_1 von 6,05 bis 1,2, bei der Theorie II von -166 bis $-0,9$, bei III von 160 bis 0,6. Außerdem wird nach der Theorie II k_1 negativ, woraus im Sinne der van der Waalsschen Theorie auf abstoßende Kräfte zwischen dem nicht dissoziierten Salz und den Ionen zu schließen wäre.

Berechnet man nach der Theorie I einen Mittelwert (nach der Methode der kleinsten Quadrate), setzt diesen Wert $k_1 = 2,03$ in die Dissoziationsgleichung ein und rechnet hieraus für die in der Tabelle angegebenen Konzentrationen die Werte für k_2 aus, so erhält man

$c =$	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,05
$k_2 =$	$-1,54$	$-1,44$	$-1,32$	$-1,25$	$-1,20$	$-1,16$

$c =$	0,1	0,2	0,5	1,0
$k_2 =$	$-1,17$	$-1,21$	$-1,32$	$-1,48$

Die Abweichung der die Theorie I darstellenden Kurve könnte vielleicht durch einen schon oben erwähnten Umstand plausibel gemacht werden. Die Formel ist unter Annahme einer konstanten Dielektrizitätskonstante abgeleitet. Lassen wir diese Annahme fallen, so erhält man durch Differentiation der freien Energie noch α, wenn ε als Funktion der Feldstärke oder die damit proportionelle Größe $(c\,\alpha)^{2/3}$ dargestellt wird

$$R\,T \log \frac{c\,\alpha^2}{1-\alpha} - \frac{4}{3}\,\frac{k'}{\varepsilon}\left[1 - \frac{1}{2\,\varepsilon}(c\,\alpha)^{2/3}\frac{d\,\varepsilon}{d\,(c\,\alpha)^{2/3}}\right](c\,\alpha)^{1/3} = \text{konst.}$$

Wenn man nun k_1 als Funktion von $(c\,\alpha)^{2/3}$ berechnen würde, könnte man eine Differentialgleichung erhalten, aus der ε als Funktion von $(c\,\alpha)^{2/3}$ zu bestimmen wäre. Es lohnt sich aber nicht, diese lange Rechnung auszuführen, da der Einfluß der Ionenreibung nicht bekannt ist.

Nachdem jetzt festgestellt ist, daß die Theorie I besser stimmt als II und III, wenn man den Dissoziationsgrad aus der Leitfähigkeit berechnet, wollen wir jetzt die Theorie I noch auf andere Elektrolyte anwenden. Es ist hierbei zu erwarten, daß die Kurve für $\log c\,\alpha^2/1-\alpha$ als Funktion von $(c\,\alpha)^{1/3}$ für alle Elektrolyte mit einwertigen Ionen, wenn sie auch nicht geradlinig verläuft, doch dieselbe Neigung haben muß. Denn k_1, die diese Neigung darstellt, ist der Proportionalitätsfaktor

zwischen der elektrischen Energie der Volumeinheit und $(c\,\alpha$
Sie muß also, solange die Dielektrizitätskonstante diese
ist, für alle Elektrolyte dieselbe sein. In der Fig. 2 sind
Kurven für KCl, NaCl, LiCl, $LiNO_3$ gezeichnet. Mehrere El
trolyte sind nicht genommen, weil die Kurven fast zusamm
fallen und die Übersichtlichkeit dadurch gestört werden wür
Die Neigung der Kurven ist tatsächlich sehr nahe gleich. I
kleine Verschiedenheit der Neigung, die hauptsächlich
größeren Konzentrationen bemerkbar wird, kann schon du
eine kleine Verschiedenheit der Dielektrizitätskonstante erkl
werden. Denn ε ist die Dielektrizitätskonstante des die Io
oder, falls man sich auf den Standpunkt der Elektronentheo
stellt, die Elektronen umgebenden Mediums d. h. Was
und Salz.

Gehen wir jetzt zu den Elektrolyten mit zweiwerti
Ionen über. Wie schon oben erwähnt, enthält die K
stante k_1 im Zähler m^2, wenn m die Ionenladung bedeutet.
wäre deshalb bei den zweiwertigen Elektrolyten eine vier
so große Neigung der Kurven zu erwarten als bei den e
wertigen. Es ergibt sich aber das Resultat, daß die Neigu
nahezu dieselbe ist, und es fragt sich, ob hierfür eine I
klärung gefunden werden kann. Denkt man sich die Ladun
als Elektronen, die nicht immer mit den Ionen fest verbun
sind, sondern wenigstens zeitweise frei existieren können, e
Annahme, die nichts Unnatürliches enthält, da das Glei
gewicht ein bewegliches ist, so wird die Sache anders,
wenn man die Ionen als geladene Metallkugeln annimmt.
der elektrischen Energie hat man dann anstatt der Ion
konzentration die Elektronenkonzentration einzuführen. Di
ist gleich $2\,c\,\alpha$, wenn c die molekulare Konzentration l
deutet. Die elektrische Energie wird dann gleich

$$-\,k'\,\frac{(2\,n\,\alpha)^{4/3}}{V}\,,$$

wo k' die Konstante für zweiwertige Ionen bedeutet. Du
Differentiation erhält man dann

$$-\,\frac{4}{3}\,k'\,2\,n\left(\frac{2\,n\,\alpha}{V}\right)^{1/3}.$$

Falls $k' = k$ wäre, d. h. die Verteilung der Elektronen diesel

bei einwertigen wie bei zweiwertigen wäre, müßte also die Neigung der Kurven bei den letzteren zweimal so groß als bei den ersteren sein. Nun müssen aber die zu einem zweiwertigen Ion gehörigen Ladungen einander näher bleiben als zwei positive Ladungen bei einwertigen Ionen und hierdurch wird, wie leicht einzusehen, der absolute Wert der Konstante verkleinert und kann sogar kleiner werden als bei einwertigen. Ob diese Erklärung richtig ist, mag dahingestellt bleiben. Jedenfalls müßte, um diese Erklärung exakt in Formeln auszudrücken, die Theorie durch Berücksichtigung der Zusammenstöße der Ionen erweitert werden.

In der Fig. 2 sind die Kurven für $\log c\alpha^2/1-\alpha$ als Funktion von $(2c\alpha)^{1/2}$ aufgetragen.[1] Die Neigung ist kleiner als bei den einwertigen und für alle zweiwertigen nahezu gleich.

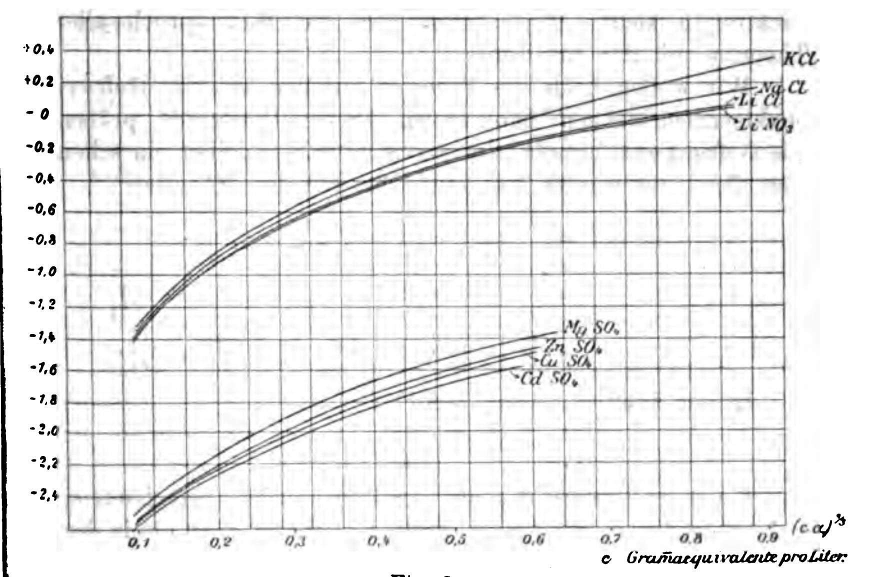


Fig. 2.

Als Beispiel eines schwach dissoziierten Elektrolyten nehmen wir Essigsäure ($\lambda_0 = 351,7$).

---

1) Berechnet nach F. Kohlrausch u. E. Grüneisen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 40. p. 1215. 1904.

v	λ	$\log\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)v}$	$\left(\frac{\alpha}{v}\right)^{1/3}$	$\frac{2\alpha-1}{v}$	$\frac{\alpha}{v}$
8	4,63	−4,66	0,1182	−0,122	0,00165
32	9,2	−4,66	0,0934	−0,0302	0,000816
64	12,9	−4,66	0,0831	−0,0145	0,000574
128	18,1	−4,66	0,0739	−0,0070	0,000403
256	25,4	−4,66	0,0656	−0,00335	0,000282
512	34,8	−4,69	0,0575	−0,00157	0,000190
1024	49,0	−4,66	0,0514	−0,000704	0,000136

Aus allen Theorien ergibt sich $k_1 = 0$, da

$$\log\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)v}$$

konstant bleibt, obwohl eine Veränderung der Ordinate schon zu erwarten wäre, da der Abszissenintervall hierzu groß genug ist, wie man durch Vergleich mit den Kurven für starke Elektrolyte sieht. Hierin liegt also ein Widerspruch aller Theorien mit der Erfahrung.

Wir wollen noch die Theorien mit der aus den Gefrierpunktserniedrigungen berechneten Dissoziationsgrade prüfen. Die Gefrierpunktformeln, die wir nicht alle ableiten, da schon eine abgeleitet worden ist, lauten für die drei Theorien:

$$\text{I.}\quad \frac{q}{RT^2}\Delta T = \frac{n}{n_0}\left[1+\alpha\left(1-\tfrac{1}{3}\frac{k}{RT}(c\,\alpha)^{1/3}\right)\right],$$

$$\text{II.}\quad = \frac{n}{n_0}\left[1+\alpha\left(1+\frac{2(a_{12}+a_{13})}{RT}c(1-\alpha)\right)\right],$$

$$\text{III.}\quad = \frac{n}{n_0}\left[1+\alpha\left(1-\frac{a_{22}+a_{33}+2a_{23}}{RT}c\,\alpha\right)\right].$$

In der zweiten Formel steht

$$+\,2\,\frac{a_{12}+a_{13}}{RT},$$

weil für diese Theorie das aus der Leitfähigkeit berechnete k_2 und infolgedessen $a_{12}+a_{13}$ negativ ist. Führt man die in den entsprechenden Dissoziationsgleichungen vorkommende Konstante k_1 ein, so erhalten die Formeln folgendes Aussehen:

$$\text{I.}\quad \frac{q}{RT^2}\Delta T = \frac{n}{n_0}\left[1+\alpha\left(1-\frac{k_1}{1{,}74}(c\,\alpha)^{1/3}\right)\right],$$

$$\text{II.}\quad = \frac{n}{n_0}\left[1+\alpha\left(1+\frac{k_1}{0{,}434}c(1-\alpha)\right)\right],$$

$$\text{III.}\quad = \frac{n}{n_0}\left[1+\alpha\left(1-\frac{k_1}{0{,}868}c\,\alpha\right)\right].$$

In jeder Gleichung kommen zwei Unbekannte, α und k_1, vor. Um sie lösen zu können, müssen wir also zuerst für die eine Unbekannte k_1 einen Wert *annehmen*, dann α ausrechnen, die so gefundenen Werte für α in die Dissoziationsgleichung einsetzen und hieraus wieder k_1 berechnen. Die Rechnung muß so lange fortgesetzt werden, bis der anfangs angenommene Wert von k_1 mit dem berechneten übereinstimmt.

Der Kürze halber wollen wir die Faktoren $k_1/1{,}74$ etc. mit h bezeichnen. Man hat also die aus der gewöhnlichen Gefrierpunktsformel berechneten Werte für α mit bez.

$$1 - h(c\,\alpha)^{1/3}, \quad 1 + h\,c(1-\alpha) \quad \text{und} \quad 1 - h\,c\,\alpha$$

zu dividieren. Als Beispiel nehmen wir Loomis Reihe für KCl. Als molekulare Gefrierpunktserniedrigung ist 1,85 genommen.

KCl.

c	Mol. Erniedrigung	α'	$\log \frac{c\,\alpha'^2}{1-\alpha'}$	$(c\,\alpha')^{1/3}$	$c(2\,\alpha'-1)$	$c\,\alpha'$
0,01	3,60	0,946	0,219 – 1	0,212	0,0089	0,0095
0,02	3,55	0,919	0,319 – 1	0,264	0,0168	0,0184
0,03	3,52	0,903	0,402 – 1	0,300	0,0242	0,0271
0,05	3,50	0,892	0,566 – 1	0,355	0,0392	0,0446
0,10	3,445	0,862	0,731 – 1	0,442	0,0724	0,0862
0,20	3,404	0,840	0,946 – 1	0,552	0,136	0,168
0,40	3,353	0,812	0,1468	0,687	0,250	0,325

α' ist der nach der gewöhnlichen Gefrierpunktsformel berechnete Dissoziationsgrad. Außerdem sind in der Tabelle die hieraus berechneten Werte für $\log c\,\alpha'^2/1-\alpha'$, $(c\,\alpha')^{1/3}$ etc., d. h. die Konstante h ist gleich Null angenommen. Die entsprechenden Kurven befinden sich auf der Fig. 3. Sie decken sich fast ganz mit den aus den Leitfähigkeiten berechneten. Für k_1 erhält man die Werte

	I.	II.	III.	
k_1 =	1,93	12,5	11,2	aus den zwei ersten Punkten
	1,49	1,76	1,28	„ „ „ letzten „

Die Kurve der Theorie I ist fast ganz geradlinig. Wenn also die gewöhnliche Gefrierpunktsformel gültig wäre, würde diese Theorie gut bestätigt werden.

Jetzt wollen wir die aus den Theorien folgenden Korrektionen anbringen.

Theorie I. Die in der Tabelle stehenden α' sind mit $1 - h(c\,\alpha)^{1/3}$ zu dividieren. Es gibt hierbei eine obere Grenze für h, indem α nicht > 1 werden darf. Wir wählen

$$h = 0{,}15 \quad \text{oder} \quad k_1 = 1{,}74 \, . \, 0{,}15 = 0{,}26\,.$$

Bei der Berechnung nehmen wir als angenäherten Wert für $(c\,\alpha)^{1/3}$ die in der Tabelle stehenden $(c\,\alpha')^{1/3}$. Das Resultat wird:

c	α	$\log \frac{c\,\alpha^2}{1-\alpha}$	$(c\,\alpha)^{1/3}$
0,01	0,978	0,639 − 1	0,214
0,02	0,957	0,629 − 1	0,268
0,03	0,946	0,670 − 1	0,300
0,05	0,942	0,884 − 1	0,361
0,10	0,925	0,057 − 1	0,452
0,20	0,916	0,301 − 1	0,568
0,40	0,906	0,661 − 1	0,713

Die entsprechende Kurve ist in der Fig. 3 als I′ bezeichnet. Die Neigung ist noch größer geworden als für die Kurve I. Bei der Annahme $k_1 = 0$ finden wir also durch

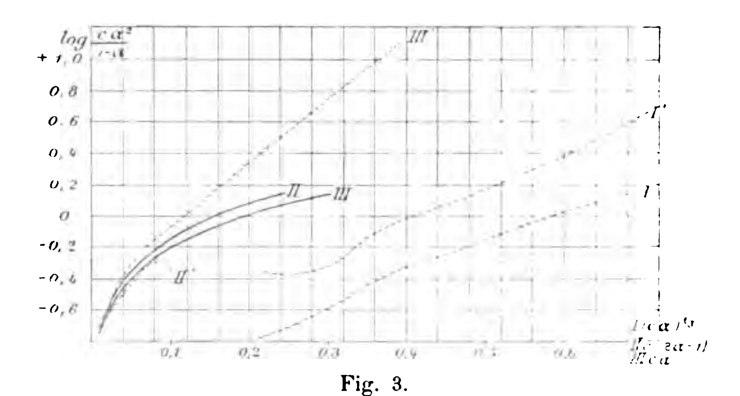


Fig. 3.

Berechnung $k_1 = 1{,}93$ bis $1{,}49$, bei der Annahme $k_1 = 0{,}26$ wird der berechnete Wert noch größer. Es ist also unmöglich, einen solchen Wert für k_1 zu finden, der die Theorie befriedigen würde.

Theorie II. α berechnet sich aus der Formel

$$\alpha' = \alpha[1 + hc(1 - \alpha)],$$

oder

$$\alpha = \frac{1 + hc - \sqrt{(1 + hc)^2 - 4hc\alpha'}}{2hc}.$$

α wird also jetzt kleiner als α'. Wählt man h zu groß, z. B. gleich 5, so steigt zunächst

$$\log \frac{c\alpha^2}{1-\alpha},$$

um dann wieder abzunehmen; dasselbe ist aber auch mit $c(2\alpha - 1)$ der Fall, und die Kurve bildet dann eine Schleife. Wir wollen deshalb h nur so groß wählen, daß keine Schleife entsteht, d. h. daß $c(2\alpha - 1)$ mit der Konzentration wächst. Ein solcher Wert ist $h = 2$ oder $k_1 = 0{,}434 . 2 = 0{,}868$.

Die Rechnung ergibt

c	α	$\log \frac{c\alpha^2}{1-\alpha}$	$c(2\alpha - 1)$
0,01	0,945	0,236 – 1	0,0089
0,02	0,917	0,308 – 1	0,0167
0,03	0,897	0,369 – 1	0,0238
0,05	0,883	0,522 – 1	0,0383
0,10	0,835	0,626 – 1	0,0670
0,20	0,770	0,712 – 1	0,0880
0,40	0,625	0,620 – 1	0,100

Die Kurve ist in der Fig. 3 als II′ bezeichnet.

k_1 variiert jetzt zwischen $-9{,}2$ und $+7{,}7$. Die Theorie II ist also auch nicht mit der Erfahrung in Übereinstimmung zu bringen.

Theorie III. Man erhält α aus der Formel

$$\alpha' = \alpha(1 - hc\alpha),$$

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - 4hc\alpha'}}{2hc}.$$

Wir wählen $h = 0{,}4$, $k_1 = 0{,}343$ und erhalten

c	α	$\log \frac{c\alpha^2}{1-\alpha}$	$c\alpha$
0,01	0,95	0,258 – 1	0,0095
0,02	0,925	0,358 – 1	0,0185
0,03	0,912	0,453 – 1	0.0274
0,05	0,910	0,653 – 1	0.0455
0,10	0,895	0,883 – 1	0,0895
0,20	0,907	0,248 – 1	0,1814
0,40	0,97	1,100	0,388

h ist schon etwas zu groß gewählt, da α mit steigender Konzentration zuerst fällt und dann wieder steigt. Die Kurve findet sich in der Fig. 3 als III'. Die Neigung ist auch hier größer geworden als bei der Annahme $k_1 = 0$, nämlich gleich 11,1 am Anfang und 8,9 am Ende der Kurve, obwohl nur 0,343 angenommen war.

Alle Theorien stehen somit in Widerspruch mit der Erfahrung. Ob man hieraus schließen muß, daß die Theorien durchweg falsch sind oder ob nicht vielmehr die Gefrierpunktsformeln unter falschen Annahmen (hierbei wäre vor allen Dingen die Annahme, daß das Wasser ganz dieselben Eigenschaften hat in der Lösung, wie reines Wasser, zu beanstanden), abgeleitet sind, kann jetzt nicht entschieden werden. Die Theorie I könnte vielleicht dadurch verbessert werden, daß man die Konstanz von ε aufgibt. Die Gefrierpunktsformel würde dann lauten, wenn man wieder ε als Funktion vom $(c\alpha)^{2/3}$ ausdrückt:

$$\frac{q}{RT^2}\Delta t = \frac{n}{n_0}\left[1 + \alpha\left(1 - \frac{1}{3}\frac{k'}{\varepsilon RT}(c\alpha)^{1/3} + \frac{2}{3}\frac{k'}{\varepsilon RT}\frac{d\varepsilon}{d(c\alpha)^{2/3}}c\alpha\right)\right].$$

Die Formel enthält jetzt zwei Korrektionsglieder, ein negatives und ein positives. Es wäre nun wohl möglich, daß diese sich in dem betrachteten Intervall nahezu aufheben, wodurch die gewöhnliche Gefrierpunktsformel in entsprechender Annäherung gültig wäre und diese gibt, wie oben gezeigt, eine Kurve, durch welche die Theorie bestätigt wird. Das ist aber nur eine Vermutung. Um diese Vermutung zu prüfen, könnte man die oben bei der Besprechung der Leitfähigkeiten erwähnte Berechnung der Dielektrizitätskonstante als Funktion von $(c\alpha)^{2/3}$ durchführen und die so gefundenen Werte für ε und

$$\frac{d\varepsilon}{d(c\alpha)^{2/3}}$$

in die Gefrierpunktsformel einsetzen. Diese Berechnung würde aber nur dann exakt werden, wenn man den Einfluß der Ionenreibung vorher eliminiert hätte. Da dieser aber nicht bekannt ist, wollen wir auf die Rechnung nicht eingehen.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit war ja nur die Theorie der elektrolytischen Dissoziation durch Berücksichtigung der

elektrischen Energie zu vervollständigen und zwar zunächst durch die einfachste und am nächsten liegende Annahme, daß die Ionen um gewisse Gleichgewichtslagen schwingen, ohne zusammenzustoßen. Wenn nun die so vervollständigte Theorie in gewissen Fällen mit der Erfahrung in Widerspruch steht, so wird man sie darum nicht ohne weiteres verwerfen, sondern immer die elektrische Energie in Betracht ziehen müssen und von einer weiteren Vervollständigung derselben die Lösung der Widersprüche erwarten.

(Eingegangen 26. September 1905.)

2. *Über die Strahlung des Chininsulfates; von A. Kalähne.*

§ 1. Die vorliegende Arbeit enthält die Resultate einer Reihe von Beobachtungen über die von Hrn. Le Bon [1]) entdeckte Strahlung des Chininsulfates. Die Untersuchung erstreckte sich mit Unterbrechungen über längere Zeit und war bereits im Gange, als ich durch ein Referat in den Beiblättern Kenntnis erhielt von einer ähnlichen Untersuchung, welche Miss Gates [2]) über denselben Gegenstand ausgeführt hat. Die Originalarbeit wurde mir erst später zugänglich; es zeigte sich dabei, daß ein Teil der Resultate unseren Arbeiten gemeinsam ist, daß sich aber in anderen Punkten Abweichungen ergeben. Übrigens sind Ziele und Methoden beider Untersuchungen verschieden.

Die von Le Bon beschriebene Erscheinung besteht in folgendem: Das als Arzneimittel käufliche neutrale Chininsulfat, ein lockeres weißes Pulver, zeigt bei plötzlichem Erhitzen auf Temperaturen zwischen 100 und 180° C. ein schwaches Aufleuchten, das nach einigen Sekunden bis Minuten wieder verschwindet. Beim Abkühlen tritt wieder Leuchten auf, das ebenfalls nach kurzer Zeit verschwindet. Während des Leuchtens beim Abkühlen hat nun nach Le Bons Beobachtung das Chininsulfat die Fähigkeit, die umgebende Luft leitend zu machen, so daß ein geladenes Elektroskop in der Nähe sich entlädt. Nach Angabe desselben Beobachters dringt die vom Chininsulfat ausgehende Wirkung, die als eine der Radiumstrahlung ähnliche Strahlung angesehen wird, durch Aluminiumfolie von 0,05 mm Dicke hindurch, ebenso durch Glas. Ob das Leuchten beim Erhitzen ebenfalls von einer Ionisation der Luft begleitet ist, hat Le Bon nicht untersucht oder aber er hat keine Wirkung

1) Le Bon, Compt. rend. **130.** p. 891. 1900; Beibl. **24.** p. 720. 1900. Ausführlich in Revue scientifique (4) **13.** p. 451. 1900.

2) F. C. Gates, Phys. Rev. **18.** p. 135. 1904; Beibl. **28.** p. 1080. 1904.

gefunden. Dagegen hat er bemerkt, daß die Ursache der Strahlung ein chemischer Vorgang ist, nämlich Wasserabgabe beim Erhitzen und Wasseraufnahme beim Erkalten. Zuführung von Wasserdampf durch Behauchen verstärkt das Leuchten und die entladende Wirkung; auch läßt sich ohne Erhitzen eine mit Aufleuchten verbundene Wasserabgabe erzwingen, wenn man das Chininsulfat mit Phosphorpentoxyd schüttelt.

Meine Beobachtungen bestätigen durchaus, daß der angegebene chemische Vorgang die Ursache der Strahlung ist, denn das erhitzte und dadurch entwässerte Sulfat gibt ohne Zuführung von Wasserdampf weder Leuchten noch Ionisation beim Abkühlen. Erst wenn man diesen zutreten läßt, erhält man beides, um so stärker je reichlicher die Zufuhr ist und je schneller der chemische Vorgang sich abspielen kann. Diesen Punkt hat Miss Gates, wie es scheint, gar nicht weiter berücksichtigt. Ihre Beobachtungen beziehen sich auf das *Temperaturintervall*, um welches sich das Sulfat abkühlt, und auf die *Abkühlungsgeschwindigkeit.* Dabei befand sich die Substanz in dünner Schicht auf einer Metallplatte entweder in freier Luft oder in einem Heizkasten. Die Dampfzufuhr ist infolgedessen abhängig von dem Feuchtigkeitsgehalt der Luft, von Strömungen derselben und auch, bei den Versuchen mit dem Luftbade, von der Größe des abgeschlossenen Luftvolumens, da sich nach diesem auch die Gesamtmenge der zur Verfügung stehenden Feuchtigkeit richtet. Die Verhältnisse sind also recht kompliziert und erschweren eine genaue Kontrolle des Vorganges. Das Resultat der Miss Gates, daß die Stromstärke, d. h. die Stärke der Ionisation, mit zunehmender Abkühlungsgeschwindigkeit wächst, läßt sich mit Rücksicht auf die stattfindende Reaktion einfach auf Grund physikalisch-chemischer Überlegungen erklären. Auch ein Versuch, bei dem durch Überleiten von trockener Luft über das erkaltende Sulfat die Abkühlung beschleunigt und dabei stärkere Wirkung erzielt wurde, scheint mir nicht beweisend für die Gatessche Auffassung, da nicht angegeben wird, wie die Trocknung erfolgte und welchen Querschnitt der Luftstrom besaß. Bei ungenügender Größe desselben muß man immer damit rechnen, daß der Strom aus der Umgebung feuchte Luft ansaugt und mitreißt, wodurch also die Wasserzufuhr vergrößert und das Gegenteil des Gewollten

erreicht wird. Bei den außerordentlich geringen Wassermengen, die zur Einleitung der Reaktion erforderlich sind, stößt diese Erklärung nicht auf Hindernisse. Auch das weitere von Miss Gates gefundene Resultat, daß Abkühlung auf 40° (von irgend welcher Temperatur zwischen 100 und 180°) bereits genügt, um die maximale Wirkung zu erzielen, und daß Abkühlung auf noch tiefere Temperaturen die Gesamtmenge der entladenen Elektrizität nicht mehr vergrößert, ist im Einklang mit physikalisch-chemischen Prinzipien, wie ich weiterhin zeigen werde.

Meine Absicht war zunächst, die Natur der Strahlung durch Absorptionsbeobachtungen an verschiedenen Stoffen zu untersuchen. Wegen des gleichzeitig vorhandenen sichtbaren Leuchtens vermutete ich, daß vielleicht die Ionisation der Luft eine sekundäre Wirkung sein könne, hervorgebracht durch kurzwelliges ultraviolettes Licht, das neben dem sichtbaren von dem Chininsulfat ausgestrahlt wird. Nach Lenard[1]) bewirkt ja ultraviolettes Licht mit Wellenlängen zwischen 150 und 200 $\mu\mu$ starke Ionisation der Luft. Diese Versuche, die ich später mit verbesserten Hilfsmitteln wieder aufgenommen habe und noch weiterzuführen gedenke, haben bisher keine Entscheidung zugunsten dieser Auffassung ergeben, doch spricht auch nichts dagegen.[2]) Es stellte sich aber die Notwendigkeit heraus, zunächst einmal die Bedingungen genauer zu untersuchen, unter denen die Strahlung entsteht, und die chemische Seite der Frage mit zu berücksichtigen. Dies geschieht im folgenden.

§ 2. Der die Strahlung erregende chemische Vorgang besteht, wie angegeben, in Wasserabgabe bez. Wasseraufnahme. Es kommt also in Betracht die Menge des Wassers, die Art und Weise der Abgabe und Aufnahme und die Geschwindigkeit des Vorganges. Alle diese Größen sind Funktionen der Temperatur und, wie man gleich hinzufügen kann, des Partialdruckes des Wasserdampfes in der Umgebung.

Die *Menge Wasser*, welche das an freier Luft aufbewahrte Chininsulfat beim Erhitzen bis zu 180° maximal abzugeben vermag, beträgt 4,78 bis 4,81 Gewichtsprozente. Die Versuche

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. **1.** p. 499. 1900; **3.** p. 298. 1900.

2) Miss Gates schließt ebenfalls aus ihren Beobachtungen, daß vermutlich eine Wirkung ultravioletten Lichtes vorliege.

wurden so ausgeführt, daß eine gewogene Menge Sulfat in einer Glasschale oder Metallschachtel im Trockenschrank längere Zeit auf Temperaturen über 100° erhitzt, dann zur Abkühlung verschlossen in einen mit konzentrierter Schwefelsäure gefüllten Exsikkator gesetzt und nach $^1/_2$ Stunde gewogen wurde. Die Menge 1,653 g Chininsulfat gab dabei 0,0795 g Wasser ab.

Tabelle 1.

Dauer der Erwärmung	Mittl. Temp.	Gewichtsverlust in Gramm	Gewichtsverlust in Proz.
45 Min.	95°	0,0790	4,78
2 Std. 5 Min.	98	0,0780	4,72
1 Std.	98	0,0795	4,81
1 Std.	130	0,0795	4,81
1 Std.	156	0,0795	4,81
9 Std. 20 Min.	86	0,0760	4,60

Tab. 1 zeigt, daß schon bei 86° nahezu das Maximum abgegeben wird, wenn man sehr lange erhitzt. Andere Versuche mit größeren oder kleineren Sulfatmengen bestätigen diese Resultate.

Die *Geschwindigkeit*, mit der diese Wassermenge abgegeben wird, hängt sehr von der Temperatur ab. Sie nimmt, wie das im allgemeinen bei den chemischen Reaktionen der Fall ist, mit steigender Temperatur schnell zu. So wurde mit derselben Menge (1,653 g) Sulfat beobachtet:

Tabelle 2.

Mittl. Temp.	Dauer der Erwärmung	Gewichtsverlust in Gramm	Gewichtsverlust in Proz.
94°	— Std. 20 Min.	0,0335	2,01
98	1 „ — „	0,0795	4,81
85	2 „ 10 „	0,0360	2,18
84	3 „ 15 „	0,0375	2,27
86	9 „ 20 „	0,0760	4,60
71	3 „ 55 „	0,0030	0,18

Mit der größeren Menge von 4,017 g Sulfat, die in ziemlich dicker Schicht den Boden einer flachen Blechbüchse von 8,5 cm Durchmesser bedeckte, so daß Zutritt und Weggang von Wasserdampf etwas erschwert war, erhielt man für Wasserabgabe und Wasseraufnahme folgende Resultate (Tabb. 3 u. 4):

Tabelle 3.

Mittl. Temp.	Dauer der Erwärmung	Gewichtsverlust	Gewichtsverlust in Proz.
	Min.	Gramm	
150°	5	0,191	4,75
130	5	0,163	4,05
100	10	0,126	3,14

Tabelle 4.

Dauer des Offenstehens bei 20°		Gewichtszunahme	Gewichtszunahme in Proz.
Std.	Min.	Gramm	
—	32	0,10	2,49
—	50	0,11	2,74
1	50	0,144	3,58
17	—	0,191	4,75

Die Wasseraufnahme erfolgte hier ebenfalls ziemlich langsam. Das entwässerte Sulfat hatte zunächst 3 Stunden in der verschlossenen Schachtel gestanden und dabei infolge des langsamen Hineindiffundierens von Wasserdampf durch die Spalten des nicht absolut dichtschließenden Deckels um nur 0,004 g an Gewicht zugenommen. Das zeigt, daß der Verschluß hinreichend dicht hält, wenn es sich nur um kurze Zeiten handelt. Für die später angestellten Absorptionsversuche ist diese Tatsache von Bedeutung.

Nach Öffnung der Büchse nahm das Sulfat beim Stehen an freier Luft mit normalem Feuchtigkeitsgehalt in der aus Tab. 4 zu ersehenden Weise an Gewicht zu. Zwei Stunden genügen in diesem Falle also noch nicht, um die Reaktion zu Ende zu führen. Die Büchse blieb die Nacht über geöffnet stehen; am nächsten Morgen (nach 17 Stunden) hatte das Sulfat wieder das alte Gewicht. Daß aber die hier beobachtete Langsamkeit der Reaktion nur eine Folge der Erschwerung des Wasserzutrittes ist, und daß unter günstigeren Verhältnissen in wenigen Minuten das gesamte Wasser aufgenommen oder abgegeben wird, zeigen andere Versuche. Bei den Absorptionsversuchen mit Quarz hatten z. B. 0,163 g Sulfat in einer Blechbüchse erhitzt 0,008 g oder 4,9 Proz. Wasser abgegeben. Nach dem Erkalten geöffnet und schnell mit einem Decke verschlossen, der innen mit feuchtem Fließpapier aus-

gekleidet war, nahm die Büchse in 5 Min. wieder um 0,008 g an Gewicht zu; also dauerte die ganze Reaktion höchstens diese kurze Zeit, wie auch an der Dauer des Leuchtens zu erkennen war. Dasselbe ergibt sich aus den später zu beschreibenden Versuchen in geschlossenem Gefäß, in welches feuchte Luft eingeleitet wurde.

Die bisherigen Versuche hatten ergeben, daß die beim Erhitzen abgegebene Gesamtmenge des Wassers unabhängig ist von der Höhe der Temperatur, wenigstens von 86° aufwärts; nur die Geschwindigkeit wächst mit steigender Temperatur. Ein anderer Faktor ist dabei unberücksichtigt geblieben, nämlich der Partialdruck des Wasserdampfes in der Umgebung. Alle Anzeichen weisen darauf hin, daß die Wasserabspaltung des Chininsulfates ein umkehrbarer Dissoziationsprozeß ist, der von Temperatur und Druck abhängt, wie z. B. die Dissoziation von $CaCO_3$ in CaO und CO_2 und andere. Bei einer gegebenen Temperatur hat danach das Chininsulfat infolge teilweiser Dissoziation einen ganz bestimmten Wasserdampfdruck. Ist der Partialdruck des in der Umgebung befindlichen Wasserdampfes kleiner als dieser Dissoziationsdruck, so gibt das Sulfat mehr Wasser ab, es dissoziiert sich weiter, und wenn durch Entfernung des abgegebenen Dampfes dafür gesorgt wird, daß der Partialdruck desselben nicht steigt, so zersetzt sich das Sulfat bei dieser Temperatur vollständig. Umgekehrt nimmt es wieder alles Wasser auf, wenn der äußere Partialdruck größer ist. Die Reaktion verläuft in beiden Fällen vollständig in der einen oder der anderen Richtung; ihre Geschwindigkeit hängt aber ab von der Temperatur und von der Differenz zwischen dem Dissoziationsdruck und dem äußeren Partialdruck des Wasserdampfes.

Eine ganze Anzahl von Erscheinungen weist auf ein solches Verhalten des Chininsulfates hin. Zunächst die aus Tab. 1 folgende Tatsache, daß die gesamte abgegebene Wassermenge unabhängig ist von der Erhitzungstemperatur. Diese Versuche werden ergänzt durch folgenden: 2,327 g Sulfat wurden in einem Uhrglas offen in einen mit konzentrierter Schwefelsäure gefüllten Exsikkator gesetzt und bei Zimmertemperatur (etwa 22°) sechs Tage darin gelassen. Der Gewichtsverlust durch Wasserabgabe betrug danach 0,055 g oder 2,36 Proz., d. h.

etwa die Hälfte des möglichen. Bei längerem Stehen wird schließlich alles Wasser abgegeben, wie ein anderer Versuch zeigt, bei dem 0,607 g Sulfat 45 Tage lang bei 10—20° im Exsikkator standen. Der Gewichtsverlust betrug am Ende dieser Zeit 0,029 g oder 4,78 Proz. wie früher bei Erhitzung. Der Vorgang ist nur dann möglich, wenn der Dissoziationsdruck des Chininsulfates bei 20° größer ist als der sehr kleine Dampfdruck der konzentrierten Schwefelsäure; wegen der niedrigen Temperatur verläuft er aber sehr langsam. Damit ist zugleich die untere Grenze für den Dissoziationsdruck bei 20° gegeben; die obere ist offenbar durch den Partialdruck des bei mittlerem Feuchtigkeitsgehalt in der Luft vorhandenen Wasserdampfes bestimmt, sie beträgt also in ganz roher Annäherung etwa 15 mm. In Wirklichkeit kann man sie aber noch niedriger ansetzen. Dies ergibt sich aus der Beobachtung, daß durch Erhitzen entwässertes Chininsulfat erst bei Abkühlung auf etwa 40° C. zu leuchten beginnt, wenn es in freier Luft steht. Bei dieser Temperatur ist also der Dissoziationsdruck gleich dem Partialdruck des Wasserdampfes in der Luft, den wir zu etwa 15 mm angenommen hatten. Demnach muß er bei 20° kleiner sein. Oberhalb 40° ist unter diesen Umständen weder Leuchten noch Ionisation zu bemerken, weil keine Wasseraufnahme stattfinden kann. So erklärt sich das Resultat von Miss Gates ganz einfach, daß bei Abkühlung auf 50° keine entladende Wirkung eintritt, bei Abkühlung auf 40° jedoch bereits das Maximum der Entladung erreicht wird, das bei weiterer Abkühlung nicht mehr wächst.

Handelt es sich um einen Dissoziationsprozeß der geschilderten Art, so muß das entwässerte Sulfat auch bei höherer Temperatur wieder alles Wasser aufnehmen, wenn man nur den Partialdruck des Dampfes genügend erhöht. Der Versuch bestätigt dies. Erhitzt man eine dünne Schicht Sulfat auf der Platte der weiter unten beschriebenen Dampfkammer in freier Luft auf 100°, so gibt es sein Wasser ab, wie man an dem beim Abkühlen auftretenden Leuchten erkennt. Läßt man nun, während es dauernd auf 100° gehalten wird, mittels eines Schlauches auf 100° erhitzten Wasserdampf in kräftigem Strom darüberstreichen, so leuchtet es genau wie sonst bei tieferer Temperatur auf, und dies Leuchten dauert so lange, bis

die Wasseraufnahme beendet ist. Bei Unterbrechung des Dampfstromes und weiterem Erhitzen wird wieder Wasser abgegeben und man kann dies Spiel beliebig lange fortsetzen. Daraus folgt außerdem, daß der Dissoziationsdruck bei 100° sicher kleiner ist als 750 mm, wahrscheinlich erheblich unter diesem Werte liegt.

Aus den angeführten Beobachtungen kann man mit ziemlicher Gewißheit schließen, daß der strahlungerzeugende Vorgang ein Dissoziationsprozeß mit den angegebenen Eigenschaften ist. Zweifelhaft bleibt allerdings, ob es ein einheitlicher Vorgang ist, oder ob eine stufenweise Dissoziation vorliegt. Auch ist es unbekannt, ob daneben noch andere dauernde chemische Veränderungen verlaufen, da man über die Konstitution des Chininsulfates überhaupt noch ganz im unklaren ist.

§ 3. Man hat es nun ganz in der Gewalt, den Dissoziationsvorgang langsamer oder schneller verlaufen zu lassen durch geeignete Wasserdampfzufuhr und die Wahl der Temperatur, und kann damit die Strahlungsintensität beliebig ändern. Diese hängt aber möglicherweise auch noch direkt von der Temperatur ab, und es ergeben sich so eine ganze Reihe von Versuchsmöglichkeiten und eine Anzahl Fragen, die einzeln zu behandeln sind. Die im folgenden mitgeteilten Beobachtungen beziehen sich im wesentlichen auf die Gesamtstrahlung, gemessen durch die gesamte entladene Elektrizitätsmenge, unter verschiedenen Bedingungen.

Nach den ersten resultatlosen Absorptionsversuchen, bei denen sich starke Absorption der Strahlung in Luft ergeben hatte, wurden Versuche gemacht, um über das Verhalten der Strahlung in anderen Gasen Aufschluß zu erhalten. Wasserstoff und Kohlensäure wurden dazu gewählt, und ein Entladungsgefäß (Fig. 1) konstruiert, das auch zu den späteren Versuchen gedient hat.

Das Chininsulfat wurde in dünner Schicht auf einer Messingplatte *M* ausgebreitet, die mit einer Glasglocke *G* überdeckt war. An die Messingplatte *M* war unten eine flache mit ebenem Boden geschlossene Büchse *D* angelötet, durch welche mit Hilfe zweier Rohransätze ein Dampf- oder Flüssigkeitsstrom zum Erhitzen bez. Abkühlen geleitet werden konnte. Auf diese *„Dampfkammer“* wurde die Glasglocke unter Zwischenlegung eines dünnen Kautschukringes aufgesetzt und mit Hilfe des Messing-

ringes *R* und der Schrauben *S* angedrückt. Die Glocke besaß oben eine mit durchbohrtem Kautschukstopfen verschlossene Öffnung, durch welche zwei Glasröhren *Z* und *A* zum Hindurchleiten der Gase und außerdem die isolierte Zuleitung zu einer der Sulfatschicht gegenüberstehenden Elektrode *E* aus Messingdrahtnetz hindurchführten. Die Dimensionen sind: Höhe der Glocke 10 cm, innerer Durchmesser 6 cm. Durchmesser des Drahtnetzes 4,5 cm; sein Abstand vom Boden war zwischen 0,5 und 1,0 cm. Die eine Glasröhre, welche je nach Bedarf trockenes oder feuchtes Gas in das Gefäß hineinführte, endigte dicht über dem Elektrodennetze. Zur Heizung wurde Wasserdampf verwandt, der in raschem Strome durch einen Kautschukschlauch aus einem metallenen Kessel entnommen wurde. Die Temperatur der Deckplatte der Dampfkammer und damit des Chininsulfates kann dabei annähernd gleich der Siedetemperatur des Wassers gesetzt werden. Wasserstoff wurde im Kippschen Apparat aus Zink und 10 Proz. Schwefelsäure hergestellt, Kohlensäure ebenso aus Marmor und Salzsäure. Das Gas passierte eine Waschflasche mit Sodalösung zur Beseitigung mitgerissener Säure, und wurde dann entweder durch eine Waschflasche mit konzentrierter Schwefelsäure und ein Rohr mit Phosphorpentoxyd zum Trocknen geleitet oder durch eine mit Wasser gefüllte Waschflasche und ein mit feuchter Wolle versehenes Rohr, in dem es mit Feuchtigkeit gesättigt wurde. Beide Zweige der Gasleitung waren durch Glashähne absperrbar. Hinter den Röhren vereinigten sie sich wieder und waren durch einen kurzen Kautschukschlauch mit der in das Entladungsgefäß hineinführenden Glasröhre verbunden. Die ganze später vervollkommnete Anordnung ist schematisch in Fig. 2 dargestellt. Die Versuche ergaben folgendes:

Fig. 1.

Es wurden 0,322 g Chininsulfat in lockerer Schicht von ca. 2 mm Höhe und 55 mm Durchmesser benutzt. Der Abstand zwischen der Schicht und der Netzelektrode betrug etwa 8 mm. Das Elektrometer mitsamt der Netzelektrode wurde mit einer geriebenen Siegellackstange negativ geladen auf etwa 300 Volt, während das Elektrometergehäuse und die Dampf-

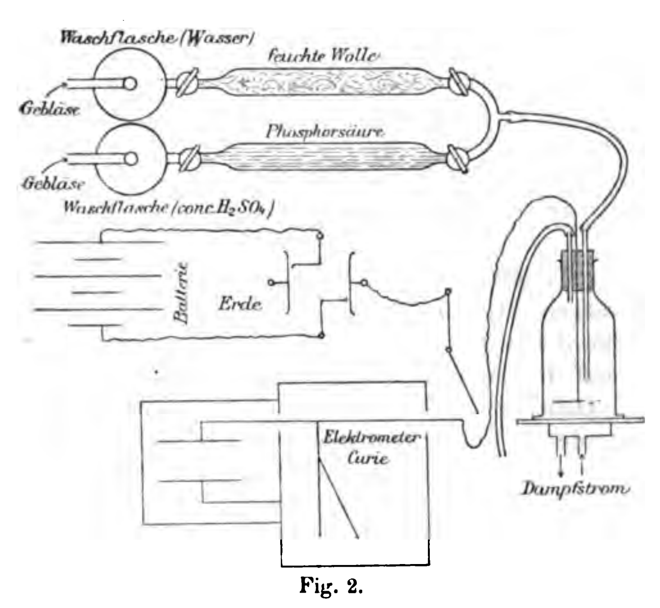


Fig. 2.

kammer mit dem Chininsulfat geerdet waren. War das Entladungsgefäß mit Luft oder mit Wasserstoff (trocken oder feucht), ruhend oder strömend gefüllt, so ergab sich wegen der Leitung durch die festen Isolatoren und infolge der normalen Leitfähigkeit der Gase ein Spannungsverlust pro Minute von etwa 4—5 Skt. im Mikroskop des Elektrometers oder etwa 3,6 Volt/Minute.

Wasserstoff: Entladungsgeschwindigkeit ohne Strahlung 4,0 Skt./Minute. Beim Erhitzen und Durchleiten von trockenem Wasserstoff fand sich *ohne Leuchten* ein merkbar größerer Verlust, wie Tab. 5 zeigt. Darin bedeutet t die Zeit, s die abgelesenen Skalenteile, v die Entladungsgeschwindigkeit, bezogen auf die Minute als Zeiteinheit, d. h. den Spannungsverlust in einer Minute ausgedrückt in Skalenteilen, $v_{\mathrm{corr.}}$ die Geschwindigkeit, vermindert um den normalen Verlust ohne Strahlung.

Tabelle 5.

Erhitzt auf 100° in Wasserstoff.

t	$s^{(-)}$	v	$v_{corr.}$
49 Min.	39		
		12	8
50	51		
		20	16
51	71		
		44	40
52	115		
		4	0
53	119		
		9	5
54	128		
		6	2
55	134		
		5	1
*56	139		
		4	0
—	—		
59	151		

* Erhitzen beendet.

Während des Abkühlens wurde weiter trockener Wasserstoff durchgeleitet, wobei sich $v = 4{,}4$ ergab, während der Zeit von 6 Uhr 3 Min. bis 6 Uhr 13 Min. Nunmehr wurde feuchter Wasserstoff in raschem Strome über das entwässerte Sulfat geleitet. Dabei leuchtete das Sulfat hell auf und das Elektrometer wurde so schnell entladen, daß es nicht möglich war, den Vorgang genau zu verfolgen. Mehrere Male mußte neu geladen werden. Es wurde beobachtet.

Tabelle 6.

Feuchter Wasserstoff bei 20°.

t		$s^{(-)}$	Diff.	v	$v_{corr.}$
20 Min.	0 Sek.	9			
			31	31	27
21	0	40			
			100	200	196
	30	140			
*22	0	80			
			80	320	316
	15	160			
*23	10	60			
			60	180	176
	30	120			
			45	135	131
	50	165			
*27	30	131			
			3	6	2
28	0	134			
			2	4	0
	30	136			
			2	2	0
29	0	—			
	30	138			

* bedeutet: neu geladen.

Beobachtet wurden also Entladungsgeschwindigkeiten von 320 Skt./Minute, und der gesamte beobachtete Ladungsverlust betrug 316 Skt. in der Zeit von 20 Min. 0 Sek. bis 23 Min. 50 Sek.; doch ist dies nur ein Teil des Gesamtverlustes, da während der Zeit der Neuladung nicht beobachtet werden konnte und von 23 Min. 50 Sek. bis 27 Min. 30 Sek. ebenfalls noch starke Entladung erfolgte. Beim Erhitzen hatte der gesamte Ladungsverlust in 10 Min. nur 112 Skt. betragen.

Luft. Die Luft wurde einem großen Gasometer entnommen. Die Entladungsgeschwindigkeit ohne Strahlung war 4,3 Skt./Minute.

Tabelle 7.

Erhitzt auf 100° in Luft.

t	$s^{(-)}$	Diff.	v	$v_{corr.}$
30 Min. 30 Sek.	42			
		11	22	17,7
31 0	53			
		33	33	28,7
32	86			
		9	9	4,7
33	95			
		7	7	2,7
34	102			
		6	6	1,7
35	108			
		8	8	3,7
*36	116			
		16	8	3,7
—	—			
38	132			
		25	6,3	2
—	—			
41	157			

* Erhitzen beendet.

Tabelle 8.

Feuchte Luft bei 20°.

t	$s^{(-)}$	v	$v_{corr.}$
57 Min. 0 Sek.	30		
		7	2,7
58	37		
		48	43,7
59	85		
		45	40,7
60	130		
		18	13,7
61	148		
		5	0,7
62	153		
		4	0
63	157		
		2	0
64	159		

Auch hier ist der Ladungsverlust beim Überleiten von feuchter Luft größer als beim Erhitzen, doch sind die Geschwindigkeiten sowohl, wie auch die Gesamtverluste kleiner als bei Wasserstoff.

***Kohlensäure:* Entladungsgeschwindigkeit ohne Strahlung 3,2 Skt./Minute.**

Tabelle 9.

Erhitzt auf 100° in CO_2.

t	$s^{(-)}$	v	$v_{corr.}$
31 Min.	25		
		12	8,8
32	37		
		6	2,8
33	43		
		6	2,8
34	49		
		5	1,8
35	54		
		5	1,8
36	59		
		6	2,8
37	65		
		7	3,8
*38	72		

*** Erhitzen beendet.**

Beim Abkühlen geht die vergrößerte Entladungsgeschwindigkeit wieder auf den normalen Wert zurück.

Tabelle 10.

Feuchte CO_2 bei 20°.

t	$s^{(-)}$	v	$v_{corr.}$
58 Min.	47		
		23	19,8
59	70		
—	—	25	21,8
61	120		
		18	14,8
62	138		
		12 *	8,8
63	150		
		8	4,8
64	158		
*65	60		
		6	2,8
66	66		
		5	1,8
67	71		
		2	0
68	73		

* Neu geladen.

Das Ergebnis dieser Versuche ist, daß sowohl die Entladungsgeschwindigkeit (Stromstärke) als auch die gesamte entladene Elektrizitätsmenge von der Art des umgebenden Gases abhängt. Vergleicht man die Ladungsverluste in 4 Min. miteinander, so ergibt sich

Tabelle 11.

	Ladungsverlust	
	Erhitzen	Feuchtes Gas
Wasserstoff	80 Skt.	über 316 Skt.
Luft	66	118
Kohlensäure . . .	29 (34)	91 (103)

Die eingeklammerten Werte bei Kohlensäure gelten für die Zeit von 5 Min. Die Zahlen der Tab. 11 können nur als ziemlich rohe Näherungswerte gelten, zeigen aber eine deutliche

Abnahme von Wasserstoff gegen Kohlensäure hin. Ob diese Gase durch die Strahlung verschieden stark ionisiert werden, oder ob die Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen in Luft und Kohlensäure so viel geringer ist, daß schon während der Wanderung im elektrischen Felde ein beträchtlich größerer Teil derselben durch Wiedervereinigung seine Ioneneigenschaft verliert, muß dahingestellt bleiben. Leuchten des Sulfates wurde während der Wasserabgabe bei 100° niemals beobachtet; offenbar bleibt die Intensität des emittierten Lichtes wegen zu geringer Intensität der Reaktion bei dieser Temperatur noch unter der Reizschwelle des Auges.

§ 4. Gewisse Anzeichen schienen mir darauf hinzudeuten, daß die *Geschwindigkeit* der chemischen Reaktion nicht nur die Stromstärke, sondern auch die gesamte entladene Elektrizitätsmenge beeinflußt. Eine Vermutung, die sich, wie ich gleich hinzufügen will, wohl nicht bestätigt hat. Es wurden Versuche in der Richtung angestellt, durch plötzliches mehr oder weniger starkes Erhitzen die Wasserabgabe schneller oder langsamer stattfinden zu lassen. Die Versuche wurden mit demselben Entladungsgefäß ausgeführt, das jedoch statt des flachen Bodens mit der Dampfkammer einen anderen Boden erhielt, dessen mittlerer Teil, aus dünnem Messingblech gebildet, nach unten etwa 1 cm vorsprang, so daß dieser Teil, in dem sich das Sulfat befand, bequem in ein Flüssigkeitsbad eingetaucht werden konnte. Zuerst wurde Paraffin benutzt, das jedoch oberhalb 150° so stark verdampfte, daß ich es durch die weniger flüchtige Stearinsäure ersetzte, die allerdings das Messing des Apparates etwas angreift. Von der Mitteilung der Beobachtungen sehe ich ab, weil dieselben durch Versuchsfehler so gestört worden sind, daß sie kein klares Bild geben. Der Hauptfehler entstand wie es scheint dadurch, daß die im unteren Teil des Apparates befindliche und beim Eintauchen in die heiße Flüssigkeit stark erhitzte Luft aufsteigend den Siegellack erwärmte, mit dem der Stiel der Netzelektrode isoliert in ein Glasrohr eingekittet war. Die Leitfähigkeit des Siegellacks nahm dabei so stark zu, daß die Isolation nicht mehr ausreichte uud der Ladungsverlust in unkontrollierbarer Weise vergrößert wurde. Die weiteren Versuche wurden deshalb alle mit der Dampfkammer am Entladungsgefäß aus-

geführt, die durch strömenden Wasserdampf auf annähernd 100° geheizt wurde. Um die Erwärmung des Siegellacks möglichst zu vermeiden, wurde der Dampfstrom, abgesehen von besonderen Fällen, nur kurze Zeit (5—10 Min., später regelmäßig nur 5 Min. lang) hindurchgeleitet, und darauf sofort kaltes Wasser statt des Dampfes zur Abkühlung hindurchgetrieben. Der aus der Dampfkammer austretende Dampf wurde in einem Kühlrohr kondensiert, damit er nicht in den Beobachtungsraum und das Elektrometer gelangte. Zur Entfernung des von dem Chininsulfat abgegebenen Wasserdampfes, der auch bei den kleinen Sulfatmengen von rund 0,25 g schon die Luft des Entladungsgefäßes gesättigt hätte, wurde während und nach dem Erwärmen ein kräftiger Strom trockener Luft mit Hilfe eines Gummiballgebläses durch das Gefäß getrieben. Die Luft wurde von außen durch ein Bleirohr zugeführt, dessen Mündung vor dem Fenster des Beobachtungsraumes lag. Zum Trocknen bez. Feuchtmachen derselben diente das früher beschriebene Doppelrohr mit wasserfreier Phosphorsäure bez. feuchter Wolle, das bei den Versuchen mit Wasserstoff und Kohlensäure benutzt wurde. Vor und nach jedem Versuch wurde die Entladungsgeschwindigkeit ohne Strahlung bestimmt. Sie war sehr konstant, nahezu 2,5 Skt. in der Minute, wenn nicht der Siegellack erwärmt war, und dieser Wert ist deshalb bei Berechnung des auf die Strahlung allein entfallenden Ladungsverlustes zugrunde gelegt worden. Übrigens würden Abweichungen von $\pm$ 0,5 Skt. nur Fehler geben, die innerhalb der übrigen Versuchsfehler bleiben.

Untersucht wurden: die gesamte Entladungsmenge bei Wasserabgabe (Erhitzen) und bei Wasseraufnahme (Durchleiten feuchter Luft) sowohl für positive wie für negative Ladung des Elektrometers, der Einfluß der Geschwindigkeit der Reaktion auf die Entladungsmenge, der Einfluß öfteren Erhitzens und Abkühlens, letzteres weil in früheren Versuchen „Ermüdungserscheinungen“ bei wiederholtem Gebrauch derselben Portion Sulfat aufzutreten schienen. Noch nicht untersucht ist der Einfluß der Spannung und des Elektrodenabstandes. Die Ergebnisse zahlreicher Versuchsreihen sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Für sie alle gilt folgendes:

Das Elektrometer, ein Aluminiumblatt–Elektrometer nach

Curie, wurde mitsamt der Elektrode des Entladungsgefäßes von einer kleinen Akkumulatorenbatterie geladen, deren Spannung mit einem Thomsonschen elektrostatischen Hochspannungsvoltmeter gemessen war. Ein kleiner gut isolierter Stromschlüssel gestattete, momentanen Kontakt des Elektrometers mit der Batterie herzustellen und ersteres zu laden. Das Vorzeichen der Ladung ließ sich durch einen ebenfalls gut isolierenden Stromwender in der Zuleitung beliebig wählen. Die Anfangsspannung betrug etwa 270 Volt (Skalenteil 70 des Okularmikrometers am Elektrometer). Nach jedesmaligem Sinken auf 235 Volt (Skalenteil 120) wurde durch kurzes Niederdrücken des Schlüssels neu geladen. Zuweilen wurde schon bei höherer (240—250 Volt) oder auch erst bei niedrigerer Endspannung (230 Volt) neu geladen. Durch diese Art des Vorgehens kommt eine gewisse Unsicherheit in die Beobachtungen. Einerseits ist es bei großer Entladungsgeschwindigkeit schwer, die Neuladung im richtigen Augenblick vorzunehmen, und während der Dauer des Kontaktes ist überhaupt jede Beobachtung unmöglich; andererseits ist das Intervall von 270 bis 235 Volt noch zu groß, als daß man den Einfluß der Verschiedenheit der Spannungen auf die Stromstärke vernachlässigen könnte; letzteres ist besonders dann der Fall, wenn die Stromstärke nicht proportional der Spannung ist, sondern schneller wächst. Doch gaben Versuche mit kleinerem Intervall und öfterer Ladung weniger gute Resultate, so daß ich es vorzog, die erwähnte Unsicherheit in Kauf zu nehmen, die außerdem bei allen Versuchen in annähernd gleicher Weise auftritt.

Zwei Sätze von Beobachtungsreihen mit verschiedenen Chininsulfatfüllungen wurden gemacht, die beide in den Tabb. 12 bis 17 vollständig wiedergegeben sind, der erste mit 0,241 g Sulfat, der zweite mit 0,266 g. Angegeben ist in den Tabellen die Nummer der Beobachtungsreihe, das Vorzeichen der Ladung, und darauffolgend der in 5, 10, 15, 20 und 25 Minuten beobachtete Spannungsabfall in Skalenteilen des Okularmikrometers, dem die entladene Elektrizitätsmenge proportional ist. Dabei ist in dem Beobachtungsintervall 1 Skt. = 0,700 Volt. Die Entladungsmenge ist bereits reduziert auf die Wirkung der Strahlung allein, indem von den tatsächlich beobachteten Werten die auf Entladung ohne Strahlung fallenden Werte

abgezogen sind. In den Tabellen, die sich auf die Erhitzung beziehen, ist außerdem die Dauer des Dampfstromes angegeben, in den anderen die Geschwindigkeit des feuchten Luftstromes, ob langsam oder schnell. Die Numerierung der Beobachtungsreihen gibt zugleich ihre zeitliche Aufeinanderfolge an, doch sind die Versuche zum Teil nicht unmittelbar hintereinander, sondern an verschiedenen Tagen gemacht. Immer aber ist die auf eine Erhitzung mit Wasserabgabe folgende Reihe mit Wasseraufnahme in unmittelbarem Anschluß an jene gemacht. Die Entladungsgeschwindigkeit ohne Strahlung ist überall zu 2,5 Skt./Minute bei der Berechnung angenommen worden.

Entladungsmenge für 0,241 g Chininsulfat.

Tabelle 12.

Entladung bei Wasserabgabe; Temp. 100°.

Dampfstrom	Reihe	Ladung	5 Min.	10 Min.
30 Min.	18	—	30,5	*39
1 Stde. 30 „	21	—	26	*37,5
8 „	24	—	20,5	*27
6 „	26	—	20	*35
5 „	41	—	17,5	17,5
6 „	44	—	17,5	17
6 „	46	—	15	14

Tabelle 13.

Entladung bei Wasseraufnahme; Temp. 20°.

Luftstrom	Reihe	Ladung	5 Min.	10 Min.	15 Min.	20 Min.
mäßig	19	—	197,5	218,5	241,5	260
schnell	22	—	199,5	210	232,5	239,5
„	25	—	186,5	204	220	228,5
„	27	—	169,5	188	202	205,5
„	42	—	148,5	156	162	162
langsam	45	—	--	—	—	160,5
schnell	47	—	147,5	153,5	155	157

Tabelle 14.

Entladung bei Wasserabgabe; Temp. 100°.

Dampfstrom	Reihe	Ladung	5 Min.	10 Min.
8 Min.	30	+	21,5	28
7 „	33	+	17,5	20
7 „	35	+	17,5	21
5 „	38	+	16	15,5

Tabelle 15.

Entladung bei Wasseraufnahme; Temp. 20°.

Luftstrom	Reihe	Ladung	5 Min.	10 Min.	15 Min.	20 Min.	25 Min.
schnell	31	+	109,5	135,5	140,5	145,5	145,5
langsam	34	+	—	—	—	114	120,5
schnell	36	+	100	107	111,5	111,5	110,5
sehr schnell	39	+	91,5	96,5	98,5	97	—

Die mit * bezeichneten Werte der Reihen 18 und 21 in Tab. 12 sind sicher zu groß, weil wegen der Erwärmung des Siegellacks die Entladungsgeschwindigkeit ohne Strahlung bereits größer als 2,5 Skt./Min. war, ungefähr 4,5 Skt./Min. Dasselbe gilt in geringerem Grade auch von den entsprechenden Werten der Reihen 24 und 26. Auch bei den zugehörigen Reihen 19 und 22 der Tab. 13 sind durch diesen Umstand die Werte zu groß, besonders die Werte für 15 und 20 Minuten. Der Fehler wird natürlich mit wachsender Zeit immer größer, da ja die erforderliche Korrektion proportional der Zeit wächst.

Entladungsmenge für 0,266 g Chininsulfat:

Tabelle 16.

Entladung bei Wasserabgabe; Temp. 100°.

Dampfstrom	Reihe	Ladung	5 Min.	10 Min.	15 Min.	20 Min.
5 Min.	54	–	42	43,5	46	46
5	56	–	35	37	39	38,5
5	58	–	29,5	30	33	33
5	60	–	19	30,5	36	40
5	62	–	29,5	30,5	31	30,5
5	64	–	26	25,5	27	26,5
5	66	–	26	25,5	28,5	30,5
5	68	–	24,5	26	30	30
5	70	–	25,5	26,5	30	30,5
5	72	–	20	21	23,5	26
5	74	–	20	21,5	23	24,5
5	76	–	23	23,5	24	24,5
90	78	–	20	21,5	—	—
5	80	–	25,5	28	32,5	30,5
5	82	–	31	32,5	36	36
5	86	–	26,5	32	37,5	—
5 Min.	84	+	24,5	26,5	31	31,5

Tabelle 17.

Entladung bei Wasseraufnahme; Temp. 20°.

Luftstrom	Reihe	Ladung	5 Min.	10 Min.	15 Min.	20 Min.
schnell	55	–	175,5	176	177,5	177,5
"	57	–	196	196,5	196,5	197,5
"	59	–	219,5	219	220	220,5
sehr schnell	61	–	191	192,5	196	194,5
schnell	63	–	195	199	201	199,5
"	65	–	198,5	202	202,5	200,5
sehr schnell	67	–	186	187	186,5	190
"	69	–	186	187	193,5	198,5
schnell	71	–	191,5	194	200,5	201
"	73	–	184,5	187,5	193	193
"	75	–	185,5	190	195,5	195
"	77	–	194	198,5	200	200
"	79	–	215,5	227,5	236	246,5
"	81	–	181	185	191	191,5
"	83	–	187,5	190	196,5	—
schnell	85	+	104,5	113,5	119,5	—

Aus dem in den Tabellen mitgeteilten Beobachtungsmaterial ergibt sich folgendes:

1. Die Übereinstimmung der verschiedenen Beobachtungsreihen untereinander ist im allgemeinen befriedigend; doch kommen Abweichungen vor, für die sich zunächst keine Erklärung geben läßt. In einigen Fällen aber kann man doch einen wahrscheinlichen Grund angeben. So sind die hohen Werte der Reihe 79 in Tab. 17 vielleicht darauf zurückzuführen, daß die vorhergehende Erwärmung sehr lange (90 Min.) dauerte. Das würde darauf hindeuten, daß während der sonst üblichen Dauer des Dampfstromes (5 Min.) noch nicht alles Wasser ausgetrieben wurde. Auch Reihe 19 und 22, sowie 25 und 27 in Tab. 13 sprechen für diese Erklärung. Man erhält aber, wie ein Blick zeigt, mit der kürzeren Erhitzungsdauer ganz gut vergleichbare Resultate.

2. Die Menge der entladenen Elektrizität ist bei Wasserabgabe durch Erhitzen weit kleiner als bei Wasseraufnahme infolge Zuleitung feuchter Luft. Für *negative* Ladung ergibt

sich ungefähr das Verhältnis 30 : 200, bei *positiver* etwa 30 : 120. Diese Werte genauer auszurechnen scheint zwecklos.

3. Bei *negativer* Ladung der dem Chininsulfat gegenüberstehenden Elektrode ist die gesamte Entladungsmenge bedeutend größer als bei *positiver*, wenigstens bei Wasseraufnahme. Bei Wasserabgabe scheint kein großer Unterschied vorhanden zu sein. Über diesen Punkt geben die speziell hierfür bestimmten Reihen 82—86 und 38—42 Auskunft. Die folgende kleine Tabelle, deren Werte den Tabb. 12—17 entnommen sind, dient zur Übersicht. Die Entladungsmenge ist durch e^+ und e^- bezeichnet.

Tabelle 18.

Wasseraufnahme					Wasserabgabe				
Entl.-Zeit	Reihe	Ladung	e	$\frac{e^-}{e^+}$	Entl.-Zeit	Reihe	Ladung	e	$\frac{e^-}{e^+}$
Min. 10	42	−	156	1,62	Min. 10	41	−	17,5	1,13
	39	+	96,5			38	+	15,5	
10	83	−	190	1,68	10	82 u. 86	−	32,5	1,23
	85	+	113,5			84	+	26,5	
					5	82 u. 86	−	28,8	1,18
						84	+	24,5	

Der Quotient e^-/e^+ für die Entladung bei Wasserabgabe ist unsicher, da schon verhältnismäßig kleine Änderungen der Absolutwerte von e ihn beträchtlich schwanken lassen. Das Resultat stimmt im übrigen qualitativ mit dem Gatesschen überein. Dort wurde das Chininsulfat selbst auf einer isolierten Metallplatte geladen, einer Elektrometerplatte gegenübergestellt und beobachtet, daß die Stromstärke bei positiver Ladung des Sulfates größer war als bei negativer. Die Feldrichtung, bei der Miss Gates stärkere Entladung fand, stimmt also mit derjenigen überein, bei der ich ebenfalls eine größere Entladungsmenge beobachtete.

4. Die Entladungsmenge ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Reaktion. Die unmittelbar aufeinander folgenden Beobachtungsreihen 45 nnd 47 (Tab. 13) bei negativer,

sowie 34 und 36 (Tab. 15) bei positiver Ladung zeigen, daß man bei langsamem Überleiten von feuchter Luft dieselbe Gesamtmenge entladener Elektrizität erhält wie bei schnellem Überleiten. Die Abweichungen liegen durchaus innerhalb der auch sonst beobachteten Fehlergrenzen.

Die Entladungsgeschwindigkeit, d. h. die Stromstärke, ist dabei jedoch sehr verschieden. Während bei sehr raschem

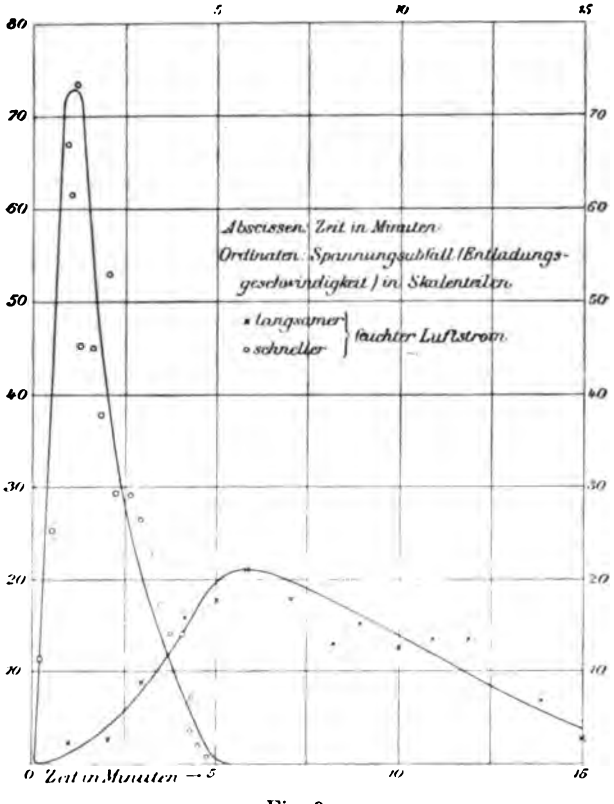


Fig. 3.

Luftstrom Entladungsgeschwindigkeiten bis zu 170 Skt./Minute beobachtet wurden, war das Maximum bei Reihe 45 mit langsamem Strom 24 Skt./Minute unkorrigiert. Die Kurven in Fig. 3 geben den Verlauf der Entladungsgeschwindigkeit[1]) für

1) Die Ordinaten stellen den Spannungsabfall pro Minute dar.

die Reihen 45 und 47; ihre Gestalt ist nach dem Gesagten natürlich nicht charakteristisch für die Art der Strahlung, da sie ja durch Variieren der Dampfzufuhr beliebig geändert werden kann.

5. Tab. 17 zeigt recht gute Konstanz der Entladungsmenge von Anfang der Beobachtungen bis zu Ende. In Tab. 16 (bei Wasserabgabe) ist diese Konstanz viel weniger gut. Von dem hohen Wert 46 bei der ersten Erhitzung sinkt die entladene Menge allmählich herab, scheint dann aber ebenfalls annähernd konstant zu bleiben. Anders ist es jedoch bei den früheren Reihen in den Tabb. 12—15. Hier zeigt sich ganz deutlich eine allmähliche Abnahme der Entladungsmenge sowohl bei Wasseraufnahme wie bei Abgabe. Auch wenn man in den Reihen 19 und 22 zur Berechnung der Korrektion die Entladungsgeschwindigkeit ohne Strahlung größer als 2,5 Skt./Min. annimmt, und berücksichtigt, daß infolge längerer Erwärmung das Wasser vollständiger ausgetrieben war, so bleiben die Werte doch immer noch größer als die später (Reihe 45 und 47) beobachteten. Man könnte hierin also eine Bestätigung der früher geäußerten Vermutung sehen, daß das Chininsulfat bei längerem Gebrauch Ermüdungserscheinungen zeigt. Es scheint mir aber im Hinblick auf die späteren mit großer Sorgfalt gemachten Beobachtungen der Tabb. 16 und 17 zweifelhaft, ob diese Erklärung richtig ist und ob nicht eher anzunehmen ist, daß — vielleicht infolge zu langsamen Strömens der trockenen Luft beim Erhitzen — die Wasseraustreibung ungenügend erfolgte. Dieser Punkt bleibt also vorläufig unentschieden.

6. Die Entladungsmenge in absolutem Maß ergibt sich leicht aus dem Reduktionsfaktor des Elektrometers und der Kapazität des ganzen geladenen Systems. In dem Beobachtungsbereich war 1 Skt. = 0,7 Volt. Die Kapazität wurde durch Ladungsteilung bestimmt, indem das Elektrometer mit der Entladungselektrode auf ein bestimmtes Potential geladen, isoliert und darauf an einen gut isolierenden Plattenkondensator mit Luft als Dielektrikum angelegt wurde, dessen Kapazität eine passende Größe besaß. Diese wurde aus den Dimensionen des Kondensators nach der Kirchhoffschen Formel berechnet zu $c = 15{,}8$ cm $= 17{,}6 \cdot 10^{-6}$ Mikrof. Die Kapazität des Elektrometers + Entladungselektrode war 2,53 mal

so groß d. h. 40,0 cm oder $44{,}5 . 10^{-6}$ Mikrof. Danach ergibt sich die Entladungsmenge für 0,266 g Chininsulfat bei Wasseraufnahme, die nach Tab. 17 etwa 200 Skt. beträgt, in praktischem Maß $e = 200 . 0{,}7 . 44{,}5 . 10^{-12} = 6{,}23 . 10^{-9}$ Coulomb.

Für 1 g Sulfat wird also die Entladungsmenge unter denselben Umständen

$$E = 23{,}4 . 10^{-9} \text{ Coulomb}$$

oder mit Rücksicht auf die ziemlich weiten Fehlergrenzen rund $24 . 10^{-9}$ Coulomb. In konstantem Strom während 10 Min. entladen, würde diese Menge eine Stromstärke von etwa $4 . 10^{-11}$ Amp. geben. Die Größenordnung ist also ungefähr dieselbe, die Miss Gates beobachtet hat. Doch sind die tatsächlich von mir beobachteten Stromstärken bei schnellem Verlauf der Reaktion weit größer.

Heidelberg, im September 1905, Physik. Inst. d. Univ.

(Eingegangen 20. September 1905.)

3. *Über die Glimmentladung in den Halogenen Chlor, Brom, Jod*[1]; *von W. Matthies.*

§ 1.

Nachdem in der letzten Zeit ausführliche Messungen über das Anfangspotential (A.P. nach Röntgen), das Minimalpotential[2] (M.P.), sowie das Funkenpotential[3] in homogenen Feldern an den Halogenen Chlor, Brom, Jod ausgeführt worden sind, dürfte die Mitteilung der Ergebnisse der Potentialmessungen bei der Glimmentladung in den genannten Gasen nicht ohne Interesse sein. Letztere Versuche bilden in gewisser Beziehung die Fortsetzung der Untersuchungen, die ich auf Veranlassung von Hrn. Prof. Dr. E. Wiedemann zwecks Feststellung des Potentialgradienten auf der ungeschichteten, positiven Säule, des Anodenfalles und endlich des Kathodenfalles in den Dämpfen der Quecksilberhaloidverbindungen $HgCl_2$, $HgBr_2$, HgJ_2 angestellt habe.[4]

Bei der Mitteilung jener Arbeit habe ich ausführlich die benutzten Meßmethoden etc. angegeben, so daß ich an dieser Stelle von deren Beschreibung absehen kann.

§ 2. Versuchsanordnung.

a) Für Chlor und Brom.

Die Versuchsanordnung war bei Chlor und Brom einerseits und Jod andererseits eine wesentlich verschiedene; deshalb müssen dieselben gesondert besprochen werden. Brom besitzt bei gewöhnlicher Temperatur bereits einen Dampfdruck von etwa 150 mm Hg nach Ramsay und Young[5]; beschickt

1) Die Ergebnisse der Potentialmessungen im Joddampf sind bereits kurz mitgeteilt (Sitzungsber. d. physiko-mediz. Sozietät zu Erlangen **37.** 1905).

2) E. Warburg, Verhandl. VII. Jahrg. Nr. 10. 1905 u. Ann. d. Phys. **18.** p. 128. 1905.

3) F. Ritter, Ann. d. Phys. **14.** p. 118. 1904.

4) W. Matthies, Ann. d. Phys. **17.** p. 675. 1905; Verhandl. **13.** p. 189. 1905.

5) W. Ramsay u. S. Young, Journ. Chem. Soc. **49.** p. 453. 1886.

man daher das Entladungsrohr nach der von Goldstein[1]) angegebenen Methode, indem man Brom in dünnwandigen Glaskügelchen einschmilzt und dieselben im evakuierten, abgeschmolzenen Entladungsrohr durch irgendwelche Manipulation zersprengt, so muß man, um einen für das Zustandekommen einer Glimmentladung genügend tiefen Dampfdruck zu erhalten, ein mit dem Rohr verbundenes Ansatzrohr in eine Kältemischung von etwa -80^0 bringen, wie man sie durch Mischung von fester Kohlensäure mit Äther erhält. Solange nun im Rohr noch flüssiges oder dampfförmiges Brom unter höherem Druck vorhanden ist, muß dasselbe nach dem abgekühlten Ansatzrohr hindestillieren, und zwar so lange, bis an allen Stellen der gleiche, durch die Temperatur der Kältemischung bedingte tiefe Druck herrscht. Dieser Methode bediente sich A. Kalähne anläßlich seiner spektralanalytischen Untersuchung des Bromdampfes in Geisslerschen Röhren.[2]) Da ich nun Potentialmessungen im Glimmstrom bei verschiedenen Drucken anstellen wollte, hätte ich Kältemischungen von verschiedener Temperatur anwenden müssen. Erstens ist es außerordentlich schwer, in den in Betracht kommenden Intervallen wirklich konstante Temperaturen zu erhalten, zweitens sind aber die Dampfdrucke nur bis zu einer Temperatur von $-16{,}65^0$ bekannt[3]); ich habe daher von dieser einfachen Methode absehen müssen. Das Entladungsrohr wurde vielmehr mit ungesättigtem Bromdampf gefüllt, dessen Druck direkt bestimmt wurde; die Versuchsanordnung, die für Chlor und Brom nahezu die gleiche ist, gibt Fig. 1 in schematischer Darstellung wieder, sie wurde zum Teil mit verschiedenen Abänderungen der von F. Ritter[4]) benutzten nachgebildet. Das Entladungsrohr P hatte dieselbe Form wie die bei der Untersuchung über die Glimmentladung in den Quecksilberhaloidverbindungen benutzten Röhren. Es enthielt wiederum fünf dünne Platinsonden und zwei 0,2 cm dicke, 5 bez. 2,5 cm lange, zylindrische, dem Rohr konaxial gerichtete Platindrahtelektroden, von denen die längere

1) E. Goldstein, Sitzungsber. d. physik. Gesellsch. zu Berlin 1886; Beibl. **14.** p. 616. 1890.

2) A. Kalähne, Wied. Ann. **65.** p. 825. 1898.

3) W. Ramsay u. S. Young, Journ. chem. soc. **49.** p. 453. 1886.

4) F. Ritter, l. c.

stets als Kathode diente. Sonden und Elektroden standen durch angelötete Kupferdrähte in leitender Verbindung mit den gläsernen Quecksilbernäpfchen eines Paraffinblockes. Durch diese konnte ein schneller und sicherer Kontakt der auf ihr Potential zu messenden Teile mit dem Elektrometer hergestellt werden. *O* und *Q* (Fig. 1) sind mit chemisch reinem Phosphorpentoxyd gefüllte

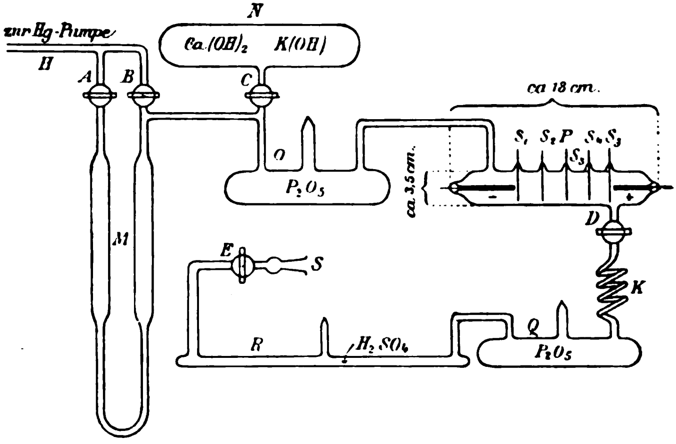


Fig. 1.

Trockengefäße, *R* ist ein dem gleichen Zweck dienendes, etwa 0,75 m langes, mit reiner, ausgekochter, konzentrierter Schwefelsäure nahezu ganz angefülltes Rohr, das mittels einer bei *K* angebrachten, gut federnden feinen Kapillare geneigt oder horizontal gestellt werden konnte; *N* ist endlich ein mit kleinen Stücken von Kalium- und Calciumhydroxyd gefülltes Absorptionsgefäß.

Die Druckmessung geschah mit einem Schwefelsäuremanometer *M*; die bei diesem verwendete Schwefelsäure war als chemisch rein bezogen und durch mehrstündiges Auskochen von absorbierten Gasen befreit. Ihr spezifisches Gewicht betrug 1,839, was einer Konzentration von 99 Gewichtsprozenten entspricht.[1]) Die Niveaudifferenz der rückseitig passend durch eine Glühlampe beleuchteten Menisken in den beiden Schenkeln wurde an zwei von Zeiss bezogenen, in halbe Millimeter geteilten, an den Manometerröhren befestigten Glasskalen unter Benutzung eines „kurzsichtigen Fernrohres" abgelesen. Da

1) Physikalisch chemische Tabellen von Landolt-Börnstein p. 197.

$^1/_3$ Teilstrich der Skala ohne Schwierigkeit genau geschätzt werden konnte, also $^1/_6$ mm, so ließ sich der Druck demnach bis auf 0,04 mm Hg genau berechnen, was für den vorliegenden Zweck vollkommen genügte.

Bei der Herrichtung der Entladungsröhren zum Versuch wurden zunächst sämtliche Hähne bis auf denjenigen bei *E* geöffnet und das ganze System mittels einer bei *H* angeschmolzenen, automatisch arbeitenden Sprengelschen Quecksilberpumpe bis auf den Dampfdruck des Quecksilbers ausgepumpt. Einerseits, um nach der Füllung ein durch Undichtigkeit des Hahnes bei *B* hervorgerufenes Eindringen von Chlor oder Brom in die Pumpe zu verhindern, andererseits aber, um die Quecksilberdämpfe nach Möglichkeit vom Entladungsrohr abzuhalten, war zwischen Pumpe und Apparat bei *H* ein langes Rohr mit einer Füllung von unechtem Goldschaum eingeschaltet. Durch Hindurchschicken starker Entladungen in wechselnder Richtung durch das Entladungsrohr bei gleichzeitigem Erwärmen desselben wurden die Elektroden von okkludierten Gasen und oberflächlichen Verunreinigungen befreit. Um den an den Glaswänden haftenden, von der Phosphorsäure, dem Kalium- und Calciumhydroxyd, sowie den von der Schwefelsäure absorbierten Gasresten die Möglichkeit zu geben, sich loszulösen, wurde der Apparat 1—2 Tage im evakuierten Zustande sich überlassen. Vor allem gab die Schwefelsäure, obgleich sie, wie eingangs erwähnt, sorgfältig ausgekocht war, im hohen Vakuum noch sehr viel Gase ab. Erst nachdem an dem mit der Pumpe in Verbindung stehenden Mc Leodschen Manometer keine Druckzunahme mehr zu konstatieren und das System wieder vollkommen ausgepumpt war, wurden die Hähne bei *A*, *B*, *C* und *D* verschlossen und das vorher horizontal stehende Trockenrohr *R* soweit geneigt, daß das bei *S* eingelassene Gas die Schwefelsäure langsam durchstreichen mußte. In *Q* blieb das Gas eine Zeitlang über der Phosphorsäure stehen, die die letzten Spuren von Wasserdampf absorbierte; durch die Kapillare *K* und den Hahn *D* trat endlich das getrocknete Gas langsam in das Entladungsrohr. Durch passendes Öffnen und Schließen der Hähne bei *C* und *D* läßt sich jeder beliebige Druck im Rohr herstellen, soweit er für die Ausbildung einer Glimmentladung in Betracht kommt.

Das Chlor wurde auf zwei gänzlich verschiedenen Wegen dargestellt, entweder elektrolytisch aus verdünnter Lösung von HCl oder NaCl, oder aber auch durch Erhitzen von Goldchlorid[1]), das als chemisch rein von Kahlbaum im zugeschmolzenen Röhrchen bezogen worden war. Im ersteren Falle war die selbstverständlich nur Glasteile enthaltende Zersetzungszelle, im zweiten Falle der mit Goldchlorid gefüllte Ballon durch einen Schliff bei *S* mit dem Apparat verbunden. Wurde letztere Darstellungsweise benutzt, so wurde natürlich der das $AuCl_3$ enthaltende Ballon zunächst völlig mit ausgepumpt. Wie Vorversuche ergaben, mußte das Kahlbaumsche Präparat, bevor es zu den vorliegenden Versuchen geeignet war, von absorbierten Gasen und einem geringen Wassergehalt befreit werden, was durch sorgfältiges, mehrfach wiederholtes Sublimieren der Substanz im Vakuum geschah.

Die Einführung ungesättigten, reinen Bromdampfes in den Apparat erfolgte mit Hilfe der in Fig. 2 gezeichneten einfachen Vorrichtung. Bei *V* war dieselbe durch einen Schliff mit dem Apparat in *S* verbunden, der Hahn bei *Y* wurde verschlossen, durch *Z* flüssiges, ebenfalls von Kahlbaum herrührendes Brom eingeführt und darauf *Z* selbst abgeschmolzen. Eine bei *W* angeschlossene Körtingsche Wasserstrahlpumpe sog zunächst das Gemisch von Luft und Bromdampf durch den bei *X* geöffneten Hahn fort; bei der außerordentlich lebhaften Verdampfung von Brom — schon nach wenigen Minuten überzog sich der untere Teil von *T* mit einer dicken Reifschicht — ist anzunehmen, daß nach nicht allzu langer Zeit bereits sämtliche Luftreste mit fortgesogen werden und man eine reine Bromatmosphäre erhält. Um etwaige, im Ansatz bei *Y* vorhandene Luftreste zu entfernen, wurde der Apparat einige Stunden stehen gelassen, so daß eine völlige Mischung durch Diffusion stattfinden mußte und dann der Bromdampf wieder für einige Minuten durch *X* abgesogen. Letztere Maßnahme wurde einige 5—6mal wieder-

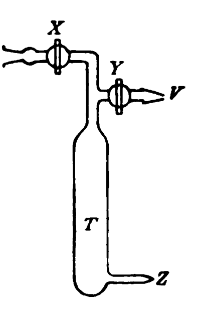


Fig. 2.

1) Vgl. M. W. Travers, Experimentelle Untersuchung v. Gasen p. 47.

holt, um ganz sicher eine reine Dampfatmosphäre in *T* zu haben.

b) Für Jod.

Da der Dampfdruck von Jod bei Zimmertemperatur nur einige hundertstel Millimeter Hg beträgt, so mußten die in nachfolgender Weise mit Jod gefüllten Röhren erhitzt werden, um so die gewünschte Dampfdichte zu erzeugen. Hierzu wurde der in der früheren, eingangs erwähnten Arbeit genau von mir beschriebene elektrische Ofen benutzt. Die Temperatur der Entladungsröhren wurde mit Hilfe eines Eisen–Konstantan-Thermoelementes gemessen. Da Bäder von verhältnismäßig tiefer Temperatur benötigt wurden, mußte, um dieselben so konstant zu bekommen, wie es für Potentialmessungen erforderlich ist, besondere Sorgfalt darauf verwendet werden, daß sowohl Zimmertemperatur als Heizstrom wesentliche Schwankungen nicht zeigten. Ersteres war in meinem, im Parterre des Erlanger Instituts nach NW. belegenen Arbeitszimmer verhältnismäßig leicht dadurch zu erreichen, daß das Zimmer nicht geheizt wurde. Das am Tage unausbleibliche Schwanken der Spannung des Institutsstromes umging ich, indem ich nur Messungen in den Abendstunden ausführte, in welchen im Institut nicht mehr gearbeitet wurde. Im übrigen wurden Messungen immer erst dann gemacht, wenn die Temperatur des Entladungsrohres soweit konstant war, daß sie sich während der für eine Versuchsreihe nötigen Zeit um höchstens $^1/_2{}^0$ änderte.

Die mit einem U-förmigen Ansatzrohr versehenen Entladungsröhren hatten die gleiche Gestalt wie in Fig. 1; nachdem dieselben in bekannter Weise sorgfältig gereinigt worden waren, wurden sie an die Sprengelpumpe angeschmolzen, das U-Rohr verschlossen, in einem Heizkasten einige Stunden auf 350—370^0 erhitzt und gleichzeitig vollkommen luftleer gemacht. Daß die Elektroden in der vorher beschriebenen Art gereinigt wurden, bedarf wohl kaum der Erwähnung. Nachdem trockener, staubfreier Stickstoff in den Apparat gelassen war, wurde der Heizkasten entfernt, in das geöffnete U-Rohr eine genügende Menge von dem im Schwefelsäureexsikkator aufbewahrten, vorher gesondert im Vakuum durch mehrfaches Sublimieren gereinigten Jod eingeführt, das U-Rohr wieder zugeschmolzen und in eine Kältemischung von fester Kohlensäure und Äther gebracht.

Darauf wurde bis auf den Dampfdruck des Quecksilbers evakuiert, das Jod in das Entladungsrohr hineindestilliert und schließlich sowohl U-Rohr als auch Entladungsrohr abgeschmolzen. Ein zwischen letzterem und der Pumpe eingeschaltetes Rohr mit unechtem Goldblatt verhinderte den Hinübertritt von Joddampf in die Hg-Pumpe; daß jenes umgekehrt nicht die Quecksilberdämpfe vollkommen vom Entladungsraum abzuhalten vermochte, zeigte die spurenweise Bildung von Quecksilberjodid, was bei den vorliegenden Versuchen jedoch nicht schadete, da der Dampfdruck der Verbindung bei den zur Verwendung kommenden Temperaturen noch außerordentlich tief ist. Wurde die zuerst von Cornu angegebene Methode zur Abhaltung von Hg-Dämpfen durch weiteres Vorschalten eines Rohres mit Kupfer–Schwefel–Kupferfüllung benutzt, so war die Bildung von HgJ_2 so schwach, daß letzteres mit Sicherheit nicht mehr nachweisbar war.[1])

§ 3. Allgemeines über die Glimmentladung in den Halogenen.

Die Glimmentladung in den Halogenen Chlor, Brom, Jod ist dem Wesen nach derjenigen elementarer Gase und der Dämpfe der Quecksilberhaloidverbindungen analog. Alle drei zeigen die typischen Entladungserscheinungen: die leuchtende Anodenschicht, die positive Lichtsäule, den Faradayschen dunklen Raum, das negative Glimmlicht, den dunklen Hittorfschen Kathodenraum und gelegentlich die schwach leuchtende Kathodenschicht. Eine Schichtung des positiven Lichtes tritt zwar relativ selten auf, wurde jedoch bei allen drei deutlich beobachtet. Warum letzteres von A. Kalähne[2]) bei seinen Versuchen nicht konstatiert wurde, vermag ich nicht anzugeben, um so weniger, als die Dimensionen der von ihm und mir benutzten Entladungsröhren nicht erheblich von einander abweichen. Der Faradaysche dunkle Raum ist wesentlich kleiner als im Stickstoff, während die übrigen Gebilde normale Dimensionen haben.

a) Chlor.

Im Chlor zeigt das positive Licht bei tiefen Drucken eine fahle weiß-grüne, bei höheren Drucken dagegen eine intensiv

1) Vgl. W. Matthies, Ann. d. Phys. **17.** p. 679. 1905.

2) A. Kalähne, Wied. Ann. **65.** p. 825. 1898.

grüne Färbung. Das Spektrum des positiven Lichtes ist das bekannte Bandenspektrum mit den charakteristischen Linien. Besonders erwähnt sei die außergewöhnlich starke Fluoreszenz des Glases bei tiefen Drucken, sowie das starke Nachleuchten des Glases im Chlor, das fast immer beobachtet werden konnte. Die Bedingungen für das Auftreten derselben scheinen jedoch komplizierter Natur zu sein und von nicht kontrollierbaren Zufälligkeiten abzuhängen. In einigen Fällen blieb das Nachleuchten nämlich vollständig aus, ohne daß bemerkbare Veränderungen in den äußeren Bedingungen eingetreten wären. Kathode und Anode blieben vollkommen blank und wurden an keiner Stelle, selbst nach mehrtägigem Gebrauch angegriffen; dagegen trat eine Reaktion zwischen dem zerstäubten Platin der Elektroden und dem Chlor an den Glaswänden ein. Die chemische Untersuchung des Beschlages zeigte, daß sich vorwiegend $PtCl_4$ gebildet hatte. Da ziemlich große Räume mit dem Entladungsrohr in Verbindung standen, so hatte die durch letztere Reaktion bedingte geringe Verarmung an Chlor, ebenso wie die schwache Absorption durch die Schwefelsäure des Manometers während der Dauer einer Messungsreihe keinen erheblichen Einfluß auf den Druck, wie in dieser Richtung angestellte besondere Versuche ergaben.

b) Brom.

Bei tiefen Drucken zeigt das positive Licht im Bromdampf eine ausgesprochen rötliche, bei höheren Drucken eine rötlich-violette Elektrolumineszenz, deren Spektrum ein dem Absorptionsspektrum entsprechendes Bandenspektrum ist. Was bei Chlor über Fluoreszenz und Nachleuchten des Glases gesagt wurde, gilt wörtlich auch für Brom. Der ebenfalls an den Glaswänden sich bildende Niederschlag wurde als Platinbromid nachgewiesen; die Elektroden wurden auch hier in keiner Weise angegriffen. Während beim Chlor das Kathodolumineszenzlicht ungefähr die gleiche Färbung wie das positive Licht aufweist, ist jenes beim Brom von fahler, schwach grünlichgelber Färbung.

c) Jod.

Bei tiefen Drucken zeigt der Joddampf eine prachtvoll orangegelbe Kathodolumineszenz, die mit der von E. Lommel[1])

1) E. Lommel, Wied. Ann. **19**. p. 391. 1883.

zuerst nachgewiesenen Fluoreszenz identisch zu sein scheint. Letzteres Fluoreszenzlicht erhält man bekanntlich, indem man durch Sammellinsen konzentriertes Sonnen- oder Bogenlicht auf eine mit nicht zu dichtem Joddampf gefüllte Glaskugel fallen läßt; die katakaustische Fläche zeigt dann jene orangegelbe Färbung. Das Kathodolumineszenzlicht hat ein vom Rot bis zum Grün reichendes kontinuierliches Spektrum. Die Stromstärken dürfen nicht zu groß sein, da sonst das sehr intensive, pfirsichblütenfarbene positive Licht jenes teilweise oder ganz überdeckt. Das Spektrum des letzteren erwies sich als das von Goldstein, H. Ebert und anderen bereits gefundene Bandenspektrum.[1]) An den Wänden des Entladungsrohres bildete sich ein tiefbrauner Beschlag von Platinjodid, während die Elektroden auch hier nicht vom Halogen angegriffen wurden. Fluoreszenz sowie Nachleuchten des Glases unter Einwirkung der elektrischen Entladung wurde wenig oder gar nicht beobachtet.

§ 4. Ergebnisse der Potentialmessungen.

In den nachfolgenden Paragraphen sind die Ergebnisse der Potentialmessungen tabellarisch und graphisch zusammengestellt.

In den Tabellen bedeutet V_K stets die zwischen Kathode und Sonde S_1, V_A die zwischen Anode und Sonde S_6 gemessene Potentialdifferenz; jene ist also in Annäherung der Kathoden-, diese der Anodenfall. Die Abstände der Sonden S_1 bez. S_6 von den Elektroden sind mit a_1 bez. a_6 bezeichnet, ebenso die Abstände der Sonden voneinander mit a_2 bis a_5; i bedeutet die in Milliampère gemessene Stromstärke, $\Delta V / \Delta x$ den mittleren Potentialgradienten zwischen den Sonden in Volt pro Zentimeter, t die Temperatur des Entladungsrohres und p den Druck in Millimetern Hg. Die Dampfdrucke für Jod wurden aus den Tabellen von K. Stelzner[2]) und G. Niederschulte[3]) entnommen, deren Werte gut mit denjenigen anderer Beobachter wie Arctowski[4]) sowie Ramsay und Young[5]) über-

---

1) Genaueres über diese Spektren findet sich bei H. Könen, Wied. Ann. 65. p. 257. 1898.

2) K. Stelzner, Erlanger Inaug.-Diss. 1901; Verhandl. 7. p. 159. 1905.

3) G. Niederschulte, Erlanger Inaug.-Dissert. 1903; Verhandl. 7. p. 159. 1905.

4) H. Arctowski, Zeitschr. f. anorgan. Chemie 12. p. 427. 1896.

5) Vgl. H. Landolt u. R. Börnstein, Phys. Tabellen p. 74.

einstimmen. Für die liebenswürdige Übersendung der Resultate der im Grazer Institut in der letzten Zeit angestellten Dampfdruckbestimmung des Jods möchte ich an dieser Stelle Hrn. Hofrat Prof. Dr. Pfaundler den verbindlichsten Dank abstatten. Die mitgeteilten Zahlen zeigten relativ gute Übereinstimmung mit den Niederschulteschen.

Die für Stickstoff von G. C. Schmidt[1]) nachgewiesene Unabhängigkeit des Gradienten und Kathodenfalles von der Temperatur wurde auch für die Halogene angenommen, ebenso wie dies bei den Haloidverbindungen des Quecksilbers geschehen ist.

1. Verlauf des Gradienten und seine Abhängigkeit vom Druck.

Die folgenden Tabb. I—III enthalten die Kathoden- und Anodengefälle, sowie die Potentialgradienten längs der Strombahn für verschiedene Drucke bei konstanter Stromstärke. Bei allen Messungen war das positive Licht ungeschichtet und die Entladung kontinuierlich, wie ein in den Stromkreis eingeschaltetes sehr empfindliches Telephon anzeigte. Da jenes sich bis dicht vor die Kathode erstreckte[2]), so daß die Sonden S_2 bis S_5 stets im positiven Teil der Strombahn enthalten waren, sind die zwischen ihnen gemessenen Gradienten solche auf der positiven, ungeschichteten Säule. Die Kathodenfälle waren in den meisten Fällen nicht normal; ihre Bestimmung wurde gesondert geführt.

a) Chlor.

Tabelle I.

Cl_2 dargestellt aus NaCl. $i = 0,25$.

p	V_K	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$ zwischen				V_A
	$a_1 = 0,3$	$S_1 - S_2$ $a_2 = 1,85$	$S_2 - S_3$ $a_3 = 2,1$	$S_3 - S_4$ $a_4 = 2,15$	$S_4 - S_5$ $a_5 = 2,0$	$a_6 = 0,2$
0,15	429,5	29,7	30,8	31,4	28,8	132,2
0,27	323,3	33,5	33,0	33,6	32,8	184,1
0,63	294,8	40,9	48,4	50,4	53,8	213,8
0,80	299,5	46,5	56,1	67,2	69,6	230,3
1,28	299,5	64,6	94,3	107,8	113,5	249,1
1,74	304,2	70,7	111,6	136,1	150,9	251,9
2,48	305,6	121,5	168,3	188,2	202,4	326,6

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 1. p. 625. 1900.

2) Vgl. Bemerkung p. 479 über den Faradayschen Raum.

Tabelle II.

Cl_2 dargestellt aus $AuCl_3$. $i = 0{,}25$.

p	V_K $a_1 = 0{,}3$	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$ zwischen				V_A $a_6 = 0{,}2$
		$S_1 - S_2$ $a_2 = 1{,}85$	$S_2 - S_3$ $a_3 = 2{,}1$	$S_3 - S_4$ $a_4 = 2{,}15$	$S_4 - S_5$ $a_5 = 2{,}0$	
0,80	315,9	40,1	53,5	64,0	66,2	187,2
1,20	310,0	63,3	89,7	103,4	108,7	224,6
1,47	310,0	66,7	103,6	125,3	146,2	224,6
1,87	305,3	72,5	114,0	144,6	160,9	229,3
2,60	310,4	137,1	165,0	133,2?	267,9?	327,6
2,95	311,6	199,3	202,4	103,8?	296,0?	351,0

b) Brom.

Tabelle III.

$i = 0{,}25$.

p	V_K $a_1 = 0{,}3$	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$ zwischen				V_A $a_6 = 0{,}2$
		$S_1 - S_2$ $a_2 = 1{,}85$	$S_2 - S_3$ $a_3 = 2{,}1$	$S_3 - S_4$ $a_4 = 2{,}15$	$S_4 - S_5$ $a_5 = 2{,}0$	
0,35	362,1	47,5	43,0	45,4	43,4	124,0
0,537	350,9	50,0	47,2	55,0	56,1	128,9
0,675	329,8	64,5	65,0	68,5	69,6	228,1
0,886	335,5	74,7	84,5	95,6	97,6	201,3
0,945	334,3	76,4	92,1	97,5	106,3	224,5
1,15	327,0	76,5	106,0	118,5	132,4	236,7
1,44	332,3	81,2	132,7	153,9	148,0	264,1
1,88	331,1	99,5	145,4	187,8	168,3	276,2
2,70	327,3	120,0	161,5	231,7	205,1	287,7

c) Jod.

Tabelle IV.

$i = 0{,}083$.

p	V_K $a_1 = 0{,}2$	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$ zwischen				V_A $a_6 = 0{,}25$	t
		$S_1 - S_2$ $a_2 = 2{,}0$	$S_2 - S_3$ $a_3 = 2{,}2$	$S_3 - S_4$ $a_4 = 2{,}1$	$S_4 - S_5$ $a_5 = {,}185$		
0,32	393,6	23,0	27,2	25,9	28,3	159,9	23,0
0,96	377,2	54,0	77,6	80,3	82,9	180,4	36,7
1,40	377,2	60,5	109,7	120,5	122,1	178,2	42,5
1,80	379,3	75,0	132,0	143,7	152,2	173,2	46,2
2,60	382,2	104,5	173,4	184,2	199,8	168,1	51,4
3,76	384,4	166,0	227,8	195,0	255,3	211,1	57,2

Tabelle V.

$i = 1,0.$

p	V_K	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$ zwischen				V_A	t
		$S_1 - S_2$	$S_2 - S_3$	$S_3 - S_4$	$S_5 - S_6$		
0,25	719,5	22,5	23,2	25,4	23,8	116,8	20,8
0,56	620,1	39,5	40,0	42,6	43,3	133,2	29,5
1,06	546,3	56,5	59,0	63,7	66,6	66,6	38,3
1,60	501,2	71,0	74,4	72,0	86,5	84,0	44,4
3,60	442,8	111,5	125,5	138,6	140,0	117,8	56,5

Aus den Tabellen ergibt sich, daß der Potentialgradient in den Halogenen auf der ganzen Strombahn sehr hoch ist und durchweg von der Kathode zur Anode erheblich wächst. Die aufgeführten Zahlen sind mittlere Werte der bei verschiedenen Messungen erhaltenen Resultate. Die Übereinstimmung der zu verschiedenen Zeiten und neuer Füllung für Potentialgradienten und Kathodenfälle erhaltenen Werte war im allgemeinen eine gute, während die Zahlen für die Anodenfälle meistens größere Abweichungen voneinander aufwiesen. Bei konstanter Stromstärke und Dichte ist der Potentialgradient zeitlich an den verschiedenen Stellen der Strombahn konstant; doch wurden gelegentlich Ausnahmen von diesem Gesetz gefunden, für die ich keine Erklärung zu geben vermag. Ohne daß sich irgend etwas an den äußeren Bedingungen der Entladung, weder dem Aussehen nach, noch in bezug auf Dichte und Stromstärke geändert hätte, trat plötzlich eine Veränderung in der Spannungsabfallverteilung auf; beispielsweise verschob sich die Lage des Maximums des Potentialgradienten, worauf gewisse, in den Tabellen sich zeigende Unregelmäßigkeiten zurückzuführen sind. Diese Erscheinung ist übrigens auch verschiedentlich im Stickstoff beobachtet worden, so unter anderen von W. P. Graham.[1]

Für die Änderung des Potentialgradienten auf der positiven Säule mit dem Druck ergibt sich aus den Tabellen, daß

1) W. P. Graham, Wied. Ann. **64.** p. 49. 1898.

dieselbe eine recht beträchtliche ist; die Art der Abhängigkeit zeigt Fig. 3 graphisch.

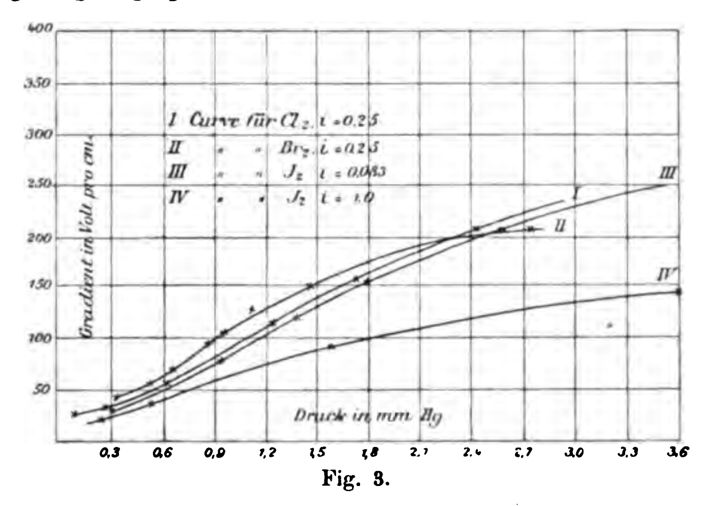


Fig. 3.

Der Typus der Kurven untereinander ist der gleiche und derselbe wie bei den Haloidverbindungen, wie ein Vergleich mit den entsprechenden Kurven zeigt. Das Verhältnis von $\frac{\Delta V}{\Delta x} \cdot \frac{1}{p}$ ist ebenfalls bei den Halogenen kein konstantes und damit der Gradient keine lineare Funktion des Druckes; zunächst wächst jener stärker mit steigendem Druck und darauf langsamer als dieser. Eine einfache Formel für diese Beziehung konnte nicht ermittelt werden. Die Kurve für Brom verläuft nicht zwischen denjenigen von Chlor und Jod, sondern oberhalb derselben, ebenso wie die entsprechende Kurve für $HgBr_2$ oberhalb derjenigen von $HgCl_2$ und HgJ_2 verläuft.

2. Änderung des Gradienten mit der Stromstärke.

Die Ergebnisse der zur Ermittelung der Abhängigkeit des Potentialgradienten auf der ungeschichteten, positiven Säule von der Stromstärke angestellten Messungen sind in den folgenden Tabb. VI—VIII niedergelegt und graphisch durch die Figg. 4—6 illustriert. Die mitgeteilten Zahlen sind mittlere Werte des zwischen den Sonden S_3 und S_5 gemessenen Potentialgradienten; in zwei Fällen, bei Chlor für $p = 3{,}36$ mm und

bei Jod für $p = 2{,}56$ mm wurde ausnahmsweise der Gradient zwischen S_4 und S_5 ermittelt.

a) **Chlor.**

Tabelle VI.

$p = 0{,}201$		$p = 0{,}563$		$p = 1{,}078$		$p = 1{,}278$		$p = 2{,}43$		$p = 3{,}36$	
i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$
0,20	30,2	0,20	39,1	0,25	95,8	0,20	118,4	0,20	201,9	0,5	201,0
0,67	35,6	0,6	46,4	0,50	80,0	0,75	95,6	0,55	147,0	1,00	188,0
1,00	32,3	0,95	45,0	1,00	68,1	0,95	93,7	1,0	131,8	1,67	170,4
1,93	27,5	2,0	41,1	1,92	60,4	1,50	81,8	2,25	119,1	2,5	156,3
2,75	25,8	3,25	38,6	2,90	56,3	2,45	77,5	3,43	118,0	3,35	152,8
3,25	25,0	4,0	37,8	3,80	55,0	3,50	77,3	4,30	115,2	3,96	140,0
4,75	22,2	5,50	36,3	4,50	53,7	5,0	77,3	5,25	109,3	4,80	131,3
6,0	22,0	6,30	36,0	6,50	52,4	6,25	77,2	5,95	106,0	6,0	124,6
7,5	21,9	7,25	35,8	7,0	52,0	8,0	77,2	6,75	103,1	7,0	116,5
8,0	22,0	8,0	35,5	8,0	51,5	10,0	77,0	8,0	100,3	8,0	110,2

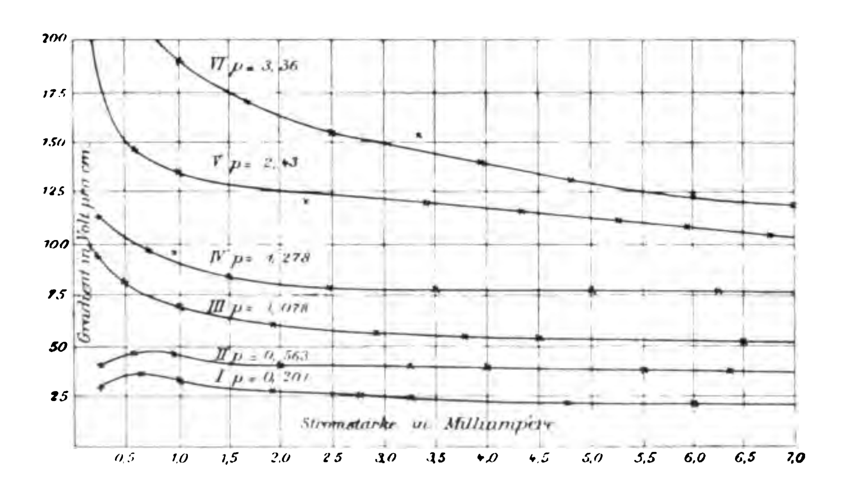


Fig. 4.

b) Brom.

Tabelle VII.

$p=0,54$		$p=0,81$		$p=1,08$		$p=1,48$		$p=1,755$		$p=2,24$		$p=2,50$	
i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$
0,25	66,6	0,25	91,2	0,25	111,6	0,25	153,6	0,25	171,9	0,25	183,6	0,25	219,0
0,80	63,0	1,25	72,6	0,75	87,6	1,0	97,2	1,0	109,8	1,00	129,6	1,00	136,2
2,0	53,4	2,05	67,2	1,85	76,2	2,25	92,4	2,0	101,0	1,55	120,0	1,50	132,8
3,25	50,1	3,25	63,9	3,5	73,0	3,0	84,6	2,75	97,5	2,10	115,4	2,0	129,7
4,5	47,6	4,0	60,6	4,25	71,5	4,3	83,8	3,25	95,6	3,0	118,5?	3,0	124,2
5,8	45,0	5,50	58,4	5,0	70,8	5,0	83,4	4,0	94,4	5,3	111,7	4,25	120,6
6,1	44,4	6,0	56,8	5,75	70,5	6,5	82,6	5,6	92,5	6,0	108,5	6,5	113,3
7,5	41,1	7,10	55,3	7,0	70,2	7,25	82,2	6,5	92,1	7,0	106,8	7,0	112,0
8,0	40,2	8,00	54,0	8,0	69,6	8,0	81,9	8,0	90,0	8,0	105,9	8,0	111,0

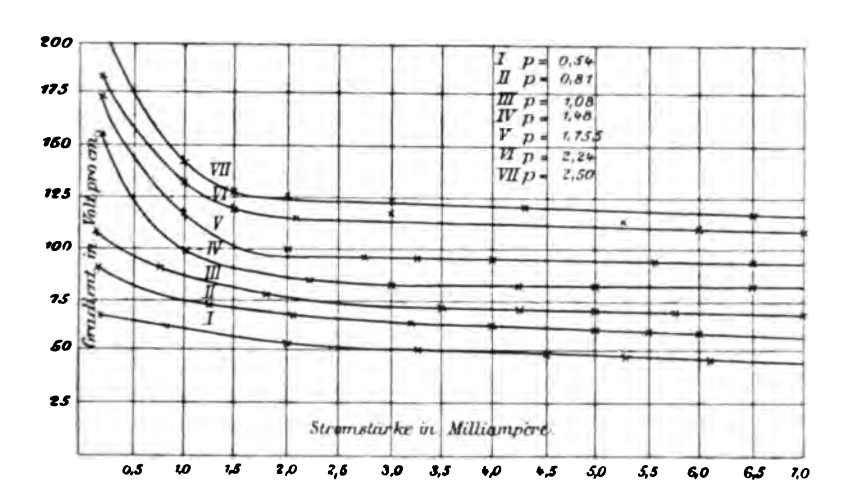


Fig. 5.

c) Jod.

Tabelle VIII.

$t = 31,6$ $d = 0,68$		$t = 35,0$ $p = 0,86$		$t = 39,2$ $p = 1,3$		$t = 46,2$ $p = 1,81$		$t = 51,2$ $p = 2,56$	
i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$	i	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$
0,075	51,0	0,083	62,3	0,083	86,7	0,092	152,8	0,83	196,9
0,092	50,0	0,217	61,1	0,192	77,3	0,25	115,4	0,166	167,2
0,217	54,5	0,482	59,8	0,45	72,8	0,39	101,0	0,36	138,6
0,385	54,0	1,11	54,5	1,2	66,5	1,12	88,5	0,93	104,7
0,682	51,7	1,87	51,6	1,78	65,0	1,51	88,0	1,34	90,2
1,93	48,0	2,23	50,7	2,4	63,5	1,91	83,8	2,05	84,7
2,50	47,2	2,80	50,0	2,8	62,1	—	—	2,80	84,1

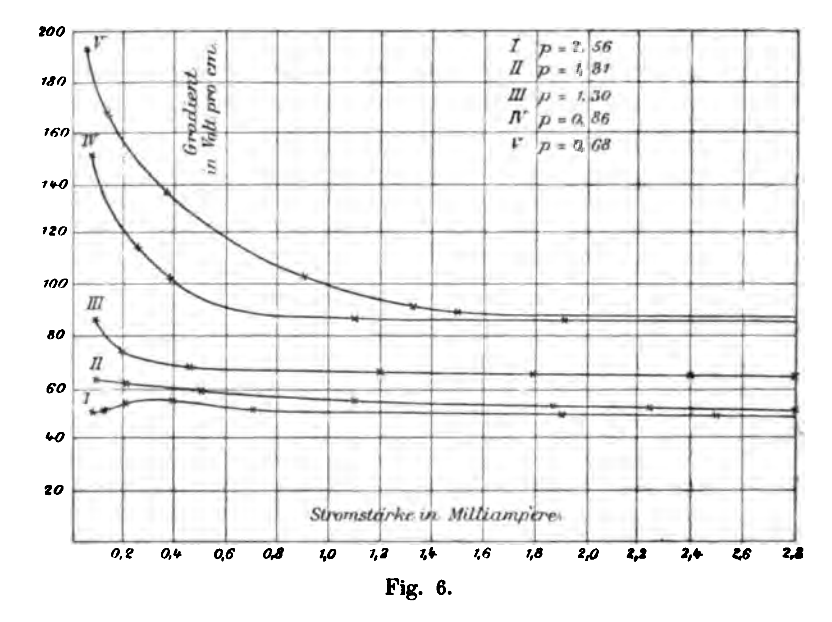


Fig. 6.

Wie die Tabellen und Kurven zeigen, ist die Abhängigkeit des Gradienten von der Stromstärke eine komplizierte und zwar für verschiedene Drucke durchaus verschiedene. Qualitativ verhalten sich die Halogene in dieser Beziehung also wie die Quecksilberhaloidverbindungen. Der bei diesen bei tiefen Drucken stets beobachtete ansteigende Teil der

Kurven zeigt sich deutlich auch bei Chlor und Jod; bei Brom konnte im allgemeinen bei tiefen Drucken und bei Stromstärken unter 0,10 Milliamp. keine kontinuierliche Entladung mehr erhalten werden. Zu erwarten ist aber, daß hier bei genügend niedrigen Drucken und kleinen Stromstärken ein Wachsen des Gradienten mit letzteren auch statthat.

Daß die beim Jod beobachtete Zunahme des Gradienten tatsächlich nur durch die Steigerung der Stromstärke und nicht etwa durch eine sekundär von dieser herrührenden Temperatur- und damit Dampfdichteerhöhung bedingt ist, wurde in gleicher Weise wie bei den Quecksilberhaloidverbindungen durch zyklische Vertauschung der Stromstärke in allen Fällen geprüft. Diskontinuitäten in der Entladung konnten ebenfalls nicht, weder durch Telephon noch durch Drehspiegel nachgewiesen werden. Erwähnen möchte ich an dieser Stelle, daß die Erscheinung auch gelegentlich an Stickstoff beobachtet worden ist.[1]) Das allen Kurven Gemeinschaftliche besteht darin, daß von einer gewissen Stromstärke an der Gradient nahezu linear abnimmt, so daß sich in *kleinen* Stromintervallen mit genügender Genauigkeit die von A. Herz aufgestellte Formel anwenden läßt.[2]) Bei größeren Stromstärken konnte kaum noch eine Änderung des Gradienten nachgewiesen werden; zu letzterem Ergebnis ist bekanntlich auch A. Wehnelt anläßlich seiner Untersuchungen an Stickstoff gelangt. Messungen darüber, wie sich der Charakter der Kurven ändert, wenn der Gradient an verschiedenen Stellen der Strombahn gemessen wird, wurden nicht angestellt; nach rohen Versuchen scheint sich der Gradient in der Nähe der Anode stärker mit der Stromstärke zu ändern, als an anderen Stellen.

3. Normaler Kathodenfall.

Die folgenden Tabb. IX—XI p. 490 enthalten die Werte des normalen Kathodenfalles für verschiedene Drucke und Stromstärken. Die zur Potentialmessung benutzte Sonde mußte wegen der kleinen Ausdehnung des Faradayschen dunklen Raumes dicht vor der Kathode angebracht werden, da sonst

1) Vgl. J. J. Thomson, Conduction of Electricity through Gazes p. 457. 1903.

2) A. Herz, Wied. Ann. 54. p. 254. 1895.

a) Chlor.

Tabelle IX.

p	i	V_K	p	i	V_K	p	i	V_K
0,4	0,08	305,3	0,8	0,09	293,5	1,85	0,1	299,5
	0,12	305,7		0,15	293,7		0,15	299,8
	0,30	307,3		0,24	293,6		0,35	299,5
	0,45	310,0		0,43	293,0		0,55	301,3
0,65	0,08	293,4	1,4	0,10	295,2	3,5	0,1	301,9
	0,10	294,2		0,17	295,2		0,25	302,2
	0,25	293,0		0,32	297,4		0,50	304,5
	0,50	295,7		0,45	298,0		1,00	304,5

b) Brom.

Tabelle X.

p	i	V_K	p	i	V_K	p	i	V_K
0,5	0,07	332,1	0,92	0,10	325,9	2,3	0,10	330,1
	0,10	333,5		0,15	325,9		0,19	330,5
	0,19	334,2		0,22	329,4		0,27	333,4
	0,30	335,6		0,30	330,0		0,5	335,5
0,7	0,08	325,7	1,55	0,10	324,4	3,7	0,1	332,0
	0,10	326,2		0,17	323,1		0,2	232,0
	0,15	327,4		0,25	322,8		0,6	334,3
	0,25	329,3		0,40	325,3		0,95	335,0

c) Jod.

Tabelle XI.

p	i	V_K	p	i	V_K	p	i	V_K
0,52	0,08	377,1	1,4	0,08	377,2	2,5	0,06	377,3
	0,10	377,2		0,10	377,4		0,10	377,5
	0,15	377,5		0,17	377,1		0,19	378,0
	0,23	379,2		0,25	377,3		0,30	380,2
0,81	0,08	377,2	1,9	0,05	377,7	3,8	0,06	375,1 ?
	0,12	377,2		0,09	377,5		0,08	378,2
	0,17	377,3		0,15	378,0		0,12	378,2
	0,25	377,9		—	—		0,20	379,0

wegen des hohen Gradienten — selbst vor der Kathode — eine erhebliche, fehlerhafte Erhöhung des normalen Kathodenfalles eintreten kann, wie zahlreiche diesbezügliche Messungen ergaben.

Aus den angeführten Tabellen geht hervor, daß der normale Kathodenfall fast unabhängig vom Druck und von der Stromstärke ist, ein Ergebnis, das mit den Resultaten aller bisher angestellten Untersuchungen über den Kathodenfall in den verschiedenen Gasen und Dämpfen übereinstimmt. Bei Chlor und Brom wichen die mittleren Werte des zu verschiedenen Zeiten und bei verschiedener Füllung erhaltenen normalen Kathodenfalles um mehrere Volt (bis zu 20) von einander ab, während bei Jod, bei dem ja allerdings auch die reinsten Versuchsbedingungen vorliegen, eine ganz außerordentlich gute Übereinstimmung der Werte für verschiedene Röhren erhalten wurde. An einem sorgfältig hergerichteten Rohre wurde nach ca. $3^1/_2$ Monaten wieder der gleiche Wert wie zu Beginn jener

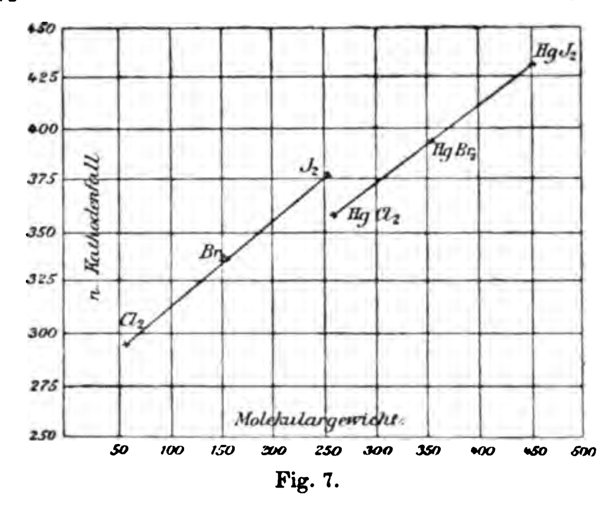


Fig. 7.

Zeit gemessen. Im elektrolytisch dargestellten Chlor war der normale Kathodenfall durchweg um einige Volt niedriger, als in dem aus $AuCl_3$ gewonnenen. Als mittlere Werte aus allen Messungen einschließlich der nicht mitgeteilten, wurden für den normalen Kathodenfall erhalten: in Chlor 295 Volt, in Brom 335 Volt und in Jod 377 Volt.

In Fig. 7 ist der normale Kathodenfall in den Halogenen

und ihren entsprechenden Quecksilberverbindungen als Funktion des Molekulargewichtes aufgetragen.

Es ergibt sich das nicht uninteressante Resultat, daß die Kathodenfälle annähernd proportional dem Molekulargewicht wachsen; bekanntlich hat K. Mey eine ähnliche qualitative Beziehung zwischen Kathodenfall und Molekulargewicht des Elektrodenmateriales gefunden.[1]) Ferner zeigt Fig. 7, daß die beiden Kurven fast parallel verlaufen und die Differenz zwischen dem Kathodenfall der Verbindung und des entsprechenden Halogens nahezu konstant ist. Dies dürfte darauf hindeuten, daß die Kathodenfälle in den Quecksilberhaloidverbindungen eine analoge, additive Größe sind. Die von J. J. Thomson angegebene und für einige wenige Verbindungen zutreffende Formel[2]) läßt sich in den vorliegenden Fällen nicht anwenden.

4. Anodenfall.

Während die normalen Kathodenfälle in den Halogenen ihrer Größe nach nicht erheblich von denjenigen in den bisher untersuchten Gasen abweichen, sind die Anodenfälle, ebenso wie in den Quecksilberhaloiddämpfen, relativ hoch und stark vom Druck und von der Stromstärke abhängig. Wie bei den letzteren konnte eine auch nur angenäherte Übereinstimmung der zu verschiedenen Zeiten, in verschiedenen Röhren gleicher Dimension und bei erneuter Füllung gemessenen Anodenfälle unter sonst gleichen Bedingungen nicht erhalten werden; deshalb wurde von eingehenderen Messungen in dieser Richtung abgesehen. Fast durchweg waren die Werte des Anodenfalles in den Halogenen größer als die entsprechenden in den Haloidverbindungen des Quecksilbers. In Cl_2 schwanken die Werte zwischen 132,2 und 351,0 Volt, in Br_2 zwischen 124 und 287 Volt und schließlich in J_2 zwischen 66,6 und 211 Volt. Die naheliegende Annahme, daß jene Unregelmäßigkeiten von Verunreinigungen der Anode herrühren, konnte durch den Versuch nicht zur Genüge bestätigt werden; jedenfalls sind diese nicht die einzige Ursache.

1) K. Mey, Verhandl. d. Physik. Gesellschaft Nr. 3. p. 72. 1903; Ann. d. Phys. **11.** p. 127. 1903.

2) J. J. Thomson, Conduction of Electricity trough Gazes p. 442. 1903.

§ 5. Resultate.

Im folgenden sind die Resultate vorliegender Arbeit kurz zusammengefaßt.

1. In qualitativer wie quantitativer Hinsicht zeigt die Glimmentladung in den Halogenen große Ähnlichkeit mit derjenigen in den Haloidverbindungen des Quecksilbers und unterscheidet sich im wesentlichen nicht von derjenigen im Stickstoff.

2. Verglichen mit Stickstoff weisen die Halogene und Quecksilberhaloidverbindungen relativ hohe Potentialgradienten und Anodenfälle auf.

3. Als mittlere Werte des Potentialgradienten auf der ungeschichteten positiven Säule für verschiedene Drucke wurden nachfolgende Zahlen erhalten, die zur Vergleichung mit denjenigen der Haloidverbindungen und des Stickstoffs[1]) zusammengestellt sind.

Das Ergebnis der Tab. XII stimmt qualitativ mit den Resultaten überein, welche die Untersuchungen des Minimalpotentiales, des Anfangspotentiales und des Funkenpotentiales in homogenen Feldern an den Halogenen ergeben haben; letztere sind bekanntlich auch erheblich höher als in Stickstoff.

Tabelle XII.

$i = 0{,}25$. Rohrdurchmesser ca. 3,5 cm.

p	$\frac{\Delta V}{\Delta x}$ auf der positiven Säule in						
	Cl_2	$HgCl_2$	Br_2	$HgBr_2$	J_2	HgJ_2	N_2
0,1	25	38	—	73	—	29	—
0,4	40	66	45	139	50	53	17
0,9	72	127	93	227	64	114	32
1,4	120	150	145	259,5	75	147	43
1,9	139	202	170	—	110	165	54
2,35	175	222	195	—	142	188	62
3,0	200	263	221	—	ca. 200	251	77

1) Die Werte wurden aus den Tabellen von A. Herz interpoliert (Wied. Ann. **54**. p. 254. 1895.

4. Potentialgradienten und Kathodenfälle sind im Halogen in jedem Falle niedriger als in ihrer entsprechenden Quecksilberverbindung.

Jod hat die kleinsten, Brom die höchsten Gradienten.

5. Auf der positiven, ungeschichteten Säule ist der Gradient nicht konstant, sondern wächst im allgemeinen beträchtlich von der Kathode zur Anode.

6. Mit steigendem Druck wachsen die Gradienten zuerst schneller, dann langsamer als dieser.

7. Die Abhängigkeit des Gradienten von der Stromstärke ist für kleine Werte der letzteren komplizierter Art; bei größeren Stromstärken kann dieselbe als linear in kleinen Stromintervallen angesehen werden, so daß sich mit genügender Genauigkeit die Formel von A. Herz anwenden läßt.

8. Die normalen Kathodenfälle wachsen nahezu proportional mit dem Molekulargewicht des Halogens und betragen in Cl_2 295, in Br_2 335 und in J_2 377 Volt im Mittel.

9. Die Differenz zwischen den normalen Kathodenfällen im Halogen und in der entsprechenden Quecksilberverbindung ist nahezu in den drei Fällen gleich.

Erlangen, Physik. Inst. d. Univ., am 28. Juli 1905.

(Eingegangen 23. September 1905.)

Während der Drucklegung vorliegender Arbeit ist von Hrn. G. Bode eine kurze Mitteilung in der Physikalischen Zeitschrift[1]) über Messungen des Kathodenfalles und des Potentialgradienten in Sauerstoff und in den Halogenen Chlor, Brom, Jod erschienen, die im Berliner Institut ausgeführt worden sind; die vom März dieses Jahres datierte, aber erst am 31. August bei der Redaktion der genannten Zeitschrift eingegangene Arbeit scheint zu qualitativ und quantitativ ähnlichen Resultaten wie die von mir mitgeteilten geführt zu haben.

1) G. Bode, Physik. Zeitschr. **19**. p. 618. 1905.

4. *Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht;*
von W. v. Ignatowsky.

---

§ 1. Einleitung.

Im folgenden wollen wir die an einem unendlich langen Draht reflektierten Wellen berechnen, welche durch eine einfallende ebene und geradlinig polarisierte elektromagnetische Welle bedingt sind.

Wir legen den Koordinatenanfang in die Achse des Drahtes, wobei die letztere mit der z-Achse zusammenfallen soll. Die einfallende Welle bewege sich längs der negativen Richtung der x-Achse.

Fall 1. Die elektrische Kraft der einfallenden Welle ist parallel zur Achse des Drahtes.

Bezeichnen wir die Amplitude der elektrischen Kraft Z durch A für $x = 0$, so haben wir:

(1) $$Z = A e^{i(\omega t + \varkappa x)},$$

wo $\omega = 2\pi/T$ und

(2) $$\varkappa^2 = \frac{\mu \varepsilon \omega^2}{c^2} - i 4 \pi \sigma \mu \omega$$

sind.

Es bedeuten weiter:

μ magnetische Permeabilität,

σ Leitfähigkeit.

Diese beiden Größen, ebenso wie Z sind im absoluten elektromagnetischen Maßsystem ausgedrückt, welches System wir auch stets im folgenden annehmen werden.

ε Dielektrizitätskonstante,

c $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Wir setzen

$$\frac{\mu \varepsilon \omega^2}{c^2} = \alpha, \quad 4 \pi \sigma \mu \omega = \beta$$

und

(3) $$\varkappa = a + i b.$$

Dann ist

$$a = \pm \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}},$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}.$$

Da aber $\varkappa^2$ stets (2) genügen muß, so haben wir entweder

$$a < 0 \quad \text{und} \quad b > 0,$$

oder

(4) $$a > 0 \quad \text{und} \quad b < 0.$$

Diese letztere Bedingung wollen wir annehmen.

Aus (1) folgt, daß bei komplexem $\varkappa$ für $x = +\infty$, Z unendlich groß wird. Dies hat aber keinen Einfluß auf die folgenden Berechnungen, denn wir können annehmen, daß in der Nähe des Drahtes Z durch (1) dargestellt werden kann und folglich können wir den Ausdruck (1) für Z beibehalten, weil doch die reflektierten Wellen nur von den Oberflächenbedingungen abhängen, d. h. von den Werten von Z an der Oberfläche des Drahtes.

Fall 2. Die elektrische Kraft der einfallenden Welle ist senkrecht zur Achse des Drahtes.

In diesem Falle erhalten wir aus (1) für die magnetische Kraft ζ, welche jetzt parallel der Achse des Drahtes sein wird, den Wert:

(5) $$\zeta = \frac{\varkappa A}{\mu \omega} \cdot e^{i(\omega t + \varkappa x)}.$$

(1) und (4) sind Lösungen der allgemeinen Maxwellschen Gleichungen (7). Ist $\sigma = 0$, so ist $\varkappa$ reell. Hätten wir direkt die Gleichungen (7) für ein reelles $\varkappa$ gelöst, so kämen wir zu demselben Resultat, als ob wir in (1) und (4) $\sigma = 0$ setzten. Vom physikalischen Standpunkte betrachtet, muß diese Kontinuität, augenscheinlich, stets bewahrt bleiben. Wenn wir also später mit Hilfe von (7) eine Lösung B für die reflektierten Wellen bei $\sigma \neq 0$ finden und eine solche B' für $\sigma = 0$, so muß demnach unbedingt sein:

(6) $$B_{\sigma = 0} = B'.$$

Wir heben diese anscheinend selbstverständliche Bedingung deshalb hervor, weil, wie wir im nächsten Para-

graphen sehen werden, bei der Lösung unseres Problems eine gewisse Unbestimmtheit existiert, indem es bei reellem $\varkappa$ zwei Funktionen (J_n und P_n) gibt, welche bei $r = \infty$ endlich bleiben, andererseits aber bei komplexen $\varkappa$ nur eine (Q_n). Deshalb nehmen wir diese letztere als Lösung an auch bei reellem $\varkappa$, eben wegen (6).

Diesbezüglich verweisen wir noch auf das am Schluß des § 7 Gesagte.

Die Gleichungen von Maxwell lauten, in Vektorform geschrieben:

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} 4\pi\sigma \bar{E} + \dfrac{\varepsilon}{c^2}\dfrac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} H, \\ -\mu \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \operatorname{curl} \bar{E}, \end{cases}$$

wo $\bar{E}$ und $\bar{H}$ der elektrische bez. magnetische Vektor sind.

Führen wir die Zylinderkoordinaten r und φ, welche mit x und y durch die Relationen

$$\text{(8)} \qquad x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi$$

verbunden sind, ein, so erhalten wir aus (7), da

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

ist, folgendes Gleichungssystem:

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} 4\pi\sigma Z + \dfrac{\varepsilon}{c^2}\dfrac{\partial Z}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi r}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varrho}{\partial \varphi}, \\ 4\pi\sigma R + \dfrac{\varepsilon}{c^2}\dfrac{\partial R}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \zeta}{\partial \varphi}, \\ 4\pi\sigma \Phi + \dfrac{\varepsilon}{c^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = -\dfrac{\partial \zeta}{\partial r} \end{cases}$$

und

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} -\mu \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi r}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial R}{\partial r}, \\ -\mu \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Z}{\partial \varphi}, \\ -\mu \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\dfrac{\partial Z}{\partial r}, \end{cases}$$

wo Z, R, Φ und ζ, ϱ, ψ die Komponenten der elektrischen bez. magnetischen Kraft längs den positiven Richtungen von z, r und φ sind.

§ 2. Diskussion der notwendigen Lösungen.

Bei der Lösung unseres Problems werden wir zur folgenden Differentialgleichung kommen:

$$\frac{d^2 M}{d x^2} + \frac{1}{x}\frac{d M}{d x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) M = 0, \tag{1}$$

wo $n = 0, 1, 2, 3 \ldots n$ ist.

Das eine partikulare Integral von (1) ist:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n . n!}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \ldots\right\}, \tag{2}$$

welches als Besselsche Funktion erster Art und n^{ter} Ordnung des Argumentes x bekannt ist.[1])

Für die abgeleitete $J_n'(x)$ von $J_n(x)$ nach x haben wir:

(3)[2])
$$J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x).$$

Für kleine Werte von x können wir setzen:

$$J_0(x) = 1, \quad J_n(x) = \frac{x^n}{2^n . n!} \tag{4}$$

und

$$\frac{J_0'(x)}{J_0(x)} = -\frac{x}{2}, \quad \frac{J_n'(x)}{J_n(x)} = \frac{n}{x}. \tag{5}$$

Für große Werte von x ist:

$$\left\{\begin{aligned} J_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \cdot \Big\{ & S_n(-8xi)\, e^{i\left(x - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right)} \\ & + S_n(8xi)\, e^{-i\left(x - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}\Big\}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} S_n(y) = 1 &+ \frac{4n^2 - 1}{y} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!\, y^2} \\ &+ \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)(4n^2 - 25)}{3!\, y^3} + \ldots \end{aligned}\right. \tag{7}$$

ist.

Diese Formeln gelten sowohl für reelle, als auch für komplexe x.

Da x stets die Form haben wird:

$$x = r\varkappa = r(a + ib)$$

1) Vgl. A. Gray u. G. Mathews, A treatise on Bessel functions. London 1895. p. 11.

2) l. c. p. 13ff.

und den Bedingungen (4), § 1 genügen muß, so können wir in (6) bei großen rb das zweite Glied vor dem ersten vernachlässigen und erhalten, falls wir noch setzen $S_n = 1$:

(8) $$J_n(x) = i^{-n}\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\cdot e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)},$$

da

$$i^{-n} = e^{-\frac{in\pi}{2}}$$

ist und

(9) $$\frac{J_n'(x)}{J_n(x)} = \frac{n}{x} + i.$$

Wir sehen, daß bei komplexem $\varkappa$ und $r = \infty$ $J_n(x)$ unendlich wird. Deshalb können wir diese Funktion nicht als Lösung für die reflektierten Wellen gebrauchen, denn der Außenraum kann *eventuell* leitend sein und die Annahme $\sigma = 0$, d. h. auch $b = 0$ ist doch schließlich eine Annäherung.

Wir müssen deshalb ein Integral einführen, welches bei $r = \infty$ und komplexem $\varkappa$ endlich bleibt.

Zu dem Zwecke bedienen wir uns der Funktion:

(10)[1] $$P_n(x) = Y_n(x) - (\lg 2 - C)J_n(x),$$

welche auch der Gleichung (1) genügt.

Hier ist $C = 0{,}5772\ldots$ die Eulersche Konstante und

(11)[1] $$\left\{\begin{aligned} Y_n(x) &= J_n(x)\lg x - \left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots\tfrac{1}{n}\right)J_n(x) \\ &\quad - \frac{n!}{2}\sum_{0}^{n-1}\frac{1}{n-s}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-s}\frac{J_s}{s!} - \sum_{1}^{\infty}(-1)^s\frac{n+2s}{s(n+s)}J_{n+2s}. \end{aligned}\right.$$

Für große Werte von x ist:

(12) $$\left\{\begin{aligned} P_n(x) = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot\Big\{&S_n(-8xi)e^{i\left(x-\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)} \\ &- S_n(8xi)e^{-i\left(x-\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}\Big\}. \end{aligned}\right.$$

---

1) A. Gray, l. c. p. 23, 40, 66, 99. Wir haben in (11) $-C$ statt $+C$ gesetzt, wie letzteres bei Heine, Handbuch der Kugelfunktionen Bd. I. p. 245 geschehen ist, woselbst ein Druckfehler ist, auf welchen Gray, l. c. p. 88 hingewiesen hat.

Wir führen jetzt die Funktion

(13) $$Q_n(x) = \frac{i\pi}{2} J_n(x) + P_n(x)$$

ein.

Ein Vergleich von (13), (12) und (6) liefert für große Werte von x:

(14) $$Q_n(x) = i\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, S_n(8xi)\, e^{-i\left(x - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right)},$$

oder angenähert

(14a) $$Q_n(x) = i^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Falls die Bedingungen (4), § 1 eingehalten werden, ist aus dem obigen erstens ersichtlich, daß bei $b = 0$, d. h. $\sigma = 0$, P_n laut (11) reell wird; zweitens ist bei $r = \infty$ Q_n endlich laut (14), drittens wird der Bedingung (6), § 1 genügt und viertens erhalten wir laut (14) bei großem r, *vom* Drahte fortschreitende Wellen.

Wir werden also Q_n als unser gesuchtes zweites Integral gebrauchen, unabhängig davon, ob $\varkappa$ reell ist oder nicht.[1])

Außerdem haben wir noch folgende Beziehungen:

(15) $$Y_n' = \frac{n}{x} Y_n - Y_{n+1}$$

und

(16) $$J_{n+1} \cdot Y_n - J_n \cdot Y_{n+1} = \frac{1}{x}.$$

Hieraus folgt:

(17) $$J_{n+1} \cdot Q_n - J_n \cdot Q_{n+1} = \frac{1}{x},$$

(18) $$J_n \cdot Q_n' - J_n' \cdot Q_n = \frac{1}{x},$$

(19) $$Q_n' = \frac{n}{x} Q_n - Q_{n+1}$$

und

(20) $$J_n \cdot P_n' - J_n' \cdot P_n = \frac{1}{x}.$$

1) Unser Q_n ist nichts anderes als

$$Q_n = \frac{i\pi}{2} H_2^n(x),$$

wo $H_2^n(x)$ die Hankelsche Zylinderfunktion zweiter Gattung n^{ter} Ordnung bedeutet. Vgl. N. Nielson, Handb. d. Theorie d. Zylinderfunktionen p. 16 u. 154. Leipzig, Teubner 1904.

Für kleine Werte von x können wir schreiben:

(21)
$$\begin{cases} Q_0 = \lg \frac{x\gamma i}{2}, \\ Q_n = -\frac{n!}{2n} \cdot \frac{2^n}{x^n}, \end{cases}$$

wo $\lg \gamma = C$ und $\gamma = 1{,}7728$ ist. Und

(22)
$$\frac{Q_0'}{Q_0} = \frac{1}{x \lg \frac{x\gamma i}{2}}, \quad \frac{Q_n'}{Q_n} = -\frac{n}{x}.$$

Für große x haben wir noch:

(23)
$$\frac{Q_n'}{Q_n} = \frac{n}{x} - i.$$

Außerdem wollen wir noch eine Beziehung anführen, die uns später von Nutzen sein wird:

(24)
$$e^{i x \cos \varphi} = J_0(x) + 2\sum_1^{\infty} i^n J_n(x) \cos n\varphi.$$

Wir müssen noch bemerken, daß die Ausdrücke (6) u. (12) nur bis zu solchen Werten von n gültig sind, solange die Funktionen S_n konvergent bleiben. Wir werden diesen Grenzwert von n, bei welchem auch noch (9) und (14a) gültig bleiben, mit s bezeichnen.

§ 3. Allgemeine Lösung des ersten Falles.

Wir müssen annehmen, daß überall

$$R = \Phi = 0$$

ist. Setzen wir

(1)
$$\begin{cases} Z = Z_1 e^{i\omega t}, \\ \varrho = \varrho_1 e^{i\omega t}, \\ \psi = \psi_1 e^{i\omega t}, \end{cases}$$

wo Z_1, ϱ_1 und ψ_1 von t unabhängig sind, so erhalten wir aus (9) und (10), § 1:

(2)
$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z_1}{\partial r} + x^2 Z_1 + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z_1}{\partial \varphi^2} = 0$$

und

$$(3)\qquad \begin{cases} \varrho = -\dfrac{e^{i\omega t}}{-i\omega r\mu}\dfrac{\partial Z_1}{\partial \varphi}, \\ \psi = \dfrac{e^{i\omega t}}{i\omega\mu}\dfrac{\partial Z_1}{\partial r}. \end{cases}$$

Für Z_1 nehmen wir eine Funktion von folgender Form an:

$$(4)\qquad Z_1 = M\cos n\varphi,$$

wo M nur von r abhängt und $n = 0, 1, 2 \ldots n$ ist.

Wir erhalten dann aus (2):

$$(5)\qquad \frac{d^2 M}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d M}{d r} + \left(\varkappa^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) M = 0.$$

Laut dem in den §§ 1 und 2 Gesagten müssen wir als Lösung für das Innere des Drahtes die Funktion $J_n(\varkappa' r)$, und für den Außenraum die Funktion $Q_n(\varkappa r)$ annehmen und erhalten dann für die reflektierten Wellen:

$$(6)\qquad \begin{cases} Z' = e^{i\omega t}\sum\limits_0^\infty B_n Q_n(\varkappa r)\cos n\varphi, \\ \psi' = \dfrac{e^{i\omega t}\varkappa}{i\omega\mu}\sum\limits_0^\infty B_n Q_n'(\varkappa r)\cos n\varphi. \end{cases}$$

Für die in den Draht eindringenden:

$$(7)\qquad \begin{cases} Z'' = e^{i\omega t}\sum\limits_0^\infty C_n J_n(\varkappa' r)\cos n\varphi, \\ \psi'' = \dfrac{e^{i\omega t}\varkappa'}{i\omega\mu'}\sum\limits_0^\infty C_n J_n'(\varkappa' r)\cos n\varphi, \end{cases}$$

wo μ' und $\varkappa'$ sich auf das Material des Drahtes beziehen un[d] B_n und C_n Konstanten bedeuten.

Für die einfallenden Wellen bekommen wir laut § und § 2 (24)

$$(8)\qquad \begin{cases} Z = A e^{i\omega t}\left\{J_0(r\varkappa) + 2\sum\limits_1^\infty i^n J_n(r\varkappa)\cos n\varphi\right\}, \\ \psi = \dfrac{A\varkappa e^{i\omega t}}{i\omega\mu}\left\{J_0'(r\varkappa) + 2\sum\limits_1^\infty i^n J_n'(r\varkappa)\cos n\varphi\right\}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den Radius des Drahtes mit g, so erhalten wir für die Oberflächenbedingungen folgende Ausdrücke:

$$(9)\qquad \left\{ r = g \quad \begin{aligned} Z'' &= Z' + Z, \\ \psi'' &= \psi' + \psi. \end{aligned}\right.$$

Hieraus bestimmen sich die Konstanten B_n und C_n, mit Benutzung von (18), § 2, zu

$$(10)\qquad B_0 = A \cdot \frac{W_0}{U_0}, \quad B_n = 2\,\iota^n A \frac{W_n}{U_n}$$

und

$$(11)\qquad C_0 = \frac{A\,\mu'}{g} \cdot \frac{1}{U_0}, \quad C_n = \frac{2\,\iota^n A\,\mu'}{g} \cdot \frac{1}{U_n},$$

wo

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} W_n &= \mu\,\varkappa' J_n'(g\varkappa') J_n(g\varkappa) - \mu'\varkappa J_n(g\varkappa') J_n'(g\varkappa) \\ &\text{und} \\ U_n &= \mu'\varkappa J_n(g\varkappa') Q_n'(g\varkappa) - \mu\,\varkappa' J_n'(g\varkappa') Q_n(g\varkappa). \end{aligned}\right.$$

Wir können schreiben:

$$(13)\qquad \frac{W_n}{U_n} = \frac{J_n(g\varkappa)}{Q_n(g\varkappa)} \cdot \frac{\mu\,\varkappa' \dfrac{J_n'(g\varkappa')}{J_n(g\varkappa')} - \mu'\varkappa \dfrac{J_n'(g\varkappa)}{J_n(g\varkappa)}}{\mu'\varkappa \dfrac{Q_n'(g\varkappa)}{Q_n(g\varkappa)} - \mu\,\varkappa' \dfrac{J_n'(g\varkappa')}{J_n(g\varkappa')}}.$$

Oder laut (18), § 2, indem wir den Nenner von (13) durch F bezeichnen:

$$(14)\qquad \frac{W_n}{U_n} = -\frac{J_n(g\varkappa)}{Q_n(g\varkappa)} \left\{1 - \frac{\mu'}{g\,J_n(g\varkappa)\,Q_n(g\varkappa)\,.\,F}\right\}.$$

Außerdem ist leicht zu zeigen, daß W_n nicht anders ist als:

$$(15)^{1)}\qquad W_n = -\frac{(\varkappa'^2 - \varkappa^2)}{g} \int_0^g r\,J_n(r\varkappa')\,J_n(r\varkappa)\,dr,$$

falls $\mu = \mu' = 1$ ist.

§ 4. Allgemeine Lösung des zweiten Falles.

Wir werden jetzt überall haben:

$$Z = \varrho = \psi = 0.$$

Setzen wir wieder:

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} \zeta &= \zeta_1\, e^{i\omega t}, \\ R &= R_1\, e^{i\omega t}, \\ \Phi &= \Phi_1\, e^{i\omega t}, \end{aligned}\right.$$

---

1) A. Gray, l. c. p. 53.

so folgt aus (9) und (10), § 1:

$$\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta_1}{\partial r} + \varkappa^2 \zeta_1 + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{2}$$

und

$$\left\{ \begin{aligned} R &= \frac{e^{i\omega t}}{r\left(4\pi\sigma + \frac{\varepsilon i \omega}{c^2}\right)} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi} = - \frac{i\omega\mu}{r\varkappa^2} e^{i\omega t} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi}, \\ \Phi &= \frac{i\omega\mu}{\varkappa^2} e^{i\omega t} \frac{\partial \zeta_1}{\partial r}. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Analog § 3 erhalten wir für die reflektierten Wellen:

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta' &= e^{i\omega t} \sum_0^\infty B_n' . Q_n(r\varkappa) \cos n\varphi, \\ \Phi' &= \frac{e^{i\omega t} i\omega\mu}{\varkappa} \sum_0^\infty B_n' Q_n'(r\varkappa) \cos n\varphi, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

für die in den Draht eindringenden:

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta'' &= e^{i\omega t} \sum_0^\infty C_n' J_n(r\varkappa') \cos n\varphi, \\ \Phi'' &= \frac{e^{i\omega t} i\omega\mu'}{\varkappa'} \sum_0^\infty C_n' J_n'(r\varkappa') \cos n\varphi \end{aligned} \right. \tag{5}$$

und für die einfallende Welle:

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta &= \frac{\varkappa A}{\mu\omega} e^{i\omega t} \left\{ J_0(r\varkappa) + 2\sum_0^\infty i^n J_n(r\varkappa) \cos n\varphi \right\}, \\ \Phi &= i A e^{i\omega t} \left\{ J_0'(r\varkappa) + 2\sum_0^\infty i^n J_n'(r\varkappa) \cos n\varphi \right\}. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Die Oberflächenbedingungen lauten:

$$r = g \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta'' &= \zeta' + \zeta, \\ \Phi'' &= \Phi' + \Phi, \end{aligned} \right. \tag{7}$$

woraus sich die Konstanten C_n' und B_n' bestimmen zu:

$$B_0' = \frac{A\varkappa}{\omega\mu} \cdot \frac{W_0'}{U_0'}, \qquad B_n' = \frac{2 i^n A \varkappa}{\mu\omega} \cdot \frac{W_n'}{U_n'} \tag{8}$$

und

$$C_0' = \frac{A\varkappa'}{g\omega} \cdot \frac{1}{U_0'}, \qquad C_n' = \frac{2 i^n A \varkappa'}{g\omega} \cdot \frac{1}{U_n'}, \tag{9}$$

wo

$$\left\{ \begin{aligned} W_n' &= \mu'\varkappa J_n'(g\varkappa) J_n(g\varkappa) - \mu\varkappa' J_n(g\varkappa') J_n'(g\varkappa) \\ &\text{und} \\ U_n' &= \mu\varkappa' J_n(g\varkappa') Q_n'(g\varkappa) - \mu'\varkappa J_n'(g\varkappa') Q_n(g\varkappa). \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Außerdem haben wir noch:

(11) $$\frac{W_n'}{U_n'} = -\frac{J_n'(g\varkappa)}{Q_n(g\varkappa)} \cdot \frac{\mu'\varkappa\frac{J_n(g\varkappa)}{J_n'(g\varkappa)} - \mu\varkappa'\frac{J_n(g\varkappa')}{J_n'(g\varkappa')}}{\mu'\varkappa\frac{Q_n(g\varkappa)}{Q_n'(g\varkappa)} - \mu\varkappa'\frac{J_n(g\varkappa)}{J_n'(g\varkappa')}}$$

und falls wir den Nenner mit F_1 bezeichnen:

12) $$\frac{W_n'}{U_n'} = -\frac{J_n'(g\varkappa)}{Q_n'(g\varkappa)} \cdot \left\{1 + \frac{\mu'}{g\,J_n'(g\varkappa)\,Q_n'(g\varkappa).F_1}\right\}.$$

§ 5. Allgemeines Integral der Maxwellschen Gleichungen.

Wir nehmen von jetzt ab an, daß der Außenraum ein reines Dielektrikum ist und zwar Luft, d. h.

(1) $$\varkappa = \frac{\omega}{c}.$$

Dann erhalten wir als allgemeinstes Integral der Maxwellschen Gleichungen, d. h. den Wert Z' für die reflektierte Welle im Außenraum:

(2) [1] $$Z' = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{4\pi\sigma\frac{\partial Z''}{\partial t} + \frac{(\varepsilon'-1)}{c^2}\frac{\partial^2 Z''}{\partial t^2}}{R}\Bigg|_{t=t-\frac{R}{c}} d\nu.$$

---

1) Das allgemeinste Integral überhaupt der Maxwellschen Gleichungen (7), § 1 ist, in Vektorform geschrieben:

(2a) $$\left\{\begin{aligned} \bar{E} = &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{4\pi\sigma\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{(\varepsilon-1)}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}}{R}\Bigg|_{t=t-\frac{R}{c}} d\nu \\ &+\frac{1}{4\pi c}\int\limits_L \nabla \lg R \cdot \frac{\partial \bar{n}}{\partial t}(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)\Big|_{t=t-\frac{R}{c}} d\omega \\ &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_L \nabla \frac{1}{R} \cdot \bar{n}(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)\Big|_{t=t-\frac{R}{c}} d\omega, \end{aligned}\right.$$

wovon (2) ein Spezialfall ist. In (2a) bez. (2) bedeuten: V das Volumen der zu betrachtenden Körper, $d\nu$ das Volumenelement, L die entsprechenden Oberflächen, $d\omega$ Oberflächenelemente, $\bar{n}(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)$ der Sprung der

Hieraus folgt, da $Z'' = e^{i\omega t} Z_1''$ ist:

$$(3) \qquad Z' = +\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{g}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)} \cdot (x'^2 - x) Z_1'' r}{R} \, dr \, d\varphi \, dz .$$

Bezeichnen wir durch N den Punkt im Außenraum, für welchen wir Z' suchen, und durch h die Entfernung von N bis zu irgend einem Punkte N' im Querschnitt des Drahtes, welcher sich durch eine Ebene bestimmt, die senkrecht zur Achse des Drahtes ist und durch N geht, so ist

$$R^2 = z^2 + h^2,$$

und folglich

$$(4)^{1)} \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{i\omega R}{c}} \, dz}{R} = 2\int_h^{\infty} \frac{e^{-\frac{i\omega R}{c}} \, dR}{\sqrt{R^2 - h^2}} \\ \displaystyle = 2\int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{i\omega h\eta}{c}} \, d\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} = -2 Q_0(\varkappa h), \end{cases}$$

wo $\eta = R/h$ ist. Demnach ist:

$$(5) \qquad Z' = -\frac{e^{i\omega t}(x'^2 - x^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{g} Q_0(\varkappa h) Z_1'' r \, dr \, d\varphi .$$

Bezeichnen wir den Abstand von N bis zur Achse mit f und den Winkel zwischen f und der x-Achse mit ϑ, so folgt

$$h = \sqrt{f^2 + r^2 - 2fr\cos(\varphi - \vartheta)},$$

normalen zur Oberfläche Komponente der elektrischen Kraft $\bar{E}$, und ∇ den Gradienten eines Skalars. R ist die Entfernung von dem Punkte, für welchen wir $\bar{E}$ berechnen wollen, bis zu dem entsprechenden Volumen-, bez. Oberflächenelement. Unter den Integralen muß statt t, $t - R/c$ gesetzt werden. Den Beweis von (2a) hat Verfasser in seiner Arbeit „Lösung einiger Fragen aus der Elektrostatik und Elektrodynamik mit Hilfe der Vektoranalysis" (auf russisch 1902 erschienen) gegeben. Diesen Beweis hier zu wiederholen würde uns zu weit führen, wir werden aber dafür die Richtigkeit von (2) indirekt beweisen.

1) A. Gray, l. c. p. 230.

wo r die Entfernung von der Achse bis N', und φ den Winkel zwischen r und der x-Achse bedeuten. Außerdem haben wir:

$$(6)[1] \quad Q_0(\varkappa h) = Q_0(\varkappa f) \cdot J_0(\varkappa r) + 2\sum_1^\infty Q_n(\varkappa f) J_n(\varkappa r) \cos n(\varphi - \vartheta).$$

Unter der Voraussetzung, daß

$$\mu = \mu' = 1.$$

erhalten wir aus (5), falls wir daselbst (6) und den Wert für Z_1'' aus (7), § 3 einsetzen, unter Berücksichtigung von (15), § 3, tatsächlich den Wert (6), § 3 für Z'. Damit ist bewiesen, daß (2) und folglich auch (5) das Integral der Gleichungen von Maxwell darstellt und uns die richtige Lösung für die reflektierten Wellen gibt.

Wir nehmen an:

$$\frac{\omega h}{c} = \frac{2\pi h}{\lambda} \text{ ist sehr groß},$$

dann können wir laut § 2 setzen:

$$(7) \qquad Q_0\left(\frac{\omega h}{c}\right) = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{h}} \cdot e^{-i\left(\frac{2\pi h}{\lambda} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Setzen wir noch außerdem

$$\frac{g}{h} = \text{sehr klein}$$

voraus, so können wir schreiben

$$h = f - r\cos(\varphi - \vartheta).$$

Der größte Fehler, welchen wir bei dieser Annahme bezüglich h machen, ist ca. $g^2/2h$ oder $g^2/2f$.

Damit wir also bei diesem Werte von h keinen großen Fehler für die Phase von Z' bekommen, muß sein:

$$(8) \qquad \lambda = \text{größer als } \frac{g^2}{2f}.$$

Da $\sqrt{\lambda/h}$ in (7) nur auf die Amplitude wirkt, so können wir diese Größe aus dem Integral (5) herausheben und f statt h schreiben und erhalten:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} Z' = &-\frac{i(x'^2 - x^2)}{4\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{f}} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi f}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &\int_0^{2\pi}\int_0^g r\, Z_1''\, e^{\frac{i\omega r}{c}\cos(\varphi - \vartheta)}\, d\varphi \, . \, dr. \end{aligned} \right.$$

---

1) A. Gray, l. c. p. 92.

Aus (24), § 2 haben wir:

$$(10)\qquad \int_0^{2\pi} e^{i x \cos(\varphi - \vartheta)} \cos n\varphi \, d\varphi = 2\pi \iota^n J_n(x) \cos n\vartheta .$$

Nehmen wir wieder $\mu = \mu' = 1$ an und setzen den Wert von Z_1'' in (9) ein und berücksichtigen (10) und (15), § 3, so erhalten wir:

$$(11)\qquad \begin{cases} Z' = \dfrac{iA}{2}\sqrt{\dfrac{\lambda}{r}} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ \qquad\qquad \left\{\dfrac{W_0}{U_0} + 2\sum_1^\infty (-1)^n \dfrac{W_n}{U_n} \cos n\varphi\right\}, \end{cases}$$

wo wieder r und φ, statt f und ϑ gesetzt sind.

Wir wiederholen noch einmal die Bedingungen, unter denen (11) gültig ist:

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{2\pi r}{\lambda} \text{ groß}; \quad r \text{ groß gegen } g, \\ \qquad\qquad \lambda \text{ groß gegen } \dfrac{g^2}{2r}. \end{cases}$$

Wir werden später (§ 7) sehen, daß, falls der Draht ein absoluter Leiter ist, sein wird:

$$(13)\qquad \frac{W_n}{U_n} = -\frac{J_n(g\varkappa)}{Q_n(g\varkappa)}$$

und wir erhalten dann aus (11):

$$(14)\qquad \begin{cases} Z' = -\dfrac{iA}{2}\sqrt{\dfrac{\lambda}{r}}\, e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ \qquad\qquad \left\{\dfrac{J_0(g\varkappa)}{Q_0(g\varkappa)} + 2\sum_1^\infty (-1)^n \dfrac{J_n(g\varkappa)}{Q_n(g\varkappa)} \cos n\varphi\right\}. \end{cases}$$

Ist $g\varkappa = 2\pi g/\lambda$ klein, so folgt nach § 2:

$$(15)\qquad \frac{J_0(g\varkappa)}{Q_0(g\varkappa)} = \frac{1}{\lg \frac{g\varkappa\gamma i}{2}}, \qquad \frac{J_n(g\varkappa)}{Q_n(g\varkappa)} = -\frac{2n(g\varkappa)^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

und:

$$(16)\qquad \begin{cases} Z' = -\dfrac{iA}{2}\sqrt{\dfrac{\lambda}{r}}\, e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ \qquad\qquad \left\{\dfrac{1}{\lg \frac{g\varkappa\gamma i}{2}} - 4\sum_1^\infty \dfrac{(-1)^n \cdot n \cdot (g\varkappa)^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \cos n\varphi\right\}. \end{cases}$$

Wir werden in § 8 denselben Ausdruck (16) in anderer Weise ableiten und dadurch zugleich die Richtigkeit des obigen Näherungsverfahrens beweisen.

Für den Fall eines absoluten Leiters ist $Z'' = 0$ und folglich das Integral (5) direkt nicht zu gebrauchen. Wir wollen jetzt ein analoges Integral ableiten für einen absoluten Leiter.

Wir haben laut (11) und (6), § 3:

$$(17)\quad Z' = -A e^{i\omega t}\left\{\frac{J_0(g\varkappa)\,Q_n(r\varkappa)}{Q_0(g\varkappa)} + 2\sum_1^{\infty}\frac{i^n\,.\,J_n(g\varkappa)\,Q_n(r\varkappa)}{Q_n(g\varkappa)}\cos n\varphi\right\}.$$

Führen wir wieder die Bezeichnung h ein, wie am Anfang dieses Paragraphen, und schreiben g statt r, also:

$$h = \sqrt{f^2 + g^2 - 2fg\left(\cos(\varphi - \vartheta)\right)},$$

so ist laut (6) leicht zu sehen, daß:

$$Z' = -\frac{A e^{i\omega t}}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_0(\varkappa h)\,X\,d\varphi$$

ist, wo

$$X = \left\{\frac{1}{Q_0(g\varkappa)} + 2\sum_1^{\infty}\frac{i^n\cos n\varphi}{Q_0(g\varkappa)}\right\}$$

ist. Bilden wir jetzt laut § 3 die Summe $\psi + \psi'$ für einen absoluten Leiter und berücksichtigen (18), § 2, so folgt für $r = g$:

$$A e^{i\omega t} X = -i\omega g(\psi + \psi') = -g\frac{\partial(\psi + \psi')}{\partial t}$$

und demnach:

$$(18)\quad Z' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_0(\varkappa h)\frac{\partial(\psi + \psi')}{\partial t}\,g\,d\varphi,$$

oder laut (4)

$$(19)\quad Z' = -\frac{i\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)}}{R}\,g\cdot(\psi_1 + \psi'_1)\,dz\,d\varphi,$$

wo also $\psi + \psi' = e^{i\omega t}(\psi_1 + \psi'_1)$ die *gesamte* magnetische Kraft für $r = g$ ist.

Nach Ausführung der Integration muß in (18) und (19) statt f und ϑ wieder r und φ gesetzt werden.

§ 6. Berechnung der im Drahte absorbierten Energie.

Da wir keine elektrische bez. magnetische Hysteresis voraussetzen, so müssen wir annehmen, daß die im Drahte absorbierte Energie E lediglich durch die Joulesche Wärme bedingt wird.

Wie wir schon angenommen hatten, ist der Außenraum ein reines Dielektrikum, und zwar Luft, d. h. $\varkappa = \omega / c$.

In diesem Falle wird die algebraische Summe der durch einen, dem Draht konzentrischen Zylinder vom Radius r ein- und ausströmenden Energie gleich dem oben genannten E sein. Wir brauchen aber die Berechnung nur für die Einheit der Länge des Drahtes auszuführen, da längs der Achse des letzteren keine Energie ein- bez. ausströmt.

Nach dem Satze von Poynting erhalten wir für die im Drahte auf der Einheit der Länge, in der Einheit der Zeit, in Form von Joulescher Wärme absorbierten Energie E den Ausdruck:

$$(1) \qquad E = -\frac{r}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} \bar{n}\,.\,V\bar{E}\bar{H}\,d\varphi\,,$$

wobei E unbedingt *positiv* oder Null sein muß.

Im Ausdruck (1) bedeutet $\bar{n}$ den Einheitsvektor längs der äußeren Normale zum Zylinder, und $V\bar{E}\bar{H}$ das Vektorprodukt zwischen der elektrischen Kraft $\bar{E}$ und der magnetischen $\bar{H}$.

Bezeichnen wir den Einheitsvektor der Komponente von $V\bar{E}\bar{H}$ längs der Normale durch $\bar{\gamma}$, so erhalten wir

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{n}\,V\bar{E}\bar{H} = \bar{n}\,\bar{\gamma}\,.\,Z\,\psi\sin(E\,H) = \bar{n}\,\bar{\gamma}\,.\,Z\,\psi \\ \text{und für den zweiten Fall} \\ \bar{n}\,V\bar{E}\bar{H} = \bar{n}\,\bar{\gamma}\,.\,\zeta\,\Phi\,. \end{cases}$$

Außerdem müssen wir berücksichtigen, daß das skalare Produkt $\bar{\gamma}\,\bar{n}$ den Wert hat:

$$(3) \quad \begin{cases} \text{Für den ersten Fall} \quad \bar{\gamma}\,\bar{n} = -1 \\ \text{und für den zweiten} \quad \bar{\gamma}\,\bar{n} = 1. \end{cases}$$

Indem wir durch $\Re(y)$ den reellen Teil einer Größe y bezeichnen, erhalten wir aus (1), (2) und (3) für den mittleren Wert von E während einer Periode T für den ersten Fall:

$$(4) \qquad E = \frac{r}{4\pi T}\int_0^T\int_0^{2\pi}[\Re(Z) + \Re(Z')].[\Re(\psi) + \Re(\psi')]\,dt\,d\varphi.$$

Diesen Ausdruck können wir in drei Teile spalten und zwar:

$$(5) \qquad \begin{cases} E_1 = \dfrac{r}{4\pi T}\displaystyle\int_0^T\int_0^{2\pi}\Re(Z).\Re(\psi)\,dt\,d\varphi\,, \\ E_2 = \dfrac{r}{4\pi T}\displaystyle\int_0^T\int_0^{2\pi}\Re(Z').\Re(\psi')\,dt\,d\varphi\,, \\ E_3 = \dfrac{r}{4\pi T}\displaystyle\int_0^T\int_0^{2\pi}[\Re(Z)\Re(\psi') + \Re(Z')\Re(\psi)]\,dt\,d\varphi \end{cases}$$

und

$$E = E_1 + E_2 + E_3.$$

Da E_1 unverändert bleibt, ob der Draht da ist oder nicht, und da im letzteren Fall keine Energie absorbiert wird, so muß E_1 Null sein. E_2 ist die von den reflektierten Wellen in den Raum ausgestrahlte Energie und muß folglich stets eine *negative* Größe sein, und E_3 ist die zum Drahte strömende Energie und muß folglich eine *positive* Größe und dem absoluten Werte nach größer oder gleich E_2 sein.

Unter Berücksichtigung von (13) und (20), § 2 und der §§ 3 und 4 erhalten wir für die E nach einigen elementaren, aber langwierigen Rechnungen, da $P_n(x)$ und $J_n(x)$ für reelle positive x reell sind, und falls wir setzen:

$$(6) \qquad \frac{W_n}{U_n} = \alpha_n + i\beta_n,$$

wo α_n und β_n reelle Größen sind, folgende Ausdrücke:

$$(7) \qquad \begin{cases} E_1 = 0. \\ E_2 = -\dfrac{\pi A^2}{8\mu\omega}\left\{\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \displaystyle\sum_1^\infty(\alpha_n^2 + \beta_n^2)\right\}, \\ E_3 = +\dfrac{\pi A^2}{8\mu\omega}\left\{\dfrac{2}{\pi}\beta_0 + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_1^\infty\beta_n\right\}. \end{cases}$$

Ganz analoge Ausdrücke erhalten wir für die im zweiten Falle absorbierte Energie $E' = E_1' + E_2' + E_3'$, nur daß in (7) statt α_n und β_n, α_n' und β_n' stehen werden, wo

(8) $$\frac{W_n'}{U_n'} = \alpha_n' + i\beta_n'$$

ist.

Laut unserer Annahme: Außenraum = Luft, ist $\mu = 1$. Die Ausdrücke (7) gelten auch für $s > 1$.

Wir sehen, daß E bez. E' von r unabhängig sind, wie es auch sein muß, da im Außenraum keine Energie absorbiert wird.

Wir erhalten also:

(9) $$\begin{cases} E = E_2 + E_3 = \dfrac{\pi A^2}{8\mu\omega} \\ \left\{\dfrac{2\beta}{\pi} - \alpha_0^2 - \beta_0^2 + 2\sum_1^\infty \left(\dfrac{2\beta_n}{\pi} - \alpha_n^2 + \beta_n^2\right)\right\} \end{cases}$$

und einen analogen Ausdruck für E'.

Da E bez. E' unbedingt positiv oder Null sein müssen, folgern wir aus (9), daß

(10) $$\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} < 1 \quad \text{und} \quad \sqrt{\alpha_n'^2 + \beta_n'^2} < 1$$

sind.

Andererseits sehen wir, daß tatsächlich E_2 und E_2' negativ und E_3 und E_3' positiv sind, denn E und E' sind positiv.

Für die E können wir noch andere, mehr anschaulichere Ausdrücke bilden. Zu dem Zwecke benutzen wir (13), § 2 und führen folgende Bezeichnungen ein:

(11) $$\frac{W_n}{U_n} = -\frac{1}{\frac{i\pi}{2} + \gamma_n + i\delta_n}, \qquad \frac{W_n'}{U_n'} = -\frac{1}{\frac{i\pi}{2} + \gamma_n' + i\delta_n'},$$

wo

(12) $$\gamma_n + i\delta_n = \frac{\mu x' J_n'(g x') P_n(g x) - \mu' x J_n(g x') P_n'(g x)}{\mu x' J_n'(g x') J_n(g x) - \mu' x J_n(g x') J_n'(g x)},$$

(13) $$\gamma_n' + i\delta_n' = \frac{\mu' x J_n'(g x') P_n(g x) - \mu x' J_n(g x') P_n'(g x)}{\mu' x J_n'(g x') J_n(g x) - \mu x' J_n(g x') J_n'(g x)}$$

und γ und δ reelle Größen sind.

Hieraus erhalten wir:

$$(14)\begin{cases} E_2 = -\dfrac{A^2\pi}{8\mu\omega}\left\{\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+\delta_0\right)^2+\gamma_0^2}+2\sum_1^\infty\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+\delta_n\right)^2+\gamma_n^2}\right\}, \\ E_3 = +\dfrac{A^2\pi}{8\mu\omega}\left\{\dfrac{\dfrac{2\delta_0}{\pi}+1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+\delta_0\right)^2+\gamma_0^2}+2\sum_1^\infty\dfrac{\dfrac{2\delta_n}{\pi}+1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+\delta_n\right)^2+\gamma_n^2}\right\} \\ \text{und} \\ E = E_2+E_3 = \dfrac{A^2}{4\mu\omega}\left\{\dfrac{\delta_0}{\left(\dfrac{\pi}{2}+\delta_0\right)^2+\gamma_0^2}+2\sum_1^\infty\dfrac{\delta_n}{\left(\dfrac{\pi}{2}+\delta_n\right)^2+\gamma_n^2}\right\}. \end{cases}$$

Analoge Ausdrücke erhalten wir für E', E_1' und E_3', falls wir in (14) γ_n' und δ_n' statt γ_n und δ_n einsetzen.

§ 7. Das Material des Drahtes ist ein absolutes Dielektrikum oder ein absoluter Leiter.

Ist das Material des Drahtes ein absolutes Dielektrikum, so ist $\varkappa'$ reell und laut (12) und (13) des vorigen Paragraphen folgt $\delta_n = \delta_n' = 0$, und demnach

$$(1)\qquad E_2 = -\frac{A^2\pi}{8\mu\omega}\left\{\frac{1}{\dfrac{\pi^2}{4}+\gamma_0^2}+2\sum_1^\infty\frac{1}{\dfrac{\pi^2}{4}+\gamma_n^2}\right\},$$

$$E_3 = -E_2$$

und

$$E = 0\,.$$

Entsprechende Ausdrücke erhalten wir für E', E_2' und E_3'.

Ist das Material des Drahtes ein absoluter Leiter, so ist $\varkappa' = \infty$, und wir erhalten aus (14), § 3 und (12), § 4:

$$(2)\qquad B_0 = -\frac{A\,J_0(g\varkappa)}{Q_0(g\varkappa)}\,,\qquad B_n = -\frac{2\,\iota^n A\,J_n(g\varkappa)}{Q_n(g\varkappa)}$$

und

$$(3)\qquad B_0' = -\frac{A\varkappa}{\omega\mu}\cdot\frac{J_0'(g\varkappa)}{Q_0'(g\varkappa)}\,,\qquad B_n' = -\frac{2\iota^n A\varkappa J_n'(g\varkappa)}{\omega\mu\,Q_n'(g\varkappa)}$$

und deshalb aus (11), § 6:

$$\delta_n = \delta_n' = 0$$

und

$$(4)\qquad \gamma_n = \frac{P_n(g\varkappa)}{J_n(g\varkappa)}\,,\qquad \gamma_n' = \frac{P_n'(g\varkappa)}{J_n'(g\varkappa)}$$

und

$$E = 0\,,$$

$$E_2 = -E_3\,;$$

wobei wir für E_z denselben Ausdruck (1) erhalten, nur, daß an Stelle der dortigen γ_n und γ_n' die Werte (4) treten.

Wir sehen, daß ein absoluter Leiter und ein absolutes Dielektrikum sich ganz gleich verhalten bezüglich der reflektierten und absorbierten Energien, d. h. in beiden Fällen wird keine Energie absorbiert und die zum Draht hinströmende Energie wird wieder vollständig in den Außenraum zerstreut. Der Unterschied ist nur der, daß, während beim absoluten Leiter die zum Drahte strömende Energie von der Oberfläche des letzteren sofort reflektiert wird, dringt sie beim absoluten Dielektrikum in den Draht, um von dort unvermindert zurückzukommen.

Anbei möchten wir noch einige Bemerkungen bezüglich der von J. J. Thomson „Notes on Recent Researches in Elektricity and Magnetism" gemachten Berechnung der Reflexion an einem Draht aus absolutem Leiter machen.

Auf p. 263 des genannten Werkes führt Thomson die Heinesche Funktion $K_0(x)$ ein, welche nichts anderes ist als $-P_0(x)$ *bei reellem* x.

Wie wir in § 2 gesehen haben, ist $P_0(x)$ bei $x = \infty$ endlich nur bei reellem x. J. J. Thomson gibt weiter für große x einen Grenzwert für $-P_0(x)$ an, welcher der Funktion

$$\frac{i\pi}{2} J_0(x) - Y_0(x)$$

entspricht. Diese letztere Funktion bezeichnet Heine auch durch $K_0(x)$, macht aber auf den Sprung aufmerksam, welchen $K_0(x)$ besitzt beim Übergang vom komplexen zum reellen x. Da wir aber beim Übergange zu $\sigma = 0$ bei der Lösung unseres *physikalischen* Problems keinen Sprung annehmen konnten, so stellten wir an die Spitze die Bedingung (6), § 1.

Weiter gebraucht Thomson § 361, p. 429 bei der Lösung des Problems der Reflexion im Falle eines absoluten Leiters wieder die Funktion $K_0(x) = -P_0(x)$, was unseren Ausdrücken (2) und (3) dieses Paragraphen und der Bedingung (6), § 1 widerspricht. Auf p. 430 führt Thomson die Berechnungen mit Hilfe von $P_0(x)$, gibt aber p. 431, § 364 für die Grenze bei großem x einen Wert an, welcher der Funktion $Q_0(x)$ entspricht.

Wir kommen weiter unten noch einmal darauf zurück.

Gesetzt den Fall, wir hätten für den Außenraum bei $\varkappa$ reell die Funktion $P_n(x)$ gebraucht. Wir hätten dann bei *beliebigem* $\varkappa'$ erhalten:

$$E_2 = E_2' = 0,$$

d. h. die gesamte vom Draht reflektierte Energie ist Null. Außerdem wäre für einen absoluten Leiter oder absolutes Dielektrikum

$$E_3 = E_3' = 0,$$

d. h. die gesamte zuströmende Energie wäre Null.

Dieses rechtfertigt noch einmal, außer der Bedingung (6), § 1, die Einführung der Funktion Q_n.

§ 8. Die Wellenlänge ist groß im Verhältnis zum Durchmesser des Drahtes.

Wir nehmen wie früher für den Außenraum Luft an, also

$$\sigma = 0; \quad \varepsilon = \mu = 1,$$

(1)
$$\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}$$

und λ groß gegen g.

Als Material des Drahtes wählen wir Kupfer und haben daher

(2)
$$\begin{cases} \mu' = 1 \text{ und } \sigma' = \text{ca. } 64 \,.\, 10^{-5}. \\ \text{Laut § 1} \qquad \varkappa' = a - i b, \\ a > 0, \quad b > 0, \\ a = \sqrt{\dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}, \quad b = \sqrt{\dfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}. \end{cases}$$

(3)
$$\alpha = \frac{4\pi^2 \varepsilon'}{\lambda^2}, \quad \beta = \frac{8\pi^2 c\,\sigma'}{\lambda}.$$

Dann ist

(4)
$$\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon' \,.\, \frac{1}{2\lambda c\,\sigma'}.$$

Um die Größenordnungen zu fixieren, nehmen wir z. B. an:

$\lambda = 10^3$ cm; $g = 0{,}2$ cm. Woraus folgt:

$\varkappa = 6{,}28 \,.\, 10^{-3}$; $g\varkappa = 1{,}26 \,.\, 10^{-3}$;

$\beta = 1{,}52 \,.\, 10^6$ und

$$\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon' \,.\, 2{,}6 \,.\, 10^{-11}.$$

Wir können also, auch falls die sehr unbestimmte Größe s' bedeutend sein sollte, α gegen β vernachlässigen und schreiben:

$$(5) \qquad \varkappa' = \sqrt{\frac{\beta}{2}}(1 - i) = 2\pi\sqrt{\frac{c\,\sigma'}{\lambda}}(1 - i)$$

und in Zahlen, für unser Beispiel:

$$\varkappa' = 853{,}4\,(1 - i), \quad g\,\varkappa' = 170{,}7\,(1 - i).$$

Da die Wellenlänge groß im Vergleich zum Durchmesser des Drahtes ist, so können wir die einfallende Welle, in der Umgebung des Drahtes, sehr genau darstellen durch:

$$(6) \qquad \begin{cases} Z = A\,e^{i\omega t}\{J_0(r\,\varkappa) + 2\sum_1^s \iota^n J_n(r\,\varkappa)\}, \\ \zeta = \frac{\varkappa A}{\omega}\,e^{i\omega t}\{J_0'(r\,\varkappa) + 2\sum_1^s \iota^n J_n'(r\,\varkappa)\}, \end{cases}$$

wo die Größe s dem am Schlusse des § 2 Gesagten entspricht. Infolgedessen sind alle Koeffizienten B_n, B_n' und C_n, C_n' für $n > s$ gleich Null.

Da $g\,\varkappa'$ groß ist und n bzw. s verhältnismäßig klein, so können wir statt (9), § 2 schreiben:

$$(7) \qquad \frac{J_n'(g\,\varkappa')}{J_n(g\,\varkappa')} = i.$$

Deshalb erhalten wir unter Benutzung der entsprechenden Formeln aus § 2 für kleine $x = g\,\varkappa$ für die Klammerwerte von (14), § 3 und (12), § 4:

$$(8) \qquad 1 - \frac{1}{g\,J_n(g\,\varkappa)\,Q_n(g\,\varkappa)\,F} = 1 - \frac{2\,n}{i\,\varkappa'\,g + n},$$

$$(9) \qquad 1 + \frac{1}{g\,J_n'(g\,\varkappa)\,Q_n'(g\,\varkappa)\,F_1} = 1 - \frac{4\,(n + 1)\,n}{i\,(\varkappa'\,g)^2\,n - \varkappa^2\,g^2},$$

$$0 < n \leqq s,$$

und für $n = 0$

$$(8\,\text{a}) \qquad 1 - \frac{1}{1 - i\,\varkappa'\,g\,\lg\frac{\gamma\,g\,\varkappa\,i}{2}},$$

$$(9\,\text{a}) \qquad 1 - \frac{4}{2\,g^2\,\varkappa^2\,\lg\frac{\gamma\,g\,\varkappa\,i}{2} + g^2\,\varkappa'^2}.$$

Wir können also, da die in (8), (8a), (9) und (9a) zu 1 zu addierenden Werte bei großem $\varkappa'$ sehr klein sind, statt der

Klammerwerte 1 schreiben und kommen so zu den Ausdrücken (2) und (3) § 7, d. h. unser Draht wird sich in bezug auf Reflexion wie ein absoluter Leiter verhalten.

Wir erhalten demnach für die unmittelbare Nähe des Drahtes, laut (15) § 5:

$$(10)\qquad Z' = -A e^{i\omega t}\left\{\frac{\lg\frac{\lambda}{\pi r \gamma i}}{\lg\frac{\lambda}{\pi g \gamma i}} + 2\sum_{1}^{s}\frac{i^n . g^{2n} . \pi^n}{n!\, r^n \lambda^n}\cos n\varphi\right\}.$$

Diese Reihe wird aber sehr schnell abnehmen und wir begnügen uns deshalb mit dem Gliede $n = 1$ und haben:

$$(10a)\qquad Z' = -A e^{i\omega t}\left\{\frac{\lg\frac{\lambda}{\pi r \gamma i}}{\lg\frac{\lambda}{\pi g \gamma i}} + \frac{2 i \pi g^2}{r\lambda}\cos\varphi\right\}.$$

Mit derselben Annäherung ist für die einfallende Welle:

$$(11)\qquad Z = A e^{i\omega t}\left\{1 + \frac{2 i \pi s}{\lambda}\cos n\varphi\right\},$$

und daher für die gesamte elektrische Kraft:

$$(12)\qquad Z' + Z = A e^{i\omega t}\left\{\frac{\lg\frac{r}{g}}{\lg\frac{\lambda}{\pi g \gamma i}} + \frac{2 i \pi}{r\lambda}\cdot(r^2 - g^2)\cos\varphi\right\}.$$

Für $r = g$ muß, da sich der Draht wie ein absoluter Leiter verhält, $Z + Z' = 0$ sein. Dies folgt auch aus (12).

Für sehr große r erhalten wir aus (14a), § 2:

$$Q_n = i^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$n \leqq s.$$

Mit Benutzung dieses und der Werte (15), § 5 erhalten wir den Ausdruck (16), § 5, mit nur dem Unterschiede, daß hier s statt ∞ stehen wird. Der Unterschied fällt aber sofort weg, falls wir tatsächlich zu einem absoluten Leiter übergehen und r genügend groß wählen.

Dies zeigt uns die Richtigkeit des im § 5 angewandten Näherungsverfahrens.

Indem wir auch hier mit dem Gliede $n = 1$ abbrech erhalten wir:

$$(13)\quad Z' = -\frac{iA}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{r}}\, e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right)}\left\{-\frac{1}{\lg\frac{\lambda}{\pi g \gamma r}} + \frac{4\pi^2 g^2}{\lambda^2}\cos\right.$$

Dieser letzte Ausdruck ist für uns interessant wegen d Unterschiedes zwischen unserer Lösung und derjenigen v J. J. Thomson, l. c. p. 432.

Wir gehen jetzt weiter in unserer Berechnung und halten, falls wir uns wieder mit dem Gliede $n = 1$ beschränk für unmittelbare Nähe des Drahtes:

$$(14)\qquad \Phi' = i A e^{i\omega t}\left\{\frac{g^2 \pi}{\lambda r} - i\frac{g^2}{r^2}\cos\varphi\right\}$$

und

$$(15)\qquad \Phi = i A e^{i\omega t}\left\{-\frac{\pi r}{\lambda} + i\cos\varphi\right\}.$$

Also

$$(16)\quad \Phi + \Phi' = -iAe^{i\omega t}\left\{\frac{\pi}{\lambda r}(r^2 - g^2) - \frac{i}{r^2}(r^2 - g^2)\cos\varphi\right\}.$$

Weiter wird sein

$$(17)\qquad R + R' = -Ae^{i\omega t}\left\{1 + \frac{g^2}{r^2}\right\}\sin\varphi.$$

Die gesamte elektrische Kraft Y ist:

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} Y &= (\Phi + \Phi')\cos\varphi + (R + R')\sin\varphi \\ &= -Ae^{i\omega t}\left\{1 + \frac{i\pi}{\lambda r}(r^2 - g^2)\cos\varphi - \frac{g^2}{r^2}\cos 2\varphi\right\}. \end{aligned}\right.$$

Wie wir sehen, ist auch hier $\Phi + \Phi' = 0$ für $r = g$.

Die Quadrate der Amplituden von (18) und (12) werd gleich sein den Quadraten der entsprechenden Moduln. U zwar unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnun

$$(19)\qquad |Z + Z'|^2 = A^2\left(\lg\frac{r}{g}\right)^2 \cdot \frac{1 + \dfrac{2\pi^2(r^2 - g^2)\cos\varphi}{\lambda r \lg\frac{r}{g}}}{\left(\lg\dfrac{\lambda}{\pi g \gamma}\right)^2 + \dfrac{\pi^2}{4}}$$

und

$$(20)\qquad |Y|^2 = A^2 \cdot \left\{1 - \frac{2g^2}{r^2}\cos 2\varphi\right\}.$$

Und da die Glieder, welche in (19) und (20) zu 1 addiert werden, sehr klein sind, so können wir mit genügender Annäherung schreiben:

$$(21)\qquad \frac{|Z+Z'|^2}{|Y|^2} = \left(\lg\frac{r}{g}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\lg\frac{\lambda}{\pi g \gamma}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}},$$

und, unsere Zahlenwerte eingesetzt, erhalten wir:

$$(22)\qquad \frac{|Z+Z'|^2}{|Y|^2} = \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{2,8}\right)^2$$

für $r = 5$ cm.

Das obige in Worte umgesetzt ergibt: Im zweiten Fall, d. h. die elektrische Kraft der einfallenden Welle ist senkrecht zur Achse des Drahtes, geht, wie aus (20) folgt, die Welle am Draht beinahe ungeschwächt vorbei, folglich ist in diesem Falle eine verschwindende Reflexion und ebenfalls verschwindend ist die Schirmwirkung des Drahtes.

Ganz anders liegen die Verhältnisse im ersten Falle, wo also die elektrische Kraft der einfallenden Welle parallel zur Achse des Drahtes ist. Hier haben wir starke Reflexion und Schirmwirkung und die gesamte elektrische Kraft wird geschwächt, und zwar bei unserem Beispiel um 2,8 mal.

Wir gehen jetzt zur Berechnung der im Drahte absorbierten Energie über.

Zu dem Zwecke kehren wir zum § 6 zurück. Bei der Ausrechnung der Energie werden wir uns mit den ersten Gliedern, d. h. mit den Größen γ_0, δ_0, γ_0' und δ_0' begnügen.

Wir erhalten nach einigen Vereinfachungen:

$$(23)\left\{\begin{aligned} \gamma_0 &= -\lg\frac{\lambda}{\pi g \gamma} - \frac{1}{4\pi g\sqrt{\frac{c\sigma'}{\lambda}}}, & \delta_0 &= \frac{1}{4\pi g\sqrt{\frac{c\sigma'}{\lambda}}},\\ \gamma_0' &= +\frac{1}{2\pi g\sqrt{\frac{\sigma' c}{\lambda}}}\cdot\lg\frac{\lambda}{\gamma g \pi} - \frac{\lambda^2}{2\pi^2 g^2}, & \delta_0' &= \frac{1}{2\pi g\sqrt{\frac{\sigma' c}{\lambda}}}\cdot\lg\frac{\lambda}{\gamma g \pi}. \end{aligned}\right.$$

Daraus folgt:

$$(24)\qquad E = \frac{A^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{c}\right)^{3/2}}{32\,.\,\pi^2 g\sqrt{\sigma'}} \cdot \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} + \left(\lg\frac{\lambda}{\pi g \gamma}\right)^2}$$

und

(25) $$E' = \frac{A^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{c}\right)^{3/2}}{4 \cdot \sqrt{\sigma'}} \cdot \frac{\pi^2 g^2 \lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma}}{\lambda^4}.$$

Bei dieser Berechnung ist angenommen:

$$\gamma_0 = -\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma} \quad \text{und} \quad \gamma_0' = -\frac{\lambda^2}{2\pi^2 g^2}$$

und in (25) ist $(\pi/2 + \delta_0')^2$ vor $\gamma_0'^2$ vernachlässigt worden. Aus (24) und (25) erhalten wir:

(26) $$\frac{E}{E'} = \frac{\lambda^4}{8\pi^4 g^4 \cdot \lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4} + \left(\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma}\right)^2\right)}.$$

Wir sehen also aus diesem Ausdruck, daß das Verhältnis E/E' sehr groß ist, so daß also im zweiten Falle verschwindend wenig absorbiert wird im Verhältnis zum ersten Falle.

Rekapitulieren wir das Vorhergehende, so müssen wir schließen, daß im ersten Falle viel reflektiert und viel absorbiert wird und im zweiten wenig reflektiert und wenig absorbiert wird.

§ 9. Zusammenfassung.

Wir setzten an die Spitze unserer Arbeit die Bedingung (6), § 1 und sahen, daß wir nur dadurch ein richtiges Resultat erhalten konnten, indem wir die Hankelsche Zylinderfunktion für die Lösung benutzten.

Die §§ 3 und 4 geben uns die allgemeinen Lösungen, von welchen man zu beliebigen Spezialfällen übergehen kann.

In § 5 führten wir ein von dem Verfasser gefundenes allgemeines Integral der Maxwellschen Gleichungen an, welches, auf den Fall 1 angewendet, uns zur Lösung des § 3 führt. Durch eine Annäherung erhalten wir eine Lösung (16), § 5 für große r, deren Richtigkeit durch direkte Ableitung in § 8 gezeigt wird. Das Integral (18), § 5 bietet auch ein gewisses Interesse.

In § 6 wird die im Drahte absorbierte Energie berechnet, ebenso die *zum* und *vom* Drahte strömende. Die Rechnung wird ganz allgemein geführt bei der Voraussetzung, daß das den Draht umgebende Medium ein Dielektrikum ist.

In § 7 werden zwei Spezialfälle in Betracht gezogen: 1. der Draht ist ein absoluter Leiter; 2. der Draht ist ein

absolutes Dielektrikum. Es werden die Energien und die Koeffizienten B_n und B_n' berechnet. Weiter wird auf die Abweichung unserer Lösung von derjenigen von J. J. Thomson hingewiesen. Außerdem wird noch einmal die Einführung der Hankelschen Funktion bez. der Bedingung (6), § 1 als erforderlich gezeigt.

In § 8 wird die Berechnung für eine im Verhältnis zum Drahtdurchmesser große Wellenlänge ausgeführt, und zwar für einen Draht aus Kupfer. Dabei zeigt sicht, daß die Konstanten des Materials des Drahtes praktisch herausspringen, d. h. der Draht verhält sich in bezug auf Reflexion wie ein absoluter Leiter. Da er aber doch keiner ist, so muß er Energie absorbieren, obwohl sehr wenig. Diese Energie wird berechnet und es zeigt sich, daß das Verhältnis der absorbierten Energien bei den Fällen 1 und 2 sehr groß ist. Außerdem wird auf die Schirmwirkung hingewiesen und das am Schlusse des § 8 ausgesprochene Resultat ist auch sehr charakteristisch.

Wie leicht aus § 8 zu ersehen ist, berechnet sich die Wellenlänge λ_1 im Drahte für Fall 1 zu:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\Re(\varkappa')} = \sqrt{\frac{\lambda}{c\,\sigma'}} \tag{1}$$

und wenn wir die Zahlenwerte unseres Beispiels einsetzen:

$$\lambda_1 = 0{,}0072 \text{ cm}.$$

Aus (1) folgt weiter:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{\lambda\,c\,\sigma'}}\,. \tag{2}$$

Laut § 2 und § 3 erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned} Z'' = -\,&\frac{i\,A\,.\,e^{i\,\omega\,t}}{\varkappa'\sqrt{g\,r}}\,.\,e^{-i\varkappa'(g-r)} \\ &\left\{\frac{1}{\lg\frac{\lambda}{\pi\,g\,i\,\gamma}} + 4\sum_1^s \frac{i^n n\,.\,\pi^n\,.\,g^n}{n!\,\lambda^n}\,.\cos n\,\varphi\right\}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

welche Reihe sehr schnell abfällt und so lange gilt, bis man noch $\varkappa' r$ groß annehmen kann.

Der Abstand d von der Oberfläche, auf welchen sich die Amplitude um den e^{ten} Teil vermindert hat, ist:

$$d = g - r_1 = \frac{1}{\text{imag. Teil von } \varkappa'} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{\sigma' c}} = \frac{\lambda_1}{2\pi} \tag{4}$$

und bei unseren Zahlenwerten:

$$d = 0{,}023 \text{ mm}.$$

Einer Verminderung um den a^{ten} Teil entspricht ein Abstand d_1:

$$(5) \qquad d_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{Log}. a}{0{,}434};$$

z. B. ist bei $a = 100$; $d_1 = 0{,}11$ mm $(0{,}434 = \operatorname{Log} e)$.

Für $r = 0$ folgt aus § 3:

$$(6) \qquad \underset{r=0}{Z'} = - \frac{i A}{\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma i}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{g x'}} \cdot e^{i \omega t} \cdot e^{-i x' g}.$$

Demnach folgt aus (3), falls wir uns mit dem ersten Gliede begnügen:

$$(7) \qquad \frac{\underset{r=0}{Z''}}{\underset{r=g}{Z''}} = \sqrt{2\pi g x'} \cdot e^{-i x' g},$$

d. h. dies Verhältnis wird eine verschwindend kleine Größe sein.

St. Petersburg, Juli 1905.

(Eingegangen 25. Juli 1905.)

Anmerkung. Ich möchte zu der Arbeit von W. Seitz (Ann. d. Phys. **16**. p. 747. 1905), welche mir leider erst nach Absendung des Manuskripts in die Hände gekommen ist und welche dasselbe Thema behandelt, folgendes bemerken.

Auf p. 751 (XII) gebraucht Seitz für den Außenraum als Lösung die Funktion:

$$K_n(p) = - P_n(p).$$

Laut meiner Arbeit müßte auch hier, d. h. bei reellem p, die von mir gebrauchte modifizierte Hankelsche Funktion:

$$Q_n(p) = \frac{i\pi}{2} J_n(p) - K_n(p).$$

benutzt werden.

Es folgt daraus mit anderen Worten, daß die Lösung von W. Seitz der Bedingung (6), § 1 meiner Arbeit widerspricht. Außerdem muß in den Klammern in (XII) und (XIII) vor der Eulerschen Konstante statt + ein − stehen. (Vgl. Anmerkung zu § 2 meiner Arbeit.)

St. Petersburg, September 1905.

5. *Die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien;* *von M. Laue.*[1])

Einleitung.

Beim Fortschreiten in einem Medium, welches Dispersion oder selektive Absorption oder beides zugleich aufweist, erleidet eine Lichtwelle stets Änderungen ihrer Form; denn die einzige Differentialgleichung, welche ein Fortschreiten ohne Deformation zuläßt, die Wellengleichung

$$a^2 \varDelta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

gilt für solche Körper nicht; sie ergibt ja weder Dispersion noch Absorption. An dem Beispiel eines die Elektrizität leitenden Mediums, für das die elektromagnetische Lichttheorie in ihrer ältesten Gestalt auf die sogenannte Telegraphengleichung

$$a^2 \varDelta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 b \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

führt, haben die Herren Poincaré[2]), Picard[3]) und Voigt[4]) diese Änderung näher untersucht; der letztere Autor hat auch darauf hingewiesen, daß sie sich im Spektrum des Lichtes bemerkbar machen muß. Der Zweck der folgenden Untersuchung soll sein, den Schluß von der Änderung der Schwingungsform auf die Änderung des Spektrums ohne Beschränkung auf eine bestimmte Differentialgleichung rechnerisch durchzuführen.

Das Verfahren, welches wir anwenden wollen, beginnt damit, daß wir die gegebene Schwingung im Ausgangspunkt

1) Der vorliegende Aufsatz führt ein Thema weiter aus, welches schon in zwei Arbeiten desselben Titels in den Göttinger Nachrichten (1904. p. 480 und 1905. p. 117) behandelt wurde.

2) H. Poincaré, Compt. rend. 117. p. 1027. 1893.

3) E. Picard, Compt. rend. 118. p. 16. 1894.

4) W. Voigt, Wied. Ann. 68. p. 598. 1899 und Ann. d. Phys. 4. p. 203. 1901.

durch ein Fourier sches Integral als Übereinanderlagerung reiner Sinusschwingungen darstellen. Da das Experiment lehrt, daß für alle optischen Erscheinungen das Superpositionsprinzip gilt, müssen wir annehmen, daß alle Differentialgleichungen, welche in der Optik eine Rolle zu spielen berufen sind, linear sein werden; dann aber läßt sich zu ihrer Lösung die Methode der Summation der Partikularlösungen anwenden, also jede der Sinusschwingungen, in welche wir die Anfangserregung aufgelöst haben, so behandeln, wie wenn sie allein vorhanden wäre. Durch Summation über alle Sinusschwingungen erhalten wir die gesuchte Lösung. Machen wir über die Abhängigkeit des Brechungsindex n_ν und des Absorptionskoeffizienten $\varkappa_\nu$ von der Schwingungszahl ν keine speziellen Annahmen, so bleibt uns noch immer die Möglichkeit offen, auf eine bestimmte Klasse von Körpern, d. h. auf eine bestimmte Differentialgleichung zu spezialisieren. Einer Voraussetzung allgemeiner Art bedürfen wir freilich: n_ν und $\varkappa_\nu$ sollen *langsam* veränderliche Funktionen von ν sein; die Erläuterung dieses Begriffes wird zeigen, daß diese Einschränkung keinen für die Physik in Betracht kommenden Fall ausschließt.

Der Hauptvorteil des anzuwendenden Verfahrens liegt aber darin, daß wir mit Hilfe der von Hrn. Planck[1]) angegebenen Formeln von dem Integral, welches die Schwingungsform darstellt, unmittelbar zu einer Integraldarstellung für die Intensität der Schwingung als Funktion der Zeit und für ihre Verteilung über das Spektrum gelangen. Wir übernehmen, um den Anschluß an diese Formeln zu erleichtern, auch die von Hrn. Planck eingeführten Bezeichnungen. Aber insofern verändern wir die Gleichungen, als wir an die Stelle der dort auftretenden trigonometrischen Funktionen die Exponentialfunktion mit imaginärem Argument setzen; dadurch wird das Rechnen mit ihnen wesentlich kürzer und übersichtlicher; durch Fortlassen des imaginären Teiles erhält man sie in ihrer ursprünglichen Gestalt wieder. Außerdem fügen wir die das Wesen der Sache nicht beeinflussenden Faktoren hinzu, welche bei einer Kugelwelle die Abnahme der Amplitude und

---

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 69. 1900. Das Zeichen l. c. in den folgenden Anmerkungen verweist stets auf diese Arbeit.

Intensität mit wachsender Entfernung von der Lichtquelle angeben.

Im letzten Abschnitt, im § 7, werden wir noch auf das Verhalten der Strahlung bei der Reflexion und Brechung an der Grenze dispergierender und absorbierender Medien, sowie bei der spektroskopischen Zerlegung eingehen. Die drei Probleme sind einander so ähnlich, daß sich die bei der Untersuchung über die Fortpflanzung erhaltenen Resultate fast mühelos übertragen lassen.

§ 1. Die Fortpflanzung einer Kugelwelle.

Wir legen eine linear polarisierte Kugelwelle der Betrachtung zugrunde. Ihre elektrische Feldstärke im Punkt P geben wir durch das der Formel (5) der zitierten Arbeit[1]) entsprechende Integral

$$(1) \qquad Z(t) = \frac{1}{r}\int\limits_{0}^{\infty} d\nu\, C_\nu\, e^{i(2\pi\nu t - \vartheta_\nu)};$$

r soll der Abstand des Punktes P von der Lichtquelle sein. Setzt man hier

$$(2) \qquad C_\nu\, e^{i\vartheta_\nu} = 2r\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Z(\tau)\, e^{2\pi i\nu\tau}\, d\tau$$

ein, so geht (1) in die Fouriersche Integraldarstellung über.

Hat die Welle nun in einem Medium vom Brechungsindex n_ν und Absorptionskoeffizienten $\varkappa_\nu$[2]) die Strecke x zurückgelegt, so ist ihre elektrische Feldstärke an diesem Orte gegeben durch die Gleichung:

$$(3) \qquad Z'(t) = \frac{1}{r+x}\int\limits_{0}^{\infty} d\nu\, e^{-\varkappa_\nu x}\, C_\nu e^{i\left[2\pi\nu\left(t - \frac{n_\nu x}{v}\right) - \vartheta_\nu\right]}.$$

1) l. c. p. 78.

2) Die Gleichungen werden einfacher, wenn wir im Gegensatz zu der sonst viel gebrauchten Definition die Bedeutung von $\varkappa_\nu$ dahin festsetzen, daß die Amplitude der Sinusschwingung pro Längeneinheit auf das $e^{-\varkappa_\nu}$-fache sinkt.

Bringen wir dies Integral auf die Form

$$(3a)\qquad Z'(t) = \frac{1}{r+x}\int_0^\infty d\nu\, C'_\nu\, e^{i(2\pi\nu t - \vartheta'_\nu)}$$

und setzen wir zur Abkürzung

$$(4)\qquad a_\nu = e^{-\varkappa_\nu + \frac{2\pi i}{v} n_\nu \nu},$$

so muß

$$(3b)\qquad C'_\nu e^{i\vartheta'_\nu} = a_\nu^x\, C_\nu e^{i\vartheta_\nu}$$

sein.

Wir fragen nun nach der Intensität der Strahlung von der Schwingungszahl ν_0 zur Zeit t, $J_0(t)$. Hr. Planck definiert sie als proportional zur Energie eines von der Strahlung getroffenen Resonators von der Schwingungszahl ν_0, dessen Dämpfungsdekrement

$$(5)\qquad \varrho \text{ klein gegen } 1$$

ist, aber doch noch so groß, daß die Zeit des Abklingens einer einmaligen Erregung unmeßbar klein ist. Die erstere Bedingung bezweckt, den Bereich der Schwingungszahlen, auf welche der Resonator merklich anspricht, schmal zu machen; denn seine Breite ist von der Größenordnung von $\varrho\nu_0$, hier also klein gegen ν_0; die letztere Bestimmung bewirkt, daß der Resonator eine *gleichzeitige* Eigenschaft der Strahlung anzeigt. Daß ϱ beiden Bedingungen genügen kann, liegt daran, daß die Zeit einer Intensitätsmessung stets außerordentlich viele Perioden von Lichtschwingungen umfaßt. Auf diesem Wege leitet Hr. Planck die Formel ab[1])

$$(6)\qquad \begin{cases} J_0(t) = \dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int d\mu\,(\mathfrak{B}^0_\mu - i\,\mathfrak{A}^0_\mu)\, e^{2\pi i\mu t}, \\ \mathfrak{B}^0_\mu - i\,\mathfrak{A}^0_\mu = \dfrac{2}{\varrho\nu_0}\displaystyle\int_0 d\nu \sin^2\delta_\nu\, C_\nu\, C_{\nu+\mu}\, e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}, \end{cases}$$

wobei[2])

$$(6a)\qquad \sin^2\delta_\nu = \frac{1}{1+\pi^2\left(\dfrac{\nu_0^2-\nu^2}{\varrho\,\nu_0\,\nu}\right)^2}.$$

1) l. c. Gleichung (19) p. 88.
2) l. c. Gleichung (18) p. 87.

Der Faktor $\sin^2 \delta_\nu$, welcher klein wird wie ϱ^2, wenn die Differenz $(\nu - \nu_0)$ die Größenordnung von $\varrho \nu_0$ überschreitet, hebt in (6) den Bereich von Schwingungszahlen hervor, auf welche der Resonator anspricht. Da

$$\frac{2}{\varrho \nu_0} \int d\nu \sin^2 \delta_\nu = 1$$

ist, ist $\mathfrak{B}_\mu^0 - i \mathfrak{A}_\mu^0$ der Mittelwert von $C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}$, gebildet über den hervorgehobenen Bereich.[1])

Dies galt für den Punkt P; im Abstand x von ihm, im Punkt P', gilt die entsprechende Gleichung:

$$(7)\begin{cases} J_0'(t) = \dfrac{1}{(r+x)^2} \displaystyle\int d\mu (\mathfrak{B}_\mu^{0\prime} - i \mathfrak{A}_\mu^{0\prime}) e^{2\pi i \mu t}, \\ \mathfrak{B}_\mu^{0\prime} - i \mathfrak{A}_\mu^{0\prime} = \dfrac{2}{\varrho \nu_0} \displaystyle\int d\nu \sin^2 \delta_\nu C_\nu' C_{\nu+\mu}' e^{i(\vartheta_\nu' - \vartheta_{\nu+\mu}')}, \\ \qquad = \dfrac{2}{\varrho \nu_0} \displaystyle\int d\nu \sin^2 \delta_\nu a_\nu^x \bar{a}_{\nu+\mu}^x C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})} \end{cases}$$

(vgl. (3b)), wenn $\bar{a}_\nu$ die zu a_ν konjugiert komplexe Größe, d. h.

$$(4a) \qquad \bar{a}_\nu = e^{-\varkappa_\nu - \frac{2\pi i}{v} n_\nu \nu}$$

ist.

Den hier angegebenen Formeln müssen wir nun noch einige Erläuterungen hinzufügen. Die Erfahrung zeigt, daß man für die Zwecke der Optik weder das Verhalten der Körper zu langsamen elektrischen Schwingungen, noch zu so schnellen Schwingungen, wie es nach der Stokes-Wiechertschen Hypothese die Röntgenstrahlen sind, zu kennen braucht. Soll daher Licht- und Wärmestrahlung durch die Integraldarstellung in (1) gegeben sein, so muß die Funktion C_ν einen derartigen Verlauf zeigen, daß solche Werte der Schwingungszahl ν in ihr den Ausschlag geben, wie sie bei Licht- und Wärmestrahlen auftreten. Trotzdem können die anderen Werte von ν nicht ganz fehlen, wenn (1) eine Schwingung darstellen soll, welche in bestimmten Zeitpunkten anfängt und aufhört, und nicht nur nach $t = \pm \infty$ allmählich abklingt. In diesem Fall ist nämlich der Integrationsbereich in (2) endlich, und da $Z(\tau) e^{2\pi i \nu \tau}$ *analytische* Funktion von ν ist, so gilt dann das-

1) l. c. § 9.

selbe von $C_\nu e^{i\vartheta_\nu}$; und aus der Funktionentheorie ist bekannt, daß eine analytische Funktion, welche nicht für alle Werte der Variabelen identisch Null ist, in keinem noch so kleinen Bereich verschwinden kann.

Von ganz anderer Größenordnung sind die in (6) ausschlaggebenden Werte von μ. Es liegt im Begriff der Schwingungsintensität als des über die Zeit einer Messung gebildeten Mittelwertes von $Z^2(t)$, daß sie in meßbarer Weise, also (im Vergleich zu $Z(t)$) *langsam* mit der Zeit variieren muß; nur unter der Voraussetzung, daß ein solcher Mittelwert existiert, ist Gleichung (6) abgeleitet.[1]) Deshalb muß jedem in Betracht kommenden Wert der Funktion $\mathfrak{B}_\mu^0 - i\,\mathfrak{A}_\mu^0$ ein solcher Wert von μ entsprechen, daß $1/\mu$ von der Größenordnung der Zeit einer Intensitätsmessung (wir sagen kürzer, eine meßbare Zeit) ist. Da nun die Relationszeit $1/\varrho\,\nu_0$ der erwähnten Resonatoren unmeßbar klein sein soll, so muß

(8) $$\varrho\,\nu \text{ groß gegen } \mu$$

sein.

Aber auch wenn die Voraussetzung zutrifft, daß ein langsam veränderlicher Mittelwert von $Z^2(t)$ existiert, ist die Existenz dessen, was wir ein Spektrum zu nennen gewohnt sind, noch nicht gesichert; dazu gehört noch, daß die Verteilung der Energie auf die verschiedenen Schwingungszahlen etwas Objektives, von den speziellen Eigentümlichkeiten des Meßinstrumentes Unabhängiges ist. Nun hängt nach (6) $\mathfrak{B}_\mu^0 - i\,\mathfrak{A}_\mu^0$, der Mittelwert von $C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}$ in der Umgebung von ν_0, im allgemeinen sicher von ϱ ab, welches außer in dem Faktor $2/\varrho\,\nu_0$ noch in $\sin^2\delta_\nu$ auftritt; und dasselbe gilt natürlich auch von $J_0(t)$. Daß man trotzdem aller Erfahrung zufolge von einem Spektrum reden kann, erklärt Hr. Planck durch die Hypothese, daß *bei allen vorkommenden Strahlungsvorgängen* die Phasen ϑ_ν der Sinusschwingungen mit ν so schnell und unregelmäßig variieren, daß das Resultat dieser Mittelwertbildung unabhängig von der Breite des zugrunde gelegten Intervalles, d. h. von ϱ ist, wenn ϱ sich in den durch (5) und (8) vorgeschriebenen Grenzen hält. Diese Annahme bildet nebst der Voraussetzung der Existenz eines langsam veränderlichen

1) l. c. § 4 und 5.

Mittelwertes von $Z^2(t)$ einen Bestandteil der Hypothese der natürlichen Strahlung.

Wir ziehen hieraus einen für das Folgende wichtigen Schluß: *Bei monochromatischer, natürlicher Strahlung hat der in Betracht kommende Integrationsbereich in der Integraldarstellung (1) eine Breite von der Größenordnung* $\varrho\nu$. In der Tat, ist er wesentlich schmaler, und ist ν_0 ein in ihm gelegener Wert, so kann man in (6) bei der Integration nach ν $\sin^2\delta_\nu = 1$ setzen und findet $\mathfrak{B}_\mu^0 - i\mathfrak{A}_\mu^0$ umgekehrt proportional zu ϱ; ist er aber wesentlich breiter, so hat offenbar die Intensität $J_\nu(t)$ auch solcher Schwingungszahlen noch merkliche Werte, deren Unterschiede von ν_0 gegen $\varrho\nu_0$ groß sind, die Strahlung ist dann nicht mehr monochromatisch. Nun nähert sich die durch das Integral

$$Z_0(t) = \int_{\nu_0-\varepsilon}^{\nu_0+\varepsilon} d\nu\, C_\nu\, e^{i(2\pi\nu t - \vartheta_\nu)}$$

definierte Funktion von t mit abnehmendem ε immer mehr einer trigonometrischen Funktion von der Periode $1/\nu_0$.[1] *Bedingung (8) gibt also an, wie weit sich die Wellenform bei natürlicher Strahlung einer Sinusschwingung nähern darf.*

§ 2. Das elementare Strahlenbündel.

Eine Lichtwelle, wie sie von einem einzelnen schwingenden Elektron ausgesandt wird, läßt sich nie isolieren, und gelänge es, so würde sie sich ihrer geringen Intensität wegen der Wahrnehmung entziehen. In der Strahlungstheorie spielen nur Strahlenbündel eine Rolle, d. h. vierfach unendliche Scharen von Strahlen, welche alle Punkte einer Fläche s_1 mit allen Punkten einer Fläche s_2 verbinden. Die Wellen eines

1) Denn durch Reihenentwickelung findet man

$$Z_0(t) = e^{2\pi i\nu_0 t}\left[\int_{\nu_0-\varepsilon}^{\nu_0+\varepsilon} d\nu\, C_\nu\, e^{-i\vartheta_\nu} + \sum_{1}^{\infty} {}_m \frac{(2\pi i t)^m}{m!}\int_{\nu_0-\varepsilon}^{\nu_0+\varepsilon} d\nu\,(\nu-\nu_0)^m\, C_\nu\, e^{-i\vartheta_\nu}\right]$$

das erste dieser Integrale ist klein wie ε, während die anderen des Faktors $(\nu-\nu_0)^m$ wegen, der keiner als ε^m im Integrationsbereich ist, abnehmen wie die höheren Potenzen von ε. Für endliche Werte von t wird also schließlich das erste Integral überwiegen.

solchen Bündels sind nun voneinander unabhängig; ihre Intensitäten addieren sich also, und man kann in der Optik fast stets die Betrachtung zunächst auf die einzelne Welle beschränken [1]), da diese Addition hinterher keine Schwierigkeiten bietet. Bei der vorliegenden Untersuchung liegt die Sache anders: Im § 4 wollen wir den Nachweis führen, daß natürliche Strahlung bei der Fortpflanzung über hinreichend große Strecken in einem dispergierenden und absorbierenden Körper die von der Hypothese der natürlichen Strahlung geforderte Ungeordnetheit einbüßt, und daß infolgedessen das Entropieprinzip seine Gültigkeit verliert. Wollten wir hier von dem Zusammenwirken vieler unabhängiger Wellen absehen, so träfe uns der Einwand, daß die Schwingung in einem Strahlenbündel vielleicht in höherem Maße ungeordnet ist, als in einer einzelnen Welle, und daß daher der zweite Hauptsatz der Thermodynamik für das erstere möglicherweise auch dann noch gilt, wenn die letztere die dazu erforderliche Ungeordnetheit nicht mehr besitzt. [2])

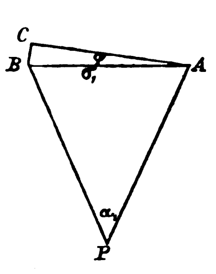
Der nächstliegende Versuch, Strahlenbündel der Untersuchung zugänglich zu machen, liegt in der Frage, ob nicht unter gewissen Bedingungen auch ein Strahlenbündel genähert als einzelne Welle betrachtet werden kann. In der Tat lassen sich Gründe dafür angeben. Es sei s_1 ein ebenes Flächenstück, durch welches Strahlung zum Aufpunkt P gelangt, der sich im Abstand r von s_1 befinden soll; s_1 sei senkrecht auf r; über seine Gestalt machen wir nur die Annahme, daß seine Dimensionen nach allen Richtungen in der Größenordnung übereinstimmen; sehr lang gestreckte Formen schließen wir also aus. Die Strahlung, welche durch s_1 nach P gelangt, läßt sich als Superposition ebener Wellen auffassen, deren Normalenrichtungen in dem Kegel liegen, welcher s_1 zur Basis und P zur Spitze hat.[3]) In der Figur sei AC ein Stück Wellenebene einer der in Betracht kommenden Wellen, BC liege in der

1) Eine Ausnahme gibt W. Voigt, Phys. Zeitschr. 6. p. 672. 1905.

2) In meiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand (Götting. Nachr. 1904. p. 480) beschränkte ich mich auf die Betrachtung der einzelnen Welle. Hr. Planck hatte die Liebenswürdigkeit, mich brieflich auf diesen Einwand hinzuweisen.

3) G. J. Stoney, Phil. Mag. (5) 42. p. 332. 1896; 43. p. 273 u. 368. 1897; Th. Preston, Phil. Mag. (5) 43. p. 281. 1897.

Richtung ihrer Normalen; beide Strecken mögen so gewählt sein, daß P in der durch sie bestimmten Ebene liegt (denn nur dann geht das Stück AC beim weiteren Fortschreiten der Welle einmal über P hinweg), und daß A und B Punkte des Randes von s_1 sind; $\sigma_1 = AB$ ist dann ein Querschnitt von s_1, mit α_1 bezeichnen wir den Winkel, unter welchem σ_1 von P aus gesehen wird. Da die Normale von P auf AC zwischen PA und PB liegen muß, wenn die Welle zu den in Betracht kommenden gehören soll, muß



$$\sphericalangle BAC = \varphi < \alpha/2$$

sein. Nun nehmen wir an, α_1 sei so klein, daß man $\cos\alpha_1$ mit 1 vertauschen kann; Bedingung dafür ist, daß

(9a) α_1^2 klein gegen 1.

Dann kann man den Lichtvektor der betrachteten Welle annähernd als senkrecht zu r betrachten, auch in dem ungünstigsten Fall, daß er in der Zeichenebene liegt. Ist ferner $BC = \sigma_1\varphi$ klein gegen eine Lichtwellenlänge λ, und ist keine Absorption zu berücksichtigen, so variiert der Lichtvektor längs der Strecke BC so wenig, daß man seinen Wert in B dem gleichzeitigen Wert in C, d. h. auch dem in A annähernd gleich setzen kann. Ist

(9b) $\sigma_1\alpha_1$ klein gegen eine Lichtwellenlänge λ,

so gilt Entsprechendes für alle in Betracht kommenden Wellen, und die Schwingung in A und B, und ebenso in allen anderen Punkten von s_1 verläuft — soweit sie für die Strahlung nach P in Betracht kommt — isochron; es ist so, wie wenn nur eine Welle von s_1 nach P ginge. Liegt Absorption vor, so ist hierzu freilich noch erforderlich, daß längs BC die Welle nicht merklich absorbiert wird, d. h. daß

(9c) $\varkappa_\nu\sigma_1\alpha_1$ klein gegen 1

ist. Bei allen nicht gerade metallisch absorbierenden Substanzen ist diese Bedingung in (9b) mit enthalten.

Genau dieselbe geometrische Betrachtung zeigt auch, daß die Stücke ebener Wellen, welche durch s_1 hindurchtreten, nachdem sie über den Punkt P hinweggestrichen sind, auf s_1 annähernd

einen solchen Schwingungszustand hervorrufen, wie wenn nur eine Welle von P_1 nach s_1 ginge. Legen wir nun durch P eine mit s_1 in der Größenordnung übereinstimmende Fläche s_2 senkrecht zu r, so gilt dasselbe für einen Punkt der Fläche s_1 und die Fläche s_2. Die Schwingung auf der ganzen Fläche s_2 wird also dieselbe sein wie in P, so daß das Strahlenbündel, welches durch s_1 und s_2 bestimmt ist, als einzelne Welle betrachtet werden darf.

Die Bedingungen (9) gestalten wir noch etwas um. Da

$$\lambda = \frac{v}{n_\nu \nu},$$

und n_ν in der Größenordnung von 1 nicht verschieden ist, können wir in (9b) λ durch v/ν ersetzen. Ferner gilt wegen (9a)

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_1}{r};$$

endlich ist nach unserer Voraussetzung, daß die Gestalt von s_1 keine abnorm lang gestreckte sein soll, s_1 von der Größenordnung σ_1^2. Benutzen wir dies, um α_1 und σ_1 aus den drei Bedingungen zu eliminieren, so finden wir den Satz: Ein Strahlenbündel läßt sich als einzelne Welle betrachten, wenn für zwei seiner senkrechten Querschnitte s_1 und s_2, deren Abstand r ist, die Bedingungen gelten.

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{s_1}{v\,r} \text{ und } \dfrac{s_2}{v\,r} \text{ klein gegen die Lichtperiode } \dfrac{1}{\nu}. \\ \dfrac{s_1}{r^2} \text{ und } \dfrac{s_2}{r^2} \text{ klein gegen } 1. \\ \varkappa_\nu \dfrac{s_1}{r} \text{ und } \varkappa_\nu \dfrac{s_2}{r} \text{ klein gegen } 1. \end{cases}$$

Hiernach könnte es zunächst scheinen, als ob man in der Tat auch beim vorliegenden Problem die Betrachtung auf die einzelne Welle beschränken könnte. Aber es erhebt sich noch die Frage, ob ein solches Strahlenbündel noch genug Energie mit sich führt, um für sich allein wahrgenommen zu werden. Sehen wir von Absorption ab (was offenbar der günstigste Fall ist), so ist die Strahlung durch s_1 und s_2 gegeben durch den Ansatz

$$K \frac{s_1 s_2}{r^2},$$

wo K allein von der Temperatur der Strahlung auf s_1 abhängt. Nach der ersten der Bedingungen (10) ist dieser Ausdruck klein gegen $\pi K \lambda^2$; ist die Temperatur der Strahlung für alle Schwingungszahlen die gleiche, so ist dies die Energie, welche der schwarze Körper in der Zeiteinheit durch ein quadratisches Flächenstück emittiert, dessen Seite eine Lichtwellenlänge ist. *Strahlenbündel von so geringer Öffnung, daß der Schwingungsvorgang in ihnen als einzelne Welle angesehen werden kann, sind also nur oberhalb einer gewiß recht hoch liegenden Mindesttemperatur wahrnehmbar.*

Wir müssen also über die Bedingungen (10) hinausgehen. Einen Hinweis auf die Art, wie dies zu geschehen hat, erhalten wir durch die Bemerkung, daß der Elementarvorgang in der Strahlungstheorie der Energietransport von einer Fläche s_1 zu einer anderen s_2 ist, solange zur Berechnung der durch Strahlung von der Schwingungszahl ν in der Zeit dt übertragenen Energie (vorausgesetzt, daß s_1 und s_2 wie bisher auf ihrer Entfernung r voneinander senkrecht sind) der Ansatz

(11) $$K_\nu \frac{s_1 s_2}{r^2} d\nu\, dt$$

ausreicht. *Wir definieren ein „elementares" Strahlenbündel durch die Forderung, daß zur Berechnung der von ihm mitgeführten Energie der Ansatz (11) genügen soll.* Wie lauten nun die Bedingungen dafür?

Verschieben wir s_1 in seiner Ebene, bis sich die Richtung $s_1 s_2$ um den Winkel φ gedreht hat, so tritt zu (11) der Faktor $\cos^4 \varphi$; denn erstens ist die Entfernung $s_1 s_2$ jetzt $r/\cos\varphi$; zweitens aber bildet sie mit der Normalen von s_1 und s_2 den Winkel φ, so daß in (11) $s_1 \cos\varphi$ und $s_2 \cos\varphi$ an die Stelle von s_1 und s_2 treten. Soll für die ursprüngliche Lage von s_1 der Ansatz (11) gelten, so muß auch für den äußersten Rand von s_1 jener Faktor mit 1 vertauschbar sein; und da dasselbe für s_2 gilt, muß

(12a) α_1^2 und α_2^2 klein gegen 1

sein.

Absorbiert das Medium zwischen s_1 und s_2, so ist K_ν eine nach dem Exponentialgesetz

$$K_\nu = e^{-2\varkappa_\nu r} K_\nu^{(0)}$$

abnehmende Funktion von r. Nun unterscheiden sich die Lichtwege, welche von einem Punkt auf s_1 zu verschiedenen Punkten von s_2 führen, um Strecken, die höchstens von der Größenordnung von

$$r\left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha_1}{2}} - 1\right) = \frac{1}{8} r \alpha_1^2 = \frac{1}{8} \sigma_1 \alpha_1$$

sind. Wären diese Unterschiede an der Absorption nachweisbar, so reichte der Ansatz (11) nicht aus; es käme dann u. a. nicht nur auf die Größe, sondern auch auf die Gestalt von s_1 an, insofern eine längliche Fläche bei gleichem Inhalt weniger strahlte, als eine kreisförmige. Also muß

(12b) $\varkappa_\nu \sigma_1 \alpha_1$ und $\varkappa_\nu \sigma_2 \alpha_2$ klein gegen 1

sein.

Handelt es sich um zeitlich variabele Vorgänge, so kommt noch eine andere Abhängigkeit des K_ν von r hinzu; da sich die Strahlung mit endlicher Geschwindigkeit (u_ν) ausbreitet, muß

$$K_\nu(t) = e^{-2\varkappa_\nu r} K_\nu^{(0)}\left(t - \frac{r}{u_\nu}\right)$$

sein. Wären nun die Zeiten, in denen die Strahlung Strecken wie $\sigma_1 \alpha_1$ und $\sigma_2 \alpha_2$ durchläuft, meßbar, so wäre (11) wiederum nicht ausreichend; denn bei plötzlichem Verlöschen der Strahlung von s_1 z. B. träte auf s_2 ein allmähliches, je nach der Entfernung r verschieden rasches Abklingen ein. Deswegen muß

(12c) $\frac{\sigma_1 \alpha_1}{v}$ und $\frac{\sigma_2 \alpha_2}{v}$ klein gegen die meßbare Zeit $\frac{1}{\mu}$

sein. Wir haben hier an die Stelle von u_ν die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, v, setzen dürfen, weil zwischen ihnen kein Unterschied in der Größenordnung besteht.

Gestaltet man die Bedingungen (12) so um, daß von den Bestimmungsstücken des Strahlenbündels nur s_1, s_2 und r auftreten, so findet man: *Die Bedingungen*

(13) $$\begin{cases} \frac{s_1}{v\,r} \textit{ und } \frac{s_2}{v\,r} \textit{ klein gegen die meßbare Zeit } \frac{1}{\mu}, \\ \frac{s_1}{r^2} \textit{ und } \frac{s_2}{r^2} \textit{ klein gegen } 1, \\ \varkappa_\nu \frac{s_1}{r} \textit{ und } \varkappa_\nu \frac{s_2}{r} \textit{ klein gegen } 1, \end{cases}$$

sind notwendig dafür, daß das Strahlenbündel ein elementares ist. Vergleicht man (13) mit (10), so sieht man, daß beide Systeme von Bedingungen übereinstimmen, nur ist in der ersten Zeile die meßbare Zeit $1/\mu$ in (13) an die Stelle getreten, welche in (10) die Lichtperiode $1/\nu$ einnahm. (13) engt also viel weniger ein, als (10), und da es gerade die erste Zeile von (10) war, welche uns oben die Beschränkung auf hohe Temperaturen aufnötigte, so fällt diese Beschränkung sicher fort, wenn wir im folgenden das elementare Strahlenbündel zugrunde legen.

Die Fläche s_1 teilen wir nun in Stücke, für deren jedes (10) erfüllt sein soll. Eins davon zeichnen wir durch die Ordnungszahl p aus. Die Richtung von ihm zu dem auf der Normalen von s_1 im Abstand r gelegenen Punkt P bilde mit der Normalen den Winkel φ_p. Von diesem Flächenstück rührt in P eine zu r senkrechte Feldstärke $Z^{(p)}$ her, welche bei Fortlassung eines Cosinusfaktors, die durch (12a) gerechtfertigt wird, als Funktion von r durch die Gleichung

$$(14) \quad Z^{(p)} = \frac{1}{r} \int d\nu\, e^{-\frac{\varkappa_\nu r}{\cos\varphi_p}} C_\nu^{(p)} e^{i\left[2\pi\nu\left(t - \frac{r n_\nu}{v \cos\varphi_p}\right) - \vartheta_\nu^{(p)}\right]}$$

gegeben ist. Nach (12b) können wir hier den Faktor $1/\cos\varphi_p$ in der Verbindung mit $\varkappa_\nu r$ mit 1 vertauschen. In dem Produkt $r n_\nu \nu / v \cos\varphi_p$ wäre dies aber nur dann zulässig, wenn wir für s_1 nicht nur (12c), sondern auch (9a) als gültig ansehen wollten.

Aus allen diesen Partialbewegungen resultiert die Feldstärke

$$Z = \sum_p Z^{(p)}.$$

Da die $Z^{(p)}$ voneinander völlig unabhängig sind, ist der Mittelwert Z^2 für die Zeit einer Messung

$$\overline{Z^2} = \sum_p \overline{Z^{(p)2}};$$

denn die doppelten Produkte $Z^{(p)} Z^{(q)}$ verschwinden sowohl, wenn man die Summe über alle p und q bildet, als auch einzeln bei der Mittelwertbildung nach der Zeit. Aus ähnlichen Gründen äußern auch die Fehler ε_p, welche wir beim Ansetzen der nur genähert richtigen Gleichung (14) gemacht haben,

keinen Einfluß trotz ihrer großen Zahl, welche ja mit der Zahl der Stücke, in die wir s_1 teilten, übereinstimmt. Denn $\sum \overline{\varepsilon_p^2}$ ist zu vernachlässigen, die Produkte $\varepsilon_p Z^{(q)}$ fallen aus denselben Gründen fort wie $Z^{(p)} Z^{(q)}$; und auch die Produkte $\varepsilon_p Z^{(p)}$ können ebensowohl positiv als negativ sein, so daß $\sum_p \varepsilon_p Z^{(p)}$ verschwindend klein ist. Die Gesamtintensitäten addieren sich also; und dies gilt natürlich ebenso für die Intensitäten der Strahlung von der Schwingungszahl ν_0; demnach gilt im Punkt P in Analogie zu Gleichung (6):

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} J_0(t) &= \frac{1}{r^2} \int d\mu (\mathfrak{B}_\mu^0 - i\mathfrak{A}_\mu^0) e^{2\pi i \mu t}, \\ \mathfrak{B}_\mu^0 - i\mathfrak{A}_\mu^0 &= \frac{2}{\varrho \nu_0} \int d\nu \sin^2 \delta_\nu C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}, \end{aligned} \right.$$

wenn wir unter Aufhebung der früheren Bedeutung von C_ν und ϑ_ν die *Definition* geben:

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} & C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})} = e^{-(\varkappa_\nu + \varkappa_{\nu+\mu}) r} \\ & \times \sum_p C_\nu^{(p)} C_{\nu+\mu}^{(p)} e^{i\left[\vartheta_\nu^{(p)} - \vartheta_{\nu+\mu}^{(p)} + \frac{2\pi r}{v \cos\varphi_p}\left(n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu)\right)\right]}. \end{aligned} \right.$$

Daß hierbei ϑ_ν nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, bringt keinen Nachteil mit sich; C_ν ist eindeutig bestimmt, wenn man bedenkt, daß es stets positiv sein soll.

Nun machen wir von der Annahme Gebrauch, daß der Brechungsindex n_ν eine *langsam* veränderliche Funktion der Schwingungszahl ν ist. Nach den Erörterungen des ersten Paragraphen liegt monochromatische natürliche Strahlung von der Schwingungszahl ν_0 vor, wenn in der Gleichung (1) die Amplitude C_ν nur solcher Partialschwingungen einen in Betracht kommenden Wert hat, deren Schwingungszahlen sich von ν_0 höchstens um Differenzen von der Ordnung $\varrho \nu_0$ unterscheiden. Eine langsam veränderliche Funktion $f(\nu)$ soll sich nun — dahin präzisieren wir unsere Annahme — in einem Bereich von dieser Größe nicht erheblich ändern; denn sonst können wir ihren Wert für eine bestimmte Schwingungszahl niemals empirisch feststellen. Aus demselben Grunde sollen die kleinen Schwankungen, welche sie in diesem Bereich erfährt, nicht irgend ein kompliziertes Gesetz befolgen, das

unseren Messungen doch unzugänglich wäre, sondern es sollen wenige Glieder der Taylorschen Entwickelung von ν_0 aus sie (in dem genannten Intervall) befriedigend darstellen. Offenbar ist ν selbst eine solche Funktion; gilt dasselbe von n_ν, so gilt es auch für das Produkt $n_\nu \nu$. Dann ist aber, da nach (8) μ klein gegen die Größe dieses Intervalles ist,

$$n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu + \mu) = -\mu\left(\frac{d(n_\nu \nu)}{d\nu}\right) - \frac{\mu^2}{2}\frac{d^2(n_\nu \nu)}{d\nu^2} - \ldots$$

höchstens von der Größenordnung von μ; denn es ist

$$\varrho \nu \frac{d(n_\nu \nu)}{d\nu} + \ldots \text{ klein gegen } n_\nu \nu,$$

mithin

$$\frac{d(n_\nu \nu)}{d\nu} + \tfrac{1}{2}\varrho \nu \frac{d^2(n_\nu \nu)}{d\nu^2} + \ldots$$

von der Ordnung n_ν oder 1. Nach (12c) können wir deshalb in (16) $\cos\varphi_p$ mit 1 vertauschen und finden so:

$$(17)\quad C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})} = a_\nu^r a_{\nu+\mu}^r \sum_p C_\nu^{(p)} C_{\nu+\mu}^{(p)} e^{i\left(\vartheta_\nu^{(p)} - \vartheta_{\nu+\mu}^{(p)}\right)},$$

wo a_ν und $\mathfrak{a}_\nu$ dieselbe Bedeutung haben, wie im ersten Paragraphen (Gleichung (4) und (4a)). Da $\cos\varphi_p$ in (17) nicht mehr auftritt, hat diese Gleichung dieselbe Form, wie wenn alle Wellen, welche durch s_1 nach P gelangen, genau parallel zu r wären, d. h. wie wenn nur eine solche Welle existierte.

Jetzt übertragen wir das schon oben angewandte Schlußverfahren, indem wir hieraus folgern, daß auch, wenn über P ebene Wellen hinwegstreichen, welche bei ihrer weiteren Fortpflanzung durch s_1 hindurchtreten, diese auf allen Teilen von s_1 das gleiche Spektrum hervorrufen, ganz wie wenn nur eine Welle vorhanden wäre. Überträgt man dies auf das Verhältnis eines Punktes der Fläche s_1 zur Fläche s_2, so sieht man, daß in allen Punkten der letzteren dasselbe Spektrum herrschen muß wie in P, daß also die Gleichungen (15) und (17) überall auf s_2 gelten. Der Energietransport von s_1 nach s_2 findet also gerade so statt, wie wenn er durch eine einzige Welle vermittelt würde. Da hieraus die Gültigkeit des Ansatzes (11) folgt, schließen wir: *Die Bedingungen (13) sind nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend dafür, daß das Strahlenbündel ein elementares ist.*

Verschieben wir s_2 in Richtung der Fortpflanzung des Strahlenbündels, bis der Abstand $s_1 s_2$ gleich $r + x$ ist, so gilt in Analogie zu (14) und (17)

$$(18a)\quad \left\{ \begin{aligned} J_0'(t) &= \frac{1}{(r+x)^2} \int d\mu (\mathfrak{B}_\mu^{0'} - i\,\mathfrak{A}_\mu^{0'}) e^{2\pi i \mu t}, \\ \mathfrak{B}_\mu^{0'} - i\,\mathfrak{A}_\mu^{0'} &= \frac{2}{\varrho \nu_0} \int d\nu \sin^2 \delta_\nu\, C_\nu' C_{\nu+\mu}' e^{i(\vartheta_\nu' - \vartheta_{\nu+\mu}')}, \end{aligned} \right.$$

wenn

$$C_\nu' C_{\nu+\mu}' e^{i(\vartheta_\nu' - \vartheta_{\nu+\mu}')} = a_\nu^{r+x} \bar{a}_{\nu+\mu}^{r+x} \sum\nolimits_p C_\nu^p C_{\nu+\mu}^{(p)} e^{i(\vartheta_\nu^{(p)} - \vartheta_{\nu+\mu}^{(p)})},$$

also nach (17)

$$(18b)\quad C_\nu' C_{\nu+\mu}' e^{i(\vartheta_\nu' - \vartheta_{\nu+\mu}')} = a_\nu^x \bar{a}_{\nu+\mu}^x C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}$$

ist. Durch diese Substitution geht aber (18a) genau in (7) über. ***Für das Fortschreiten der Intensität der Strahlung im elementaren Strahlenbündel gelten dieselben Gleichungen, wie für die einzelne Welle.*** Nur stehen die Funktionen C_ν und ϑ_ν jetzt nicht mehr in demselben unmittelbaren Zusammenhang zur Schwingungsform, wie im ersten Paragraphen; denn die Funktionen Γ_ν und τ_ν, welche die Integraldarstellung (1) für den Lichtvektor liefern, ergeben sich aus der Gleichung (14) und aus $Z = \sum_p Z^{(p)}$ so, daß

$$\Gamma_\nu e^{i \tau_\nu} = e^{-\varkappa_\nu r} \sum\nolimits_p C_\nu^{(p)} e^{\frac{2\pi i r}{c \cos \varphi_p} n_\nu \nu + i \vartheta_\nu^{(p)}}$$

wird, und haben mit C_ν und ϑ_ν nichts gemein, als die das Spektrum bestimmenden Mittelwerte $\mathfrak{B}_\mu^0 - i\,\mathfrak{A}_\mu^0$.

§ 3. Diskussion der Gleichungen (6) und (7) für kleine Werte von x.

Nach (6a) ist, wie schon erwähnt, $\sin^2 \delta_\nu$ von der Größenordnung ϱ^2, wenn $(\nu - \nu_0)$ groß gegen $\varrho \nu_0$ ist; darauf beruht es, daß in der Gleichung (6) nur die Umgebung ν_0 in Betracht kommt. Für die Gleichung (7) ist dies aber nicht mehr selbstverständlich, denn nach (4) und (4a) enthält der Faktor $a_\nu^x \bar{a}_{\nu+\mu}^x$ die Funktion $e^{-(\varkappa_\nu + \varkappa_{\nu+\mu})x}$ und kann bei selektiver Absorption und hinreichend großen Werten von x das anfängliche Übergewicht der Umgebung von ν_0 aufheben. Diesen Fall schließen wir zunächst von der Untersuchung aus. Die mathematische Formulierung der Bedingung, welche dies bezweckt, lautet, da man wegen (5) und (8) $\varkappa_{\nu+\mu}$ mit $\varkappa_\nu$ bei dieser Ab-

schätzung vertauschen kann: Es soll $\sin^2 \delta_\nu e^{-2\varkappa_\nu x}$ klein gegen $e^{-2\varkappa_0 x}$ sein, wenn $\nu - \nu_0$ groß gegen $\varrho \nu_0$ wird; oder da man dann $\sin^2 \delta_\nu$ durch ϱ^2 ersetzen kann,

(19a) $\varrho^2 e^{-2\varkappa_\nu x}$ klein gegen $e^{-2\varkappa_0 x}$, wenn $\nu - \nu_0$ groß gegen $\varrho\nu_0$.

Dabei verstehen wir unter $\varkappa_0$ den Wert von $\varkappa_\nu$ für $\nu = \nu_0$, wie wir überhaupt alle auf ν_0 bezüglichen Werte von Funktionen der Schwingungszahl mit diesem Index versehen wollen.

Nun sind nach unserer Annahme $n_\nu \nu$ und $\varkappa_\nu$ langsam veränderliche Funktionen. Ist x nicht zu groß, so überträgt sich diese Eigenschaft auf die Funktion

$$a_\nu^x \bar{a}_{\nu+\mu}^x = e^{-\left[\varkappa_\nu + \varkappa_{\nu+\mu} + \frac{2\pi i}{v}\left(n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu)\right)\right] x},$$

so daß wir diese in (7) bei der Integration nach ν Bedingung (19a) zufolge als konstant betrachten können. Um zu sehen, was wir dabei vernachlässigen, entwickeln wir die Funktionen

$$\varkappa_\nu + \varkappa_{\nu+\mu} \quad \text{und} \quad (n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu))$$

der beiden Variabelen ν und μ vom Wertepaar $\nu = \nu_0$, $\mu = 0$ aus in die Taylorsche Reihe; diese Entwickelungen lauten:

$$\begin{aligned}\varkappa_\nu + \varkappa_{\nu+\mu} = 2\varkappa_0 &+ 2(\nu-\nu_0)\left(\frac{d\varkappa_\nu}{d\nu}\right)_0 + (\nu-\nu_0)^2\left(\frac{d^2\varkappa_\nu}{d\nu^2}\right)_0 + \dots \\ &+ \mu\left(\frac{d\varkappa_\nu}{d\nu}\right)_0 \qquad + (\nu-\nu_0)\mu\left(\frac{d^2\varkappa_\nu}{d\nu^2}\right)_0 + \dots \\ &\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\mu^2\left(\frac{d^2\varkappa_\nu}{d\nu^2}\right)_0 \qquad + \dots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu) = \\ -\mu\left(\frac{d(n_\nu\nu)}{d\nu}\right)_0 - (\nu-\nu_0)\mu\left(\frac{d^2(n_\nu\nu)}{d\nu^2}\right)_0 - \tfrac{1}{2}(\nu-\nu_0)^2\mu\left(\frac{d^3(n_\nu\nu)}{d\nu^3}\right)_0 - \dots \\ -\tfrac{1}{2}\mu^2\left(\frac{d^2(n_\nu\nu)}{d\nu^2}\right)_0 \qquad - \tfrac{1}{2}(\nu-\nu_0)\mu^2\left(\frac{d^3(n_\nu\nu)}{d\nu^3}\right)_0 - \dots \\ - \frac{1}{2.3}\mu^3\left(\frac{d^3(n_\nu\nu)}{d\nu^3}\right)_0 \qquad - \dots \\ - \dots\end{aligned}$$

Betrachten wir also $a_\nu^x \bar{a}_{\nu+\mu}^x$ als konstant, so muß, da der Integrationsbereich die Breite $\varrho\nu_0$ hat, sowohl

(19b) $x\left[\varrho\nu_0\left(\frac{d\varkappa_\nu}{d\nu}\right)_0 + \frac{1}{2}(\varrho\nu_0)^2\left(\frac{d^2\varkappa_\nu}{d\nu^2}\right)_0 + \dots\right]$ klein gegen 1,

als auch

(19c) $\frac{\mu x}{v}\left[\varrho\, v_0 \left(\frac{d^2 (n_\nu \nu)}{d \nu^2}\right)_0 + \frac{1}{2} (\varrho\, v_0)^2 \left(\frac{d^3 (n_\nu \nu)}{d \nu^3}\right)_0 + \ldots\right]$ klein gegen 1

sein. Diese Bedingungen sind aber auch hinreichend, weil jedes Glied der m^{ten} Zeile in einer der beiden Reihen nach (8) klein gegen das über ihm stehende der $(m-1)^{\text{ten}}$ ist, und weil daraus nach unseren Annahmen über die langsam veränderlichen Funktionen $n_\nu\, \nu$ und $\varkappa_\nu$ dasselbe für das Verhältnis der m^{ten} zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Zeile folgt. Sind (19b) und (19c) erfüllt, so hat man also von beiden Reihen nur die ersten Glieder $2\varkappa_0$ und $-\mu\, (d (n_\nu \nu) / d \nu)_0$ beizubehalten. Nach Einführung dieser Vereinfachungen in (7) geht aus dem Vergleich von (6) und (7) hervor:

$$\mathfrak{B}_\mu^{0\prime} - i\,\mathfrak{A}_\mu^{0\prime} = e^{-2x\left[\varkappa_0 + \frac{\pi i \mu}{v}\left(\frac{d (n_\nu \nu)}{d \nu}\right)_0\right]} (\mathfrak{B}_\mu^0 - i\,\mathfrak{A}_\mu^0),$$

also

(20) $$J_0'(t) = e^{-2\varkappa_0 x} J_0\left(t - \frac{x}{v}\left(\frac{d (n_\nu \nu)}{d \nu}\right)_0\right).$$

Dies bedeutet:

Solange die Bedingungen (19a), (19b) und (19c) erfüllt sind, pflanzt sich die Intensität der Strahlung von der Schwingungszahl v mit Gruppengeschwindigkeit

(21) $$u_\nu = \frac{v}{\frac{d (n_\nu \nu)}{d \nu}} = \frac{v}{n_\nu + \nu \frac{d n_\nu}{d \nu}}$$

fort. Die Schwächung durch Absorption ist dieselbe wie bei einer Sinuswelle. Änderungen des Spektrums beim Fortschreiten treten nur auf, insofern sie durch die Veränderlichkeit von u_ν und $\varkappa_\nu$ mit v bedingt sind.[1])

1) Hr. H. Wanner (Wied. Ann. 68. p. 143. 1899) hat beobachtet, daß die *D*-Linien sich verbreitern, ja daß selbst ein schwaches kontinuierliches Spektrum entsteht, wenn man das Licht einer Natriumflamme durch wiederholte Spiegelungen immer wieder durch sie hindurch leitet. Hr. W. Voigt (Wied. Ann. 68. p. 604. 1899) führt als eine mögliche Ursache dieser Erscheinung die Änderung der Schwingungsform an. Genügt die in diesem Abschnitt erzielte Annäherung zur Diskussion dieses Experimentes — und wir werden im folgenden Paragraphen schwerwiegende Gründe für diese Annahme finden —, so fällt diese Erklärung fort. Doch erwächst uns hieraus keine Schwierigkeit, da die andere von Hrn. Voigt angegebene Ursache vollkommen ausreicht.

Für die Gruppengeschwindigkeit findet man meist den Wert

$$u_\nu = \frac{d(q\,w)}{d\,q} \tag{21a}$$

angegeben, wo w die Phasengeschwindigkeit und $2\pi/q$ die Wellenlänge ist. Da in unserer Bezeichnungsweise die erstere durch v/n_ν, die letztere durch $v/n_\nu \nu$ ausgedrückt ist, ist

$$q\,w = 2\pi\nu,$$

und in Übereinstimmung mit (21)

$$u_\nu = 2\pi\frac{d\nu}{d\,q} = \frac{v}{\frac{d(n_\nu\nu)}{d\nu}}.$$

Bevor wir in der Diskussion der Gleichungen (6) und (7) fortfahren, ziehen wir aus den Erörterungen dieses Paragraphen noch den Schluß, daß natürliche Strahlung ihre Ungeordnetheit nicht verliert, solange die drei Bedingungen (19) erfüllt sind. Denn die Hypothese der natürlichen Strahlung, bezogen auf Strahlung von der Schwingungszahl ν_0, beruht ja auf dem Verhalten der schnell veränderlichen Funktion

$$C_\nu\,C_{\nu+\mu}\,e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}$$

in der durch den Faktor $\sin^2\delta_\nu$ hervorgehobenen Umgebung von ν_0. Bedingung (19a) hat nun zur Folge, daß in (7) das Übergewicht dieses Bereiches gewahrt ist, und daß, solange die Funktion $a_\nu^x\,\bar{a}_{\nu+\mu}^x$ in ihm als konstant betrachtet werden kann, die mit

$$C_\nu\,C_{\nu+\mu}\,e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}$$

durch (18b) verbundene Funktion

$$C_\nu'\,C_{\nu+\mu}'\,e^{i(\vartheta_\nu' - \vartheta_{\nu+\mu}')}$$

in ihm dasselbe Verhalten zeigt, wie jene, ist unmittelbar einleuchtend. Ebenso beweist Gleichung (17), daß wenn alle Funktionen

$$C_\nu^{(p)}\,C_{\nu+\mu}^{(p)}\,e^{i\left(\vartheta_\nu^{(p)} - \vartheta_{\nu+\mu}^{(p)}\right)}$$

sich dieser Hypothese fügen, dasselbe von

$$C_\nu\,C_{\nu+\mu}\,e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}$$

gilt, vorausgesetzt, daß r die drei Bedingungen (19) erfüllt. Dies wollen wir auch im folgenden stets annehmen.

§ 4. Diskussion der Gleichungen (6) und (7) für größere Werte von x.

Lassen wir x immer weiter wachsen, so kommen wir einmal an eine Grenze, an welcher eine der Bedingungen (19) aufhört gültig zu sein; dann wird auch das Resultat des vorhergehenden Paragraphen, die Gleichung (20), hinfällig.

Wir nehmen zunächst einmal an, daß es eine der Bedingungen (19b) und (19c) ist, die zuerst ihre Gültigkeit verliert. Wir können dann die Funktion $a_\nu^x\, \bar{a}_{\nu+\mu}^x$ bei der Auswertung von $\mathfrak{B}_\mu^{0\prime} - i\,\mathfrak{A}_\mu^{0\prime}$ nicht mehr als konstant ansehen, obwohl der in Betracht kommende Integrationsbereich noch derselbe ist wie in (6); über den Zusammenhang dieses Ausdruckes mit $\mathfrak{B}_\mu^0 - i\,\mathfrak{A}_\mu^0$ läßt sich erst dann etwas Bestimmtes aussagen, wenn wir die Funktion

$$C_\nu\, C_{\nu+\mu}\, e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}$$

selbst kennen. Diese kennen wir aber nie, alle spektralanalytischen Hilfsmittel geben nur $J_0(t)$, d. h. $\mathfrak{B}_\mu^0 - i\,\mathfrak{A}_\mu^0$; das Problem ist also zunächst unbestimmt.

Die Schwierigkeit, vor welcher wir hier stehen, ist offenbar das vollkommene Analogon zu der, durch welche Hr. Planck zur Hypothese der natürlichen Strahlung geführt wurde. Für die Energie eines Resonators von der Schwingungszahl ν_0 unter dem Einfluß einer Strahlung, deren elektrische Feldstärke durch das Integral (1) gegeben ist, gilt nämlich, wenn sein Dämpfungsdekrement σ im Gegensatz zu ϱ so klein ist, daß $\sigma\,\nu_0$ nicht mehr groß gegen μ ist (vgl. (8)),

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} U_0(t) &= \int d\mu\,(b_\mu - i\,a_\mu)\, e^{2\pi i \mu t} \\ b_\mu - i\,a_\mu &= \frac{1}{r^2}\cdot\frac{3\,r^3}{16\,\pi^2\,\sigma\,\nu_0^3} \\ &\quad\times \int d\nu \sin\gamma_\nu \sin\gamma_{\nu+\mu}\, C_\nu\, C_{\nu+\mu}\, e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu} + \gamma_\nu - \gamma_{\nu+\mu})}, \end{aligned}\right.$$

wobei

$$\operatorname{cotg}\gamma_\nu = 2\pi\,\frac{\nu_0 - \nu}{\sigma\,\nu_0}.\ [1]$$

Um $U_0(t)$ zu finden, bedarf es zunächst auch der Kenntnis der Funktion

$$C_\nu\, C_{\nu+\mu}\, e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}.$$

1) l. c. Gleichung (6) p. 79 und Gleichung (13) p. 84.

Hr. Planck löst das Problem trotzdem dadurch, daß er vermöge der Hypothese der natürlichen Strahlung diese unbekannte, schnell und unregelmäßig veränderliche Funktion durch ihren meßbaren Mittelwert $\mathfrak{B}_\mu^0 - i\,\mathfrak{A}_\mu^0$ ersetzt[1]; wegen des Faktors $\sin\gamma_\nu \sin\gamma_{\nu+\mu}$ kommt es auch hier nur auf die Umgebung von ν_0 an.

Versuchen wir, auf demselben Wege zum Ziel zu gelangen. Unser Problem läßt sich formulieren: Wie verhält sich ein Resonator vom Dämpfungsdekrement ϱ mit vorgeschaltetem Farbenfilter unter dem Einfluß der Strahlung? Auch zur Beantwortung dieser Frage muß doch die Kenntnis des Spektrums ausreichen. Ersetzen wir also in (7)

$$C_\nu\, C_{\nu+\mu}\, e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}$$

durch $\mathfrak{B}_\mu^0 - i\,\mathfrak{A}_\mu^0$. Dann finden wir:

$$\mathfrak{B}_\mu^{0\prime} - i\,\mathfrak{A}_\mu^{0\prime} = (\mathfrak{B}_\mu^0 - i\,\mathfrak{A}_\mu^0)\cdot\frac{2}{\varrho\,\nu_0}\int d\,\nu \sin^2\delta_\nu\, a_\nu^z\, a_{\nu+\mu}^z\,.$$

Hier ist aber $\mathfrak{B}_\mu^{0\prime} - i\,\mathfrak{A}_\mu^{0\prime}$ noch von ϱ abhängig, das außer dem Faktor $2/\varrho\,\nu_0$ noch in $\sin^2\delta_\nu$ auftritt. Nach dem im ersten Abschnitt Gesagten widerspricht dies der Hypothese der natürlichen Strahlung, die Schwingung in P' ist nicht mehr natürliche Strahlung.

Zu demselben Schluß werden wir geführt, wenn die Bedingung (19a) für sich allein oder gleichzeitig mit (19b) oder (19c) versagt. Dann kommen für die Berechnung von $\mathfrak{B}_\mu^{0\prime} - i\,\mathfrak{A}_\mu^{0\prime}$ auch solche Werte von ν zur Geltung, für welche $\nu - \nu_0$ groß gegen $\varrho\,\nu_0$, also nach (6a)

$$\sin^2\delta_\nu = \frac{\varrho^2\,\nu^2\,\nu_0^2}{\pi^2\,(\nu^2 - \nu_0^2)^2}$$

ist; da vor dem Integralzeichen der Faktor $2/\varrho\,\nu_0$ steht, gibt es jetzt wesentliche Summanden in dem Ausdruck für $\mathfrak{B}_\mu^{0\prime} - i\,\mathfrak{A}_\mu^{0\prime}$, welche proportional zu ϱ sind; also wird dies auch hier, im Widerspruch zur Hypothese der natürlichen Strahlung, Funktion von ϱ.

Nun ist diese Hypothese aber *notwendige* Voraussetzung für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes; wir müssen also schließen:

1) l. c. § 9.

Sind die Bedingungen (19a), (19b) und (19c) nicht erfüllt, so gilt für die Strahlung nach ihrem Durchgang durch die absorbierende und dispergierende Schicht von der Dicke x der zweite Hauptsatz nicht. Könnte man sie trotz der Absorption noch nachweisen, so wäre es nicht mehr möglich, sie durch ein Spektrum zu charakterisieren; vielmehr müßte man, um ihre Wirkungen zu erklären, auf die Wellenform selbst eingehen.

Untersuchen wir auf Grund der Bedingungen (19) die Chancen, diese Grenze des zweiten Hauptsatzes zu erreichen. Ist (19a) nicht erfüllt, so haben, wie wir soeben sahen, wesentliche Summanden in $J_0(t)$ den Faktor ϱ, so daß die Strahlung dann schwerlich noch nachweisbar ist. Ist (19b) nicht mehr gültig, so ist

$$\varkappa_\nu x \left[\varrho \nu \frac{d \varkappa_\nu}{d \nu} + \frac{1}{2}(\varrho \nu)^2 \frac{d^2 \varkappa_\nu}{d \nu^2} + \ldots\right]$$

mindestens von gleicher Ordnung wie $\varkappa_\nu$; in der Klammer steht hier der Betrag, um welchen $\varkappa_\nu$ in einem Intervall von der Größe $\varrho \nu$ schwankt, nach unserer Annahme über $\varkappa_\nu$ ist er klein gegen $\varkappa_\nu$; also ist $\varkappa_\nu x$ groß gegen 1 und $e^{-2 \varkappa_\nu x}$ ein kleiner Bruch. Trifft endlich (19c) nicht mehr zu, so ist

$$x \left[\varrho \nu \frac{d^2 (n_\nu \nu)}{d \nu^2} + \frac{1}{2}(\varrho \nu)^2 \frac{d^3 (n_\nu \nu)}{d \nu^3} + \ldots\right]$$

mindestens von derselben Ordnung wie v/μ. Hier ist die Klammer wegen der langsamen Veränderlichkeit von $d(n_\nu \nu)/d\nu$ klein gegen

$$\frac{d(n_\nu \nu)}{d \nu} = n_\nu + \nu \frac{d n_\nu}{d \nu};$$

aus dem entsprechenden Grunde ist $\varrho \nu (d n_\nu / d \nu)$ klein gegen n_ν, $\nu (d n_\nu / d \nu)$ also jedenfalls nicht groß gegen n_ν, und da dies sich von 1 in der Größenordnung nicht unterscheidet, ist die Klammer klein gegen 1, x also groß gegen v/μ. $1/\mu$ soll die Zeit einer Messung sein, nehmen wir es (was sicher nicht zu groß ist) zu 10^{-6} sec an, so folgt, da $v = 3 \cdot 10^{10}$ cm sec^{-1} ist, x groß gegen $3 \cdot 10^4$ cm. Aber dies gibt natürlich nur eine untere Grenze, welche bei so schwach absorbierenden und dispergierenden Körpern, wie es z. B. die durchsichtigen Gase sind, weit überschritten werden müßte, wenn man an die Gültigkeitsgrenze des zweiten Hauptsatzes gelangen wollte.

§ 5. Die Änderung der Schwingungsform durch die Dispersion.

Die Ergebnisse der beiden letzten Abschnitte lassen sich zu dem Satze zusammenfassen: Die Intensität natürlicher Strahlung pflanzt sich mit Gruppengeschwindigkeit fort und wird so absorbiert, wie eine Sinuswelle von derselben Schwingungszahl. Hiermit dürfte alles, was an dem Problem der Fortpflanzung für die Optik von Interesse ist, gesagt sein; und wenn wir dennoch auf die Änderung der Schwingungsform durch die Dispersion eingehen wollen, so geschieht dies, um auf einem von den bisherigen Betrachtungen unabhängigen Wege anschaulich zu machen, wie dabei die Gültigkeit des Entropieprinzipes in Frage kommt.

Dabei ist zunächst zu beachten, daß der Satz von der Gruppengeschwindigkeit in der hier ausgesprochenen energetischen Form nur für ungeordnete Wellenvorgänge gilt. Im allgemeinen läßt sich die Energie der Welle nicht über ein Spektrum verteilen, man kann nicht von der Intensität der Strahlung einer bestimmten Schwingungszahl, also auch nicht von ihrer Geschwindigkeit sprechen; auf elastische Schwingungen, Wellen an der Oberfläche von Flüssigkeiten, Hertzsche Schwingungen etc. läßt sich die bisherige Betrachtung nicht übertragen. Dagegen gilt die folgende Untersuchung der Schwingungsform, bei welcher wir keine Annahme über die Ungeordnetheit des Vorganges brauchen, ebensogut wie für Lichtwellen für alle Schwingungen, bei welchen die Phasengeschwindigkeit einer Sinuswelle Funktion der Schwingungszahl ist. Wir legen natürlich von jetzt an nicht mehr das Strahlenbündel, sondern die einzelne Welle zugrunde, so daß die Funktionen C_ν und ϑ_ν wieder die ursprüngliche Bedeutung erhalten wie im ersten Paragraphen; nur lassen wir die jetzt bedeutungslosen Faktoren $1/r$ und $1/r+x$ in (1), (3) und (3a) fort, sprechen also stets von ebenen Wellen.

Wir zerlegen das in (1) auftretende Integral in eine (unendliche) Summe von Teilintegralen, bei denen allen der Integrationsbereich gleiche Breite 2ε hat; eins davon sei

$$Z_0(t) = \int_{\nu_0-\varepsilon}^{\nu_0+\varepsilon} d\nu\, C_\nu\, e^{i(2\pi\nu t - \vartheta_\nu)}. \tag{23}$$

Wir fragen, wie sich der hierdurch dargestellte Schwingungsvorgang fortpflanzt.

Da wir, um die Wirkung der Dispersion allein zu studieren, von Absorption absehen wollen, gilt nach (3) im Abstand x vom Ausgangspunkt:

$$(24) \qquad Z_0'(t) = \int_{\nu_0 - \varepsilon}^{\nu_0 + \varepsilon} d\nu\, C_\nu\, e^{i\left[2\pi\nu\left(t - \frac{x n_\nu}{v}\right) - \vartheta_\nu\right]}.$$

Ist nun

$$(25) \qquad \frac{x}{v}\left[\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2(n_\nu \nu)}{d\nu^2} + \frac{\varepsilon^3}{2.3}\frac{d^3(n_\nu \nu)}{d\nu^3} + \ldots\right] \text{ klein gegen } 1,$$

so können wir in (24)

$$n_\nu \nu = n_0 \nu_0 + (\nu - \nu_0)\left(\frac{d(n_\nu \nu)}{d\nu}\right)_0$$

setzen und erhalten so

$$Z_0'(t) = e^{\frac{2\pi i}{v} x \nu_0^2 \left(\frac{d n_\nu}{d\nu}\right)_0} \int_{\nu_0 - \varepsilon}^{\nu_0 + \varepsilon} d\nu\, C_\nu\, e^{i\left[2\pi\nu\left(t - \frac{x}{v}\left(\frac{d(n_\nu \nu)}{d\nu}\right)_0\right) - \vartheta_\nu\right]};$$

gehen wir zu dem reellen Teil dieses komplexen Ausdruckes über, so finden wir unter Benutzung von (21)

$$Z_0'(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{v} x \nu_0^2 \left(\frac{d n_\nu}{d\nu}\right)_0\right) \int_{\nu_0 - \varepsilon}^{\nu_0 + \varepsilon} d\nu\, C_\nu \cos\left[2\pi\nu\left(t - \frac{x}{u_0}\right) - \vartheta_\nu\right]$$

$$- \sin\left(\frac{2\pi}{v} x \nu_0^2 \left(\frac{d n_\nu}{d\nu}\right)_0\right) \int_{\nu_0 - \varepsilon}^{\nu_0 + \varepsilon} d\nu\, C_\nu \sin\left[2\pi\nu\left(t - \frac{x}{u_0}\right) - \vartheta_\nu\right].$$

Jedes der hier auftretenden Integrale stellt eine Welle vor, die mit der Gruppengeschwindigkeit u_0 ohne Deformation fortschreitet; diese überlagern sich, aber je nach dem Ort überwiegt bald die eine, bald die andere. Die Änderung der Schwingungsform bei dem durch (23) und (24) dargestellten Vorgang verläuft also *periodisch*; an zwei Orten, welche den Abstand

$$\frac{v}{\nu_0^2 \left(\frac{d n_\nu}{d\nu}\right)_0}$$

haben, ist sie die gleiche; nur treten entsprechende Zustände

um so viel Zeit nacheinander in ihnen auf, wie wenn sich jeder Zustand mit Gruppengeschwindigkeit fortpflanzte.[1])

Im ersten Abschnitt sahen wir, daß der durch (23) dargestellte Wellenzug von $-\infty$ bis $+\infty$ reicht. Da aber seine Amplitude nach $-\infty$ und $+\infty$ immer kleiner wird, kann man ihm trotzdem eine endliche Länge zuschreiben, wenn auch die Definition dieser Größe einer gewissen Willkür unterliegt. Jedenfalls aber nimmt seine Länge bei der Fortpflanzung nicht dauernd zu oder ab; denn in Punkten, welche den genannten Abstand haben, ist die Dauer der Erregung die gleiche. Das Gebiet der durch (23) dargestellten Störung schreitet also mit Gruppengeschwindigkeit fort. Ist diese nun Funktion der Schwingungszahl, und liegt anfangs eine Störung $Z(t)$ vor, welche wir als Superposition vieler nach Art von $Z_0(t)$ definierter Teilstörungen $Z_\nu(t)$ auffassen können, so werden die ursprünglich übereinander gelagerten Gebiete dieser Teilstörungen beim Fortschreiten allmählich voneinander getrennt.

Aber dies gilt nur so lange wie die Bedingung (25). Ist x für diese zu groß geworden, so bleibt zur mathematischen Beschreibung des Vorganges nichts übrig, als die fortschreitende Auflösung der Anfangserregung $Z(t)$ durch Verkleinerung des Integrationsintervalles der Teilintegrale $Z_\nu(t)$ auch analytisch zum Ausdruck zu bringen. Nun nähert sich aber (vgl. § 1) $Z_\nu(t)$ mit abnehmendem ε mehr und mehr einer Sinusschwingung von der Periode $1/\nu$. Daraus folgt: *Bei der Fortpflanzung in einem Medium, welches Dispersion der Gruppengeschwindigkeit aufweist, wird jede Störung schließlich in einen langen Zug genäherter Sinuswellen aufgelöst, in welchem sich Schwingungszahl und Amplitude nur langsam ändern.* Natürliche Strahlung verliert auf diese Weise die ihr eigentümliche Ungeordnetheit, und es wird auch anschaulich, weshalb das im zweiten Abschnitt besprochene Zusammenwirken vieler Strahlen daran nichts ändert: Bedingung (12c) bewirkt, daß auf allen Strahlen Sinusschwingungen von nahezu gleicher Periode in P gleichzeitig eintreffen. Natürlich nimmt mit zunehmender Länge des Wellenzuges die Größe der Amplituden ab, so daß — auch

1) Dies Resultat wurde auf nur wenig anderem Wege von Hrn. A. Schuster (Boltzmann-Festschrift p. 569. 1904) abgeleitet.

abgesehen von aller Absorption — die Strahlung immer schwerer wahrzunehmen wird.

Wie schon des öfteren erwähnt, umfaßt bei monochromatischer natürlicher Strahlung der Integrationsbereich in (1) ein Intervall von der Breite $\varrho\,\nu$. Solange

$$\frac{x}{v}\left(\frac{1}{2}(\varrho\,\nu)^2\frac{d^2(n_\nu\,\nu)}{d\,\nu^2}+\frac{1}{2.3}(\varrho\,\nu)^3\frac{d^3(n_\nu\,\nu)}{d\,\nu^3}+\ldots\right)\text{ klein gegen } 1$$

ist, erfährt eine derartige Schwingung nach (25) keine Zersetzung, sondern nur die besprochene periodische Veränderung ihrer Form. Vergleicht man diese Bedingung mit (19c), so sieht man, daß dort an Stelle des einen Faktors $\varrho\,\nu$ das nach (8) wesentlich kleinere μ steht, daß (19c) also die viel weitere Bedingung ist. *Auch bei monochromatischer natürlicher Strahlung beginnt die Auflösung der Wellenform schon innerhalb der durch (19c) gesteckten Grenze; erst wenn sie soweit vorgeschritten ist, daß Schwingungen, deren Schwingungszahl um $\varrho\,\nu$ differieren, meßbare Zeit nacheinander eintreffen, ist diese Grenze für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes erreicht.* In der Tat ist der Zeitunterschied im Eintreffen zweier solcher Wellengruppen nach (21)

$$x\left(\frac{1}{u_{(1+\varrho)\nu}}-\frac{1}{u_\nu}\right)=\frac{x}{v}\left[\left(\frac{d\,(n_\nu\,\nu)}{d\,\nu}\right)_{(1+\varrho)\nu}-\left(\frac{d\,(n_\nu\,\nu)}{d\,\nu}\right)_\nu\right]$$

$$=\frac{x}{v}\left[\varrho\,\nu\,\frac{d^2(n_\nu\,\nu)}{d\,\nu^2}+\frac{1}{2}(\varrho\,\nu)^2\frac{d^3(n_\nu\,\nu)}{d\,\nu^3}+\ldots\right],$$

und daß dieser Ausdruck gegen die meßbare Zeit $1/\mu$ klein sein soll, ist der Inhalt der Bedingung (19c). Wie weit diese Wellengruppen voneinander getrennt sind, wenn letztere Bedingung überschritten wird, hängt natürlich auch noch von ihrer Länge ab, welche mit der zeitlichen Dauer der Anfangserregung im allgemeinen wächst. Ist die einfallende natürliche Strahlung längere Zeit stationär, so wird sich auch in einer (19c) überschreitenden Entfernung x ein Schwingungszustand einstellen, welcher sich von natürlicher Strahlung nicht unterscheidet. Aber jede Schwankung in der Intensität und ihrer Verteilung über das Spektrum ändert dies. Nun lassen sich durch ein Fouriersches Integral nur Funktionen darstellen, welche für positiv und negativ unendlich große Werte der Variabelen sich in bestimmter Weise der Null nähern; schon

durch Ansetzen der Gleichung (1) haben wir demnach dauernd, d. h. von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ stationäre Strahlung von der Untersuchung ausgeschlossen. Deshalb mußte im vierten Abschnitt die Funktion

$$C_\nu' C_{\nu+\mu}' e^{i(\vartheta_\nu' - \vartheta_{\nu+\mu}')}$$

jenes der Hypothese der natürlichen Strahlung widersprechende Verhalten *unter allen Umständen* zeigen. Auch liegt darin, daß in einem *speziellen* Fall die Strahlung von natürlicher nicht zu unterscheiden ist, kein Grund, das Ergebnis des vierten Paragraphen einzuschränken.

Eine gute Illustration zu dieser Überlegung findet sich in einer Untersuchung „On the front and the rear of a free procession of traves in deep water" von Lord Kelvin.[1]) Bei den Wellen auf der Oberfläche von Flüssigkeiten ist die Phasengeschwindigkeit proportional zur Wurzel aus der Wellenlänge und hiernach folgt aus (21a), daß die Gruppengeschwindigkeit gleich der halben Phasengeschwindigkeit, also ebenfalls proportional zur Wurzel aus der Wellenlänge ist. Fig. 6 der genannten Arbeit[2]) zeigt nun die Anfangsform einer Welle, Fig. 7 dieselbe Welle, nachdem sie sich um eine gewisse Strecke fortgepflanzt hat, aufgelöst in einen Zug genäherter Sinuswellen, in dem die Wellenlänge von vorn nach hinten allmählich abnimmt. Der Fig. 8 liegt die Vorstellung zugrunde, daß im Anfangszustand die ganze, negativen Werten der Koordinate x entsprechende Halbebene mit Wellen bedeckt ist, deren Kämme parallel zur y-Achse sind, und deren Form für große negative Werte von x durch die obere Kurve in Fig. 8 dargestellt wird; es ist dies eine Sinuskurve von der Wellenlänge 2. In der Umgebung des Nullpunktes geht diese Welle in der durch die untere Kurve der Fig. 8 angezeigten Art in das von der Störung freie Gebiet allmählich über. Die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ ist überall Null. Die beschriebene Welle teilt sich dann in zwei, von denen die eine in der positiven, die andere in der negativen x-Richtung fortschreitet. Fig. 9 zeigt den Kopf der ersteren Welle zu einer späteren Zeit; auch hier nimmt die Wellenlänge der genäherten Sinus-

1) Lord Kelvin, Phil. Mag. (6) 8. p. 454. 1904.
2) Vgl. p. 462 u. f.

schwingungen von vorn nach hinten ab, bis sie den Wert 2 erreicht hat; dann bleibt sie stationär. Die Abnahme der Wellenlänge, welche man in Fig. 10 erwarten sollte, ist wenig deutlich, doch wird dies wohl an dem plötzlichen Abnehmen der Amplituden liegen.

Daß auch selektive Absorption natürliche Strahlung in eine angenäherte Sinusschwingung umzuwandeln imstande ist, sieht man am einfachsten an dem Beispiel, daß $\varkappa_\nu$ für einen im Spektrum der anfänglichen Strahlung vorkommenden Wert ν_0 ein Minimum ist; dann schrumpft mit wachsendem x der Integrationsbereich in (3) immer mehr auf die Umgebung von ν_0 zusammen, bis nur noch eine angenäherte Sinuswelle von dieser Schwingungszahl übrig bleibt.

§ 6. Die Gruppengeschwindigkeit und die Elektronentheorie der Dispersion.

Die Elektronentheorie faßt alle elektrodynamischen und optischen Wirkungen der Materie als allein durch die Elektronen vermittelt auf; sie setzt daher die Grundgleichungen für das Innere der Körper mit denselben Koeffizienten an, wie für das Vakuum. Nun breitet sich eine elektromagnetische Störung im letzteren mit der Lichtgeschwindigkeit v aus; trotzdem kann man dies nicht ohne weitere Untersuchungen auf die Ausbreitung in der Materie übertragen; denn hier beeinflußt die vom Störungsgebiet ausgehende Welle die Bewegung der Elektronen, und die Erregungen, welche von diesen dann ausgehen, interferieren möglicherweise mit der ersteren so, daß die resultierende Welle sich langsamer ausbreitet. Aber schneller kann sie sich nicht fortpflanzen, da an Orten, an welche noch keine der sich superponierenden Wellen gelangt ist, unmöglich die resultierende sein kann. Die Elektronentheorie führt also zu dem Schluß, daß elektrodynamische und optische Wirkungen sich in der Materie höchstens mit der Geschwindigkeit v fortpflanzen, und man sollte also erwarten, daß auch die Gruppengeschwindigkeit stets kleiner, höchstens ihr gleich ist.

Dies findet sich bei nichtleitenden Substanzen in den Spektralbereichen, in denen die Absorption das Dispersionsgesetz nicht beeinflußt, in der Tat bestätigt. In diesen Ge-

bieten liefern alle Dispersionstheorien eine Beziehung von der Form

$$n_\nu^2 = 1 + \frac{3 g \nu'^2}{(1-g)\nu'^2 - \nu^2} : \tag{26}$$

wir haben die Konstanten sowohl der Bezeichnung als der Bedeutung nach im Anschluß an die Theorie von Hrn. Planck[1]) gewählt, deren wir uns auch später bedienen wollen. Dementsprechend ist $1/\nu'$ die Eigenperiode eines der die Dispersion veranlassenden Resonatoren, g eine gewisse positive Konstante, die stets kleiner als 1 sein muß. Aus (26) folgt:

$$n_\nu \nu \frac{d n_\nu}{d \nu} = \frac{3 g \nu'^2 \nu^2}{\left((1-g)\nu'^2 - \nu^2\right)^2}, \tag{27}$$

$$n_\nu + \nu \frac{d n_\nu}{d \nu} = \frac{1}{n_\nu}\left[1 + \frac{3 g (1-g) \nu'^4}{\left((1-g)\nu'^2 - \nu^2\right)^2}\right]. \tag{28}$$

Nach (27) ist $(d n_\nu / d \nu) > 0$; ist also $n_\nu > 1$, so gilt dasselbe von $n_\nu + \nu (d n_\nu / d \nu)$; ist dagegen $n_\nu < 1$, so ist jeder der beiden Faktoren der rechten Seite von (28), sowohl $1/n_\nu$ als die Klammer, größer als 1; es ist also in den hier betrachteten Gebieten stets $n_\nu + \nu(d n_\nu / d \nu) > 1$ und nach (21) $n_\nu < v$. Dies bleibt bestehen, wenn die Dispersion nicht nur von einer Art von Resonatoren veranlaßt wird, sondern von mehreren; dann tritt in (26) nicht nur ein Bruch

$$\frac{3 g \nu'^2}{(1-g)\nu'^2 - \nu^2}$$

auf, sondern für jede Art von Resonatoren ein Bruch dieser Art; wodurch der Beweis nicht hinfällig wird.

Dagegen zeigt ein Blick auf die Dispersionskurve, daß in Gebieten selektiver Absorption ein Gebiet existiert, in welchem $n_\nu < 1$, und zugleich $(d n_\nu / d \nu) < 0$ ist, so daß $n_\nu + \nu (d n_\nu / d \nu)$ a fortiori kleiner als 1 ist. *Bei einem Dielektrikum gibt es in jedem Absorptionsstreifen, aber auch in keinem anderen Spektralbereich, Schwingungszahlen, für welche die Gruppengeschwindigkeit größer ist als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.* Dies scheint der Elektronentheorie zu widersprechen, welche doch ihrerseits eine Dispersionskurve von der betrachteten Form ergibt. Wie klärt sich dies Paradoxon auf?

---

1) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1902. p. 470; 1903. p. 480; 1904. p. 740; 1905. p. 382.

Knüpfen wir zunächst an die Erörterungen des fünften Paragraphen an. Daß eine Schwingung mit der Gruppengeschwindigkeit u_0 fortschreitet, gilt nur dann, wenn sie sich durch ein Integral

$$Z_0(t) = \int_{\nu_0 - \varepsilon}^{\nu_0 + \varepsilon} d\nu\, C_\nu\, e^{i(2\pi\nu t - \vartheta_\nu)}$$

darstellen läßt (vgl. (23)); dann aber hat sie, wie schon öfter erwähnt wurde, keinen bestimmten Anfang, vielmehr reicht die Welle ins Unendliche. Daß sich hier die Wellenform mit mehr als Lichtgeschwindigkeit im absorbierenden Mittel fortpflanzt, steht mit der Elektronentheorie nicht im Widerspruch; bei einem nicht absorbierenden Körper wären wir freilich berechtigt, auf Grund des Energieprinzips zu schließen: hat sich die Energieverteilung in der Zeit t um die Strecke $u_0 t$ verschoben, so muß sich die physikalische Wirkung der Störung mit dieser Geschwindigkeit ausbreiten; aber im absorbierenden Körper gibt es ja keine Verschiebung der gesamten Energie. Und ist die Erregung wie in (1) durch ein Integral $\int_0^\infty \ldots$ dargestellt, so verschwindet in (3) mit wachsendem x immer mehr der Einfluß gerade der Spektralbereiche, in welchen $u_\nu > v$ ist, weil sie ja in den Absorptionsstreifen liegen. Gehen wir aber zu den energetischen Betrachtungen des dritten Abschnittes über, so müssen wir uns erinnern, daß dort der Satz von der Gruppengeschwindigkeit u. a. an die Bedingung (19a) gebunden war, welche aussagt, daß auch noch in (7) das ursprüngliche Übergewicht der Umgebung von ν_0 durch selektive Absorption nicht aufgehoben sein soll. Offenbar wird diese gerade dann schon bei relativ kleinen Werten von x ungültig, wenn $u_0 > v$, also ν_0 im Gebiet starker selektiver Absorption liegt. Ferner ist zu bedenken, daß die Intensität der Strahlung als ein Mittelwert über eine meßbare Zeit und als langsam veränderliche Funktion von t definiert ist; die Zeit, zu welcher $J_0(t)$ einen bestimmten Wert annimmt, läßt sich nicht mathematisch exakt bestimmen; es ist deshalb auch logisch nicht möglich, die Zeit, in welcher die Strahlung eine Strecke x durchläuft, mathematisch genau festzulegen; es bleibt dabei immer ein Spielraum von Zeiten, welche klein gegen die Zeit einer Inten-

sitätsmessung sind. Dies bedingt eine Unbestimmtheit im Begriff ihrer Geschwindigkeit; und ist die Strecke, längs welcher die Bedingungen (19) erfüllt sind, die Strahlung also nicht aufhört, natürliche zu sein, sehr klein, so kann diese Unbestimmtheit sehr groß werden. *Das Paradoxon, daß die Gruppengeschwindigkeit größer sein kann als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, ist also aufgeklärt, wenn der Nachweis gelingt, daß infolge der selektiven Absorption Bedingung (19a) verletzt ist, bevor x so groß ist, daß die Zeiten x/u_0 und x/v sich um etwas Meßbares unterscheiden. Die Unbestimmtheit, welche im Begriff der Strahlungsintensität liegt, bewirkt dann eben eine so große Unbestimmtheit im Begriff ihrer Geschwindigkeit, daß zwischen u_0 und v nicht entschieden werden kann.*

Diesen Nachweis wollen wir nun an dem Beispiel der Dispersionstheorie von Hrn. Planck erbringen. Benutzt man an Stelle von $\varkappa_\nu$ als Maß der Absorption die Größe

(29) $$k_\nu = \frac{\varkappa_\nu v}{2\pi\nu},$$

versteht man unter σ wie schon oben das Dämpfungsdekrement eines der die Dispersion verursachenden Resonatoren und führt man zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{\nu^2 - (1-g)\nu'^2}{3g\nu'^2}, \quad \beta = \frac{\sigma\nu^3}{3\pi g\nu'^3}\text{ [1]}$$

ein, so gelten bei einer Dispersionskurve vom ersten Typus, d. h. wenn g/σ eine große Zahl ist, in der Umgebung des Punktes

$$\nu = \nu'\sqrt{1+2g},$$

in welchem $\alpha = 1$ ist, die Gleichungen[2]:

$$n_\nu = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{(\alpha-1)^2+\beta^2}+(\alpha-1)\right)} \text{ klein wie } \sqrt{\frac{\sigma}{g}},$$

$$k_\nu = \sqrt{\frac{1}{2}\beta} \text{ klein wie } \sqrt{\frac{\sigma}{g}}.$$

1) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1904. p. 747, Gleichung (10).

2) M. Planck, l. c. 1905. p. 388. Man darf hier keinen Anstoß daran nehmen, daß im Gegensatz zu allem früheren n_ν klein und $\nu(dn_\nu/d\nu)$ groß ist; es handelt sich hier nur um einen Grenzfall, von dem aus man Rückschlüsse auf weniger extreme Fälle ziehen will. Die Ausdrücke klein und groß gegen 1 haben hier keine so weitgehende Bedeutung wie oben.

Dagegen ist

$$\nu \frac{d n_\nu}{d \nu} = \frac{n_\nu \nu^2}{3 g \nu'^2 \sqrt{(\alpha - 1)^2 + \beta^2}} \quad \text{groß wie} \quad \sqrt{\frac{g}{\sigma}};$$

mithin ist $n_\nu + \nu(d n_\nu / d \nu)$ hier größer als 1. Schreitet man von diesem Punkt nach größeren Werten von ν fort, so kommt man in Bereiche unmerklicher Absorption, in welchen nach dem oben Gesagten $n_\nu + \nu(d n_\nu / d \nu)$ ebenfalls größer als 1 ist. Geht man aber zu kleineren Werten von ν über, so kommt man zunächst in das Gebiet, in welchem α zwischen 0 und 1 liegt, aber von beiden Werten erheblich verschieden ist; hier liegt das Minimum von n_ν, in welchem sich die Kurven für n_ν und $n_\nu + \nu(d n_\nu / d \nu)$ schneiden, also nimmt hier auch der letztere Ausdruck kleine Werte an. Dafür ist aber k_ν hier, wenn auch nicht überall größer wie 1, so doch mittelgroß, und geht man in der negativen ν-Richtung noch weiter, so bleibt dies so, bis man wieder in das Gebiet kommt, in welchem

$$n_\nu > 1, \quad \frac{d n_\nu}{d \nu} > 0, \quad \text{also} \quad n_\nu + \nu \frac{d n_\nu}{d \nu} > 1 \text{ ist.}$$

Ist also $u_\nu > v$, so ist k_ν mindestens mittelgroß. Wenn nun die Zeitdifferenz

$$\frac{x}{v} - \frac{x}{u_0} = \frac{x}{v}\left(1 - \left(n_0 + \nu_0 \left(\frac{d n_\nu}{d \nu}\right)_0\right)\right)$$

mit der Zeit einer Messung $1/\mu$ vergleichbar, also nach (8) groß gegen $1/\varrho \nu_0$ ist, so folgt mit Hilfe von (29)

$$\varkappa_0 x = \frac{2\pi}{v} k_0 \nu_0 x \quad \text{groß gegen} \quad \frac{2\pi k_0}{\varrho\left(1 - \left(n_0 + \nu_0 \left(\frac{d n_\nu}{d \nu}\right)_0\right)\right)};$$

also, da wir $n_0 + \nu_0 \left(\frac{d n_\nu}{d \nu}\right)_0 < 1$ und k_0 als mittelgroß voraussetzen,

$$\varkappa_0 x \quad \text{groß gegen} \quad \frac{1}{\varrho}$$

und a fortiori

$$\varkappa_0 x \quad \text{groß gegen} \quad (-\log \varrho),$$

demnach

$$e^{-2 \varkappa_0 x} \quad \text{klein gegen} \quad \varrho^2.$$

Nun gibt es außerhalb des Absorptionsstreifens zweifellos Schwingungszahlen, deren Unterschied von ν_0 groß gegen $\varrho\,\nu_0$ ist, und für welche bei demselben Wert von x $e^{-2\varkappa_\nu x}$ noch von der Größenordnung von 1 ist. Es ist also

$$e^{-2\varkappa_0 x} \text{ klein gegen } \varrho^2 e^{-2\varkappa_\nu x}, \text{ wenn } \nu - \nu_0 \text{ groß gegen } \varrho\,\nu_0,$$

d. h. Bedingung (19a) ist weit überschritten, wenn x so groß ist, daß man aus der Zeit der Durchlaufung dieser Strecke zwischen u_0 und v entscheiden könnte.

In dem anderen Extremfall (Dispersionskurve zweiter Art), in welchem g/σ eine kleine Zahl ist, gilt im Absorptionsgebiet die Formel[1]):

$$n_\nu = 1 - \frac{\alpha}{2(\alpha^2+\beta^2)}, \quad \left(n_\nu - 1 \text{ klein wie } \frac{g}{\sigma}\right),$$

$$k_\nu = \frac{\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}, \quad \left(\text{klein wie } \frac{g}{\sigma}\right).$$

Es folgt hieraus die Gleichung

$$\nu\frac{d\,n_\nu}{d\,\nu} = \frac{3\,\beta^2\,\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^2} + \frac{(\alpha^2-\beta^2)\,\nu^2}{3\,g\,(\alpha^2+\beta^2)^2\,\nu'^2},$$

in welcher der erste Summand der rechten Seite klein wie g/σ ist, während der zweite sich wie g/σ^2 verhält, also sowohl gegen den ersten Term, als auch gegen $n_\nu - 1$ groß ist, wenn nicht gerade $\alpha = \pm\beta$ ist; auch die Größenordnung der Differenz $x/v - x/u_0$ bestimmt er dann allein. Ist diese von der Ordnung $1/\mu$, so folgt unter Berücksichtigung dieses Umstandes

$$\varkappa_0\,x \text{ von der Größenordnung von } \frac{\sigma\,\nu_0}{\mu}.$$

Nehmen wir nun σ von der Ordnung ϱ an, so ist nach (8)

$$\varkappa_0\,x \text{ groß gegen } 1,$$

oder was dasselbe ist, groß gegen $(-\log\varrho)$; und daraus folgt wie oben, daß Bedingung (19a) verletzt ist, bevor $x/v - x/u_0$ meßbar wird; was zu beweisen war. In der Umgebung von $\alpha = \beta$ ist aber $\varkappa_0\,x$ sogar von der Ordnung von ν_0/μ.[2])

---

1) Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1905. p. 391.

2) Derselbe scheinbare Widerspruch tritt auch bei der Telegraphengleichung auf. Die exakte mathematische Lösung (vgl. Riemann-Weber, Die part. Differentialgl. der math. Phys. 2. § 121 u. f. Braun-

Zum Schluß wollen wir noch einen Blick in den Mechanismus der Lichtfortpflanzung im dispergierenden Mittel werfen, und unter der Voraussetzung, daß die Absorption der Welle unmerklich ist, auf einem von allen bisherigen Betrachtungen unabhängigen Wege den in (21) angegebenen Wert der Gruppengeschwindigkeit bestätigen; wir brauchen dann nur die Methode, nach welcher Hr. Reynolds[1]) die Gruppengeschwindigkeit der Wellen auf der Oberfläche von Flüssigkeiten berechnet hat, auf das vorliegende Problem zu übertragen. Der Satz, daß das Störungsgebiet und die in ihm vorhandene Energie mit Gruppengeschwindigkeit fortschreitet, gilt nun nach dem fünften Abschnitt (vgl. (25)) um so genauer, je kleiner in dem die Erregung darstellenden Integral (23) der Integrationsbereich $2s$ ist; im Grenzfall $s = 0$, d. h. bei der Sinusschwingung, muß er genau gelten. Eine solche legen wir jetzt der Betrachtung zugrunde.

Wären Gruppen- und Phasengeschwindigkeit identisch, so müßte während einer Schwingungsperiode durch eine zur Strahlrichtung senkrechte Fläche die Energie hindurchgestrahlt werden, welche sich bei Beginn der Periode in dem Zylinder befand, der diese Fläche zur Basis und die Wellenlänge zur Höhe hat. Ist diese Energie E aber nicht gleich jener Strahlung S, so verhält sich die Gruppen- zur Phasengeschwindigkeit wie S zu E, d. h.

$$u_\nu = \frac{v}{n_\nu} \frac{S}{E}.$$

schweig 1901; oder W. Voigt, Ann. d. Phys. 4. p. 203. 1901) zeigt, daß bei einem Leiter, dessen magnetische Permeabilität 1 ist, der Kopf der Welle mit der Geschwindigkeit

$$\frac{v}{\sqrt{\text{Dielektrizitätskonstante}}}$$

fortschreitet. Trotzdem ist die Gruppengeschwindigkeit größer, wenn ν größer als

$$\frac{\text{Leitfähigkeit}}{\text{Dielektrizitätskonstante}} \sqrt{2 + \sqrt{5}}$$

ist. Da hier $\varkappa_\nu$ mit ν dauernd wächst, so dürfte sich dies Paradoxon ebenso aufklären, wie in dem oben behandelten Fall.

1) O. Reynolds, Nature 16. p. 343. 1877; H. Lamb, Hydrodynamics p. 382. Cambridge 1895.

In der folgenden Rechnung soll N die Zahl der Resonatoren in der Volumeinheit, f das elektrische Moment eines Resonators, U seine Energie, $\mathfrak{E}$ die elektrische und $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke der geordneten Sinuswelle sein; σ, ν', n_ν und g behalten ihre bisherige Bedeutung. Die Lösung des Systems der hierfür geltenden Differentialgleichungen, welche einer in der positiven x-Richtung fortschreitenden, in der xy-Ebene polarisierten Welle entspricht, lautet:

$$\mathfrak{E}_z = a \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x n_\nu}{v}\right),$$

$$\mathfrak{H}_y = - a n_\nu \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x n_\nu}{v}\right),$$

$$f_z = \frac{3 v^3 \sigma a \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x n_\nu}{v}\right)}{(2\pi)^4 \nu'\left(\nu'^2(1-g) - \nu^2\right)}.\ ^{1)}$$

Ferner ist, wenn wir den mit der Absorption in Zusammenhang stehenden Term $-2/3 v^3 . f \dddot{f}$ fortlassen[2]):

$$U = \frac{2\pi^2\nu'}{3 v^3 \sigma}\left[4\pi^2\nu'^2(1-g)f^2 + \dot{f}^2\right].$$

Da

$$g = \frac{\sigma v^3 N}{4\pi^3 \nu'^3},\ ^{3)}$$

so folgt unter Berücksichtigung von (26):

$$E = \int_x^{x + \frac{v}{n_\nu \nu}} d x \left[\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}_z^2 + \mathfrak{H}_y^2) + N U\right]$$

$$= \frac{a^2 v}{16\pi n_\nu \nu}\left[1 + n_\nu^2 + \frac{3 g \nu'^2\left(\nu'^2(1-g) + \nu^2\right)}{\left(\nu'^2(1-g) - \nu^2\right)^2}\right]$$

$$= \frac{a^2 v}{8\pi n_\nu \nu}\left(1 + \frac{3 g (1-g)\nu'^4}{\left(\nu'^2(1-g) - \nu^2\right)^2}\right),$$

---

1) Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1904. p. 745, Gleichung (4).

2) Ebenda 1904. p. 746, Gleichung (5).

3) Ebenda 1904. p. 747.

während

$$S = -\frac{v}{4\pi}\int\limits_t^{t+\frac{1}{\nu}} dt\, \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y = \frac{a^2 v n_\nu}{8\pi\nu}$$

ist, so daß

$$u_\nu = \frac{v}{n_\nu}\frac{S}{E} = \frac{v n_\nu}{1 + \frac{3g(1-g)\nu'^4}{(\nu'^2(1-g) - \nu^2)^2}}$$

und nach (28), in Übereinstimmung mit (21),

$$u_\nu = \frac{v}{n_\nu + \nu\frac{d n_\nu}{d\nu}}$$

wird. Da nach (27) $(d n_\nu / d\nu) > 0$, ist $u_\nu < v/n_\nu$. ***Die Ursache, aus welcher die Gruppengeschwindigkeit bei unmerklicher Absorption stets kleiner als die Phasengeschwindigkeit ist, liegt darin, daß die Resonatoren wohl einen Beitrag zur Energie der geordneten Welle, aber nicht zu ihrem Pointingschen Strahlungsvektor liefern.***

§ 7. Ähnliche Probleme.

1. Die Spiegelung und Brechung der Strahlung.

Ausgenommen den idealen Grenzfall, daß zwei Medien, welche beide nicht absorbieren, ohne jede Übergangsschicht aneinander stoßen, erfährt eine Sinusschwingung bei jeder Spiegelung und Brechung eine Phasenverzögerung φ_ν; und selbst in jenem Grenzfall gilt dies für die Totalreflexion; ferner wird dabei stets ihre Amplitude vermindert, sagen wir im Verhältnis 1 zu $e^{-\sigma_\nu}$. φ_ν und σ_ν sind von den Brechungsindizes und Absorptionskoeffizienten der beiden Medien abhängig, also im allgemeinen Funktion der Schwingungszahl, diese kann aber auch explizit vorkommen (z. B. wenn man bei der Metallreflexion zur Charakterisierung der Absorption den von uns im ersten Abschnitt eingeführten Koeffizienten $\varkappa_\nu$ benutzt). Für das Verhalten der Strahlung bei der Spiegelung und Brechung ergeben sich hieraus Folgerungen, welche den Ergebnissen des dritten und vierten Paragraphen analog sind.

Wir wollen aber nicht erst die einzelne Reflexion oder Brechung behandeln, sondern die Strahlung sogleich vielen

derartigen Vorgängen unterworfen denken. Nun wird im allgemeinen bei jedem dieser Vorgänge eine Zerlegung der einfallenden, linear polarisierten Welle in eine senkrecht zur Einfallsebene und eine in ihr polarisierte Komponente erforderlich sein, für welche σ_ν und φ_ν verschiedene Werte haben. Um die hierdurch hervorgerufene Komplikation zu vermeiden, nehmen wir an, daß alle Einfallsebenen zueinander parallel sein sollen, dann tritt keine solche Zerlegung auf. Ferner wollen wir, um nicht auf schon Besprochenes zurückzukommen, in den Gleichungen die Ausdrücke fortlassen, welche auf die Fortpflanzung der Strahlung vom Ort der einen Spiegelung oder Brechung zum Ort der nächsten herrührt. Daß sich der Begriff des elementaren Strahlenbündels wenigstens unter gewissen Bedingungen auch hier anwenden läßt, sieht man am Beispiel der Reflexion an der Ebene.

Für die eine linear polarisierte Komponente der Welle machen wir den Ansatz:

$$Z(t) = \int d\nu\, C_\nu\, e^{i(2\pi\nu t - \vartheta_\nu)}.$$

Nach einer Reihe von Reflexionen und Brechungen, auf welche das Summenzeichen hinweisen soll, gilt dann die Gleichung

$$Z'(t) = \int d\nu\, e^{-\sum \sigma_\nu}\, C_\nu\, e^{i(2\pi\nu t - \vartheta_\nu - \sum \varphi_\nu)}.$$

Hier spielen $\sum \varphi_\nu$ und $\sum \sigma_\nu$ dieselbe Rolle, wie in (3) die Ausdrücke $2\pi n_\nu \nu x : v$ und $\varkappa_\nu x$; hieraus folgt: *Solange als*

$$\varrho^2 e^{-2\sum \sigma_\nu} \textit{ klein gegen } e^{-2\sum \sigma_0}, \textit{ wenn } \nu - \nu_0 \textit{ groß gegen } \varrho\, \nu_0,$$

$$\varrho\, \nu_0 \sum \left(\frac{d\sigma_\nu}{d\nu}\right)_0 + \tfrac{1}{2}(\varrho\, \nu_0)^2 \sum \left(\frac{d^2\sigma_\nu}{d\nu^2}\right)_0 + \dots \textit{ klein gegen } 1$$

und

$$\mu \left[\varrho\, \nu_0 \sum \left(\frac{d^2\varphi_\nu}{d\nu^2}\right)_0 + \tfrac{1}{2}(\varrho\, \nu_0)^2 \sum \left(\frac{d^3\varphi_\nu}{d\nu^3}\right)_0 + \dots\right] \textit{ klein gegen } 1$$

ist, erleidet die Strahlung von der Schwingungszahl ν_0 durch die Reflexionen und Brechungen eine Verzögerung

$$\frac{1}{2\pi} \sum \left(\frac{d\varphi_\nu}{d\nu}\right)_0;$$

die Absorption ist dieselbe wie bei einer reinen Sinusschwingung. Darüber hinaus verliert der zweite Hauptsatz seine Gültigkeit für die Strahlung.

Da φ_ν langsam veränderliche Funktion von ν ist, ist $\varrho\nu(d\varphi_\nu/d\nu)$ klein gegen 1 und $d\varphi_\nu/d\nu$ von der Ordnung der Lichtperiode $1/\nu$. Es wären also außerordentlich viele Reflexionen und Brechungen notwendig, um eine meßbare Verzögerung der Strahlung zustande zu bringen. Die Absorption, welche ja auch bei der Totalreflexion nie ganz fehlt, dürfte ihren Nachweis sehr erschweren, um so viel mehr gilt dies von dem zweiten Stadium, in welchem die Unterschiede der Verzögerung für verschiedene Schwingungszahlen die Wellenform der Strahlung so zersetzt haben, daß ihre ursprüngliche Ungeordnetheit verloren gegangen ist. Jedenfalls sieht man auch hier, daß die Absorption für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes unbedingt notwendig ist. Bei der Spiegelung an dem von der Strahlungstheorie so häufig zur adiabatischen Abschließung der Strahlung benutzten absolut spiegelnden Körper finden aber bekanntlich nach der Maxwellschen Theorie keine Phasenverzögerungen statt.[1])

Bemerkt sei noch, daß die Verzögerung auch negativ sein kann, z. B. bei der Totalreflexion in einem normal dispergierenden Dielektrikum an der Grenzfläche gegen das Vakuum.

2. Die spektroskopische Zerlegung der Strahlung.

Um den physikalischen Grund für das Verhalten der Strahlung bei der Fortpflanzung, Reflexion und Brechung und für den Zusammenhang mit dem zweiten Hauptsatz noch klarer hervortreten zu lassen, behandeln wir als drittes Problem ihre spektroskopische Zerlegung. Hr. Planck hat darauf hingewiesen[2]), daß man bei fortgesetzter Vergrößerung des Auflösungsvermögens der Spektroskope schließlich mit dem zweiten Hauptsatz in Konflikt geraten muß. Dies läßt sich auf eine der obigen ganz analoge Art beweisen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den beim Gitter und Stufengitter realisierten Fall, daß p Strahlen von gleicher Amplitude, der m^{te} mit der Verzögerung u/π gegen den $(m-1)^{\text{ten}}$, interferieren. Da die Änderungen, welche entstehen, wenn das Verhältnis

1) Vgl. auch M. Abraham, Ann. d. Phys. **14.** p. 236. 1904, namentlich p. 259 u. f.

2) M. Planck, Ann. d. Phys. **7.** p. 391. 1902.

der Amplituden im m^{ten} und $(m-1)^{\text{ten}}$ Strahl nicht 1, sondern $1-\varepsilon$ zu 1 ist, klein sind wie ε^2, falls ε klein ist[1]), so gilt das Folgende auch in guter Annäherung für die planparallele Platte in der von Hrn. O. Lummer und E. Gehrcke eingeführten Form.[2]) Zum Prisma aber gelangt man vom Stufengitter durch einen Grenzübergang; man muß p über alle Grenzen wachsen, aber gleichzeitig Höhe und Breite der Stufen so abnehmen lassen, daß die Produkte $p \times$ Stufenhöhe und $p \times$ Stufenbreite konstant bleiben.[3]) Wir betrachten die zu analysierende Strahlung als einzelne ebene Welle.

Ist im einfallenden Licht die Schwingung wieder durch das Integral

$$Z(t) = \int d\nu\, C_\nu\, e^{i(2\pi\nu t - \vartheta_\nu)}$$

gegeben, so gilt für die aus der Interferenz aller Strahlen resultierende Schwingung

$$\begin{aligned} Z'(t) &= \int d\nu\, C_\nu \sum^m e^{i\left[2\pi\nu\left(t-\frac{mu}{\pi}\right)-\vartheta_\nu\right]} \\ &= \int d\nu \frac{1-e^{-2ipu\nu}}{1-e^{-2iu\nu}}\, C_\nu\, e^{i(2\pi\nu t-\vartheta_\nu)}. \end{aligned}$$

Drückt man den hier auftretenden komplexen Bruch durch seinen absoluten Betrag, $|\sin p u \nu : \sin u \nu|$, und seinen Arcus, $-\frac{1}{2}(p-1)u\nu$ aus, und wählt man u so, daß

$$u\nu_0 = h\pi$$

wird (h eine ganze Zahl), d. h. so, daß eine Sinuswelle von der Periode $1/\nu_0$ bei der Verzögerung u ein Interferenzmaximum ergibt, so findet man

$$(30) \qquad Z'(t) = \int d\nu \left| \frac{\sin p h \pi \frac{\nu}{\nu_0}}{\sin h \pi \frac{\nu}{\nu_0}} \right| C_\nu\, e^{i\left[2\pi\nu t - \vartheta_\nu - \frac{1}{2}(p-1)h\pi\frac{\nu}{\nu_0}\right]}.$$

Ist p eine große Zahl, so nimmt die Funktion

$$|(\sin p h \pi(\nu/\nu_0)) : (\sin h \pi(\nu/\nu_0))|$$

1) Vgl. M. Laue, Ann. d. Phys. 13. p. 163. 1904.

2) O. Lummer u. E. Gehrcke, Ann. d. Phys. 10. p. 457. 1903.

3) In der Tat läßt sich so z. B. der Rayleighsche Ausdruck für das Auflösungsvermögen des Prismas aus dem für das Stufengitter gültigen ableiten.

in der Nachbarschaft von ν_0 nur für solche Werte von ν erhebliche Beträge an, für welche

$$|\nu - \nu_0| < \frac{\nu_0}{p\,h};$$

erst in der Umgebung der Werte

$$\frac{h \pm 1}{h}\,\nu_0\,, \quad \frac{h \pm 2}{h}\,\nu_0\,, \text{ etc.}$$

kommen wieder dieselben großen Beträge vor. Um die letzteren Intervalle auszuschließen, wollen wir in (30) $\sin h\,\pi\,(\nu/\nu_0)$ ersetzen durch die Funktion $h\,\pi\,(\nu - \nu_0) : \nu_0$; beide sind in der Umgebung von ν_0, soweit sie in Betracht kommt, identisch; bei Benutzung des Prismas käme man unmittelbar auf eine Funktion von der Form, wie sie jetzt unter dem Integral auftritt. Wir setzen also:

$$(31) \quad Z'(t) = \int d\,\nu \left| \frac{\sin p\,h\,\pi \dfrac{\nu}{\nu_0}}{h\,\pi \dfrac{\nu - \nu_0}{\nu_0}} \right| C_\nu\, e^{i\left(2\pi\nu t - \vartheta_\nu - \frac{1}{2}(p-1)\,h\,\pi \frac{\nu}{\nu_0}\right)}\,.$$

Ist hier $p\,h$ von der Größenordnung $1/\varrho$, d. h. ist

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \qquad p\,h \text{ groß gegen } 1, \\ \text{aber dennoch} \\ \qquad \dfrac{\nu}{p\,h} \text{ groß gegen } \mu, \end{array} \right.$$

so ist in (31) der Integrationsbereich von der Breite $\varrho\,\nu$, die Gleichung stellt dann monochromatische, natürliche Strahlung von der Periode $1/\nu_0$ vor. Wird $p\,h$ aber größer, so tritt der Konflikt mit dem zweiten Hauptsatz ein.

Bilden wir den Mittelwert von $Z'(t)^2$ für die Zeit einer Messung, so finden wir:[1])

$$(33) \left\{ \begin{array}{l} \overline{Z'^2(t)} = \displaystyle\int d\,\mu\,(b_\mu - i\,a_\mu)\,e^{2\pi i \mu t}\,, \\[2ex] b_\mu - i\,a_\mu = \dfrac{\nu_0^2}{h^2\,\pi^2}\,e^{\frac{1}{2}(p-1)\,h\,\pi\,i \frac{\mu}{\nu_0}} \\[2ex] \times \displaystyle\int d\,\nu\, \frac{\sin\left(p\,h\,\pi \dfrac{\nu}{\nu_0}\right) \sin\left(p\,h\,\pi \dfrac{\nu + \mu}{\nu_0}\right)}{(\nu - \nu_0)\,(\nu + \mu - \nu_0)}\, C_\nu\, C_{\nu+\mu}\, e^{i\,(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}. \end{array} \right.$$

1) Vgl. M. Planck, Ann. d. Phys. **1.** p. 69. 1900; Gleichung (8) auf p. 81.

Diese Gleichung ist ganz ähnlich gebaut, wie die Formel (22) für die Energie eines Resonators von dem Dämpfungsdekrement σ. Führen wir hier die Bedingungen (32) ein, so verschwindet μ aus dem Ausdruck

$$\sin\left(p\,h\,\pi\,\frac{\nu+\mu}{\nu_0}\right):(\nu+\mu-\nu_0)/\nu_0,$$

und man kann den Faktor

$$e^{\frac{1}{2}(p-1)h\pi i\frac{\mu}{\nu}}$$

mit 1 vertauschen; es entspricht dieses Verfahren vollständig dem Übergang von Gleichung (22) zu (6), den man ausführt, indem man für σ die Bedingung (8) als gültig annimmt.[1] Ebenso wie (6) definiert dann $\overline{Z'^2(t)}$ die Intensität der Strahlung von der Schwingungszahl ν_0. Nur muß man, was auch in (6) geschehen ist, noch einen Proportionalitätsfaktor P hinzufügen, welcher bewirkt, daß

$$\int_0^\infty J_0(t)\,d\nu_0$$

die Gesamtintensität J der Strahlung gibt. Da die letztere durch die Gleichung[2])

$$J=\overline{Z^2(t)}=\int d\mu\,(B_\mu-i\,A_\mu)\,e^{2\pi i\mu t},$$

$$B_\mu-i\,A_\mu=\int d\nu\,C_\nu\,C_{\nu+\mu}\,e^{i(\vartheta_\nu-\vartheta_{\nu+\mu})}$$

gegeben ist, muß

$$\int_0^\infty d\nu_0\,P(b_\mu-i\,a_\mu)=B_\mu-i\,A_\mu$$

sein; durch Umkehrung der Integrationsfolge schließen wir

$$\frac{1}{h^2\pi^2}\int_0^\infty d\nu_0\,\nu_0^{\,2}\,P\,\frac{\sin^2\left(p\,h\,\pi\,\frac{\nu}{\nu_0}\right)}{(\nu-\nu_0)^2}=1.$$

Hier kommt wieder nur die nächste Umgebung von $\nu_0=\nu$ in

---

1) l. c. § 8.

2) l. c. Gleichung (8) p. 81.

Betracht, so daß wir ν_0^2 und P bei der Integration als konstant betrachten können und finden:

$$P = \frac{h}{p\,\nu_0};$$

und demnach:

$$J_0(t) = \int d\mu\,(b_\mu^0 - i\,a_\mu^0)\,e^{2\pi i \mu t},$$

$$b_\mu^0 - i\,a_\mu^0 = \frac{\nu_0}{p\,h\,\pi^2}\int d\nu\,\frac{\sin^2 p\,h\,\pi\,\frac{\nu}{\nu_0}}{(\nu - \nu_0)^2}\,C_\nu\,C_{\nu+\mu}\,e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}.$$

Diese Gleichung leistet genau dieselben Dienste, wie die bisher angewandte Gleichung (6); daß beide für $J_0(t)$ denselben Wert ergeben, ist eine Folgerung aus der Hypothese der natürlichen Strahlung; **denn ersetzt man hier $C_\nu\,C_{\nu+\mu}\,e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}$ durch $\mathfrak{B}_\mu^0 - i\,\mathfrak{A}_\mu^0$, so findet man, da**

$$\frac{\nu_0}{p\,h\,\pi^2}\int d\nu\,\frac{\sin^2 p\,h\,\pi\,\frac{\nu}{\nu_0}}{(\nu - \nu_0)^2} = 1$$

ist,

$$b_\mu^0 - i\,a_\mu^0 = \mathfrak{B}_\mu^0 - i\,\mathfrak{A}_\mu^0.$$

Bei kleineren Werten des Auflösungsvermögens $p\,h$ stellt das Integral in (30) noch nicht monochromatische Strahlung dar; vielmehr zeigt dann die der Deduktion des dritten Abschnittes nachgebildete Überlegung, daß die Schwingungszahl ν in ihr mit der Intensität

$$J_\nu'(t) = \frac{\sin^2 p\,h\,\pi\,\frac{\nu}{\nu_0}}{\sin^2 h\,\pi\,\frac{\nu}{\nu_0}}\,J_\nu(t)$$

vertreten ist. Bei der Vergrößerung von $p\,h$ wird der hier auftretende Faktor praktisch Null für alle Werte von ν, welche sich meßbar von ν_0 unterscheiden; und wir erhalten wieder den soeben besprochenen Fall.

Da das Auflösungsvermögen der besten Spektroskope der Gegenwart ungefähr 10^5 ist, ist die durch die zweite der Bedingungen (32) gesetzte Grenze nicht mehr so sehr weit. Es bestätigt sich also, was schon Hr. Planck ausgesprochen hat[1]),

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 7. p. 358. 1902.

daß man mit den feinen Hilfsmitteln der Optik der Grenze, an welcher der Konflikt mit dem zweiten Hauptsatze beginnt, erheblich näher kommen kann, als mit den verhältnismäßig roheren der Thermodynamik.

Nun sind die Veränderungen, welche die Strahlung sowohl beim Durchgang durch ein dispergierendes und absorbierendes Medium, als auch bei der Reflexion und Brechung erleidet, von derselben Art, wie bei der spektroskopischen Zerlegung. Dies läßt sich auch ohne alle Rechnung einsehen. Für die selektive Absorption ist es unmittelbar einleuchtend an dem schon oben gewählten Beispiel, daß $\varkappa_0$ das Minimum von $\varkappa_\nu$ ist; denn ein solches Farbenfilter von hinreichend großer Dicke isoliert die Strahlung von der Schwingungszahl ν_0, ermöglicht es also anzugeben, wie groß die Intensität $J_0(t)$ im einfallenden Licht ist. Die Dispersion der Gruppengeschwindigkeit aber trennt nach (20) bei zeitlich veränderlichen Vorgängen die Strahlungen verschiedener Schwingungszahl nach dem Gesetz, nach welchem die Gruppengeschwindigkeit mit der letzteren variiert; ähnlich wirkt bei der Reflexion und Brechung die Dispersion der Verzögerung. Der Foucaultsche Versuch zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit mit Hilfe des rotierenden Spiegels z. B. würde, in einem Medium mit merklicher Dispersion der Gruppengeschwindigkeit ausgeführt, an Stelle des abgelenkten Bildes der Lichtquelle ihr Spektrum zeigen. Das Auflösungsvermögen dieses Spektroskops wäre proportional zur durchlaufenen Strecke x und zur Dispersion der Gruppengeschwindigkeit; das Produkt aus diesen beiden Größen tritt in der Tat in (19c) auf, so daß diese Bedingung durchaus der zweiten der Bedingungen (32) entspricht. Wesentlich ist bei diesem Versuch, daß die Strahlung durch die Rotation des Spiegels periodisch unterbrochen wird; im stationären Zustand fände keine Auflösung statt, es läge dann also auch kein Grund vor, aus welchem natürliche Strahlung ihre Ungeordnetheit einbüßen sollte, wie wir schon im fünften Abschnitt fanden.

Schließlich bedarf es noch der Rechtfertigung, weshalb wir in diesem Abschnitt nur von *einer* ebenen Welle sprachen. Der Einwand, daß sich eine solche nicht isolieren läßt, erhebt sich doch auch in diesem Fall. In der Tat hat jedes Spektro-

skop eine gewisse Spaltbreite; beim Gitter, Stufengitter und Prisma verunreinigt diese das Spektrum, scheint also dem Auflösungsvermögen entgegenzuwirken und geeignet zu sein, dem Konflikt mit dem zweiten Hauptsatz auch dann vorzubeugen, wenn zu großes Auflösungsvermögen ihn herbeiführen sollte. Daß es nicht so ist, wird dadurch bewiesen, daß sich der Einfluß der Spaltbreite rechnerisch eliminieren läßt[1]; vor allem aber durch die Existenz eines Spektralapparates, bei welchem er überhaupt nicht auftritt, nämlich der planparallelen Platte, sei es in der von den Herren Perot und Fabry angewandten, sei es in der Form, welche ihr die Herren Lummer und Gehrcke gegeben haben. Auf Grund der Wesensgleichheit der behandelten Probleme können wir dies als Bestätigung des im zweiten Abschnitt bewiesenen Ergebnisses ansehen, daß das Zusammenwirken vieler Strahlen kein wesentliches, die Ungeordnetheit vermehrendes Moment ist.

Göttingen, 17. September 1905.

---

1) Vgl. C. Runge, Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 42. p. 205. 1897.

(Eingegangen 19. September 1905.)

6. *Über den Geschwindigkeits- und Energieverlust von Geschossen in Wasser; von Martin Gildemeister und Hans Strehl.*

Die eigentümlichen Explosionserscheinungen, die beobachtet werden, wenn schnell fliegende Geschosse auf Flüssigkeitsmassen treffen, sind in neuester Zeit durch mehrere Arbeiten dem Verständnis näher gebracht worden. Schon Kocher[1]) hatte gezeigt, daß weder die Rotation des Geschosses noch seine Erwärmung dabei eine wesentliche Rolle spielt. Derselbe Forscher hatte die Ansicht ausgesprochen, daß es sich nicht um Wirkungen des hydraulischen Druckes handle; streng bewiesen ist dies erst neuerdings, unter anderem durch die eine Tatsache, daß das Gefäß erst zerspringt, wenn die Kugel schon wieder ausgetreten ist, wie die Einzelaufnahmen von Cranz und Koch[2]) und die Serienphotographien von Kranzfelder und Schwinning[3]) zeigen. Vielmehr hat man sich nach den Darlegungen der Medizinalabteilung des Kriegsministeriums[4]) und von Cranz und Koch den Vorgang so zu denken: die getroffenen Wasserteilchen erhalten eine gewisse Geschwindigkeit, mit der sie dann gegen andere Wasserteile und gegen die Umhüllung anstürmen.

Die Richtigkeit dieser Erklärung kann wohl nicht mehr bezweifelt werden. Damit ist der Vorgang aber erst in all-

---

1) Th. Kocher, Über Schußwunden. Leipzig 1880.

2) C. Cranz u. K. R. Koch, Ann. d. Phys. 3. p. 247. 1900.

3) F. Kranzfelder u. W. Schwinning, Die Funkenphotographie, insbesondere die Mehrfachfunkenphotographie, in ihrer Verwendbarkeit zur Darstellung der Geschoßwirkung im menschlichen Körper. Herausgegeben von der Medizinalabt. d. kgl. preuß. Kriegsministeriums. Mit Atlas. Berlin 1903.

4) Über die Wirkung und kriegschirurgische Bedeutung der neuen Handfeuerwaffen. Im Auftrage Sr. Exz. des Hrn. Kriegsministers bearb. von der Medizinalabt. d. kgl. preuß. Kriegsministeriums. Berlin 1894.

gemeinen Umrissen bekannt; will man ihn vollständig verstehen, so muß man auch genau die Bahnen der einzelnen Wasserteilchen und die Größe der ins Spiel kommenden Kräfte ermitteln. Von den beiden sich daraus ergebenden Problemen wollen wir nur das zweite ins Auge fassen.

Die der Flüssigkeit mitgeteilte Bewegungsenergie[1]) ist höchstens gleich derjenigen, um welche das Geschoß beim Durchgange dnrch die Flüssigkeitsmasse ärmer geworden ist. Höchstens, denn ein (vermutlich nur geringer) Teil ist nicht in Bewegung, sondern unmittelbar in Wärme umgesetzt worden.

Diese Energie ist unter gewissen Voraussetzungen von Kurlbaum berechnet worden; Messungen liegen noch nicht vor. Das Resultat der mathematischen Betrachtung läßt sich kurz so aussprechen: Der Energieverlust wächst sehr stark mit der Geschoßgeschwindigkeit.[2])

In der vorliegenden Arbeit ist zum ersten Male der Energieverlust unter verschiedenen Bedingungen *gemessen* worden.

Wenn das Geschoß in die Wassermasse eintritt, habe es die Geschwindigkeit V (hier immer „Eintrittsgeschwindigkeit" genannt); seine lebendige Kraft ist dann $m\,V^2/2$, wenn m seine Masse bedeutet. Verläßt es das Wasser mit der „Austrittsgeschwindigkeit" v, so ist der Energieverlust $m\,V^2/2 - m\,v^2/2$. Die Aufgabe läuft also darauf hinaus, *Geschwindigkeiten* zu messen.

Wir benutzten dazu die bequeme und genaue Methode von Radocović.[3]) Das Geschoß durchschlägt zuerst den Draht A[4]) (vgl. Fig. 1) und leitet dadurch die Entladung des

1) Wir folgen hier den Darlegungen von Kurlbaum (in der Schrift des Kriegsministeriums).

2) Genaueres vgl. p. 573.

3) M. Radocović, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **109**. Abt. 2a. 1900.

4) Die zu durchschlagenden Drähte (aus Kupfer, besponnen, 0,21 mm dick) waren in einem Abstand von 2,75 mm im Zickzack über Holzrahmen gespannt, die etwa 20 cm im Quadrat maßen. Da es sehr auf gute Isolation ankam, kitteten wir auf die schmalen Holzleisten etwas breitere gezähnte Hartgummileisten, und trugen dafür Sorge, daß der Draht

Kondensators *N* durch den induktionsfreien Widerstand *W* ein. Diese hört auf, wenn der zweite Draht *B* durchschlagen ist,

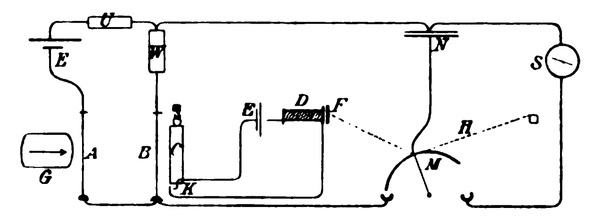


Fig. 1. Skizze der Versuchsanordnung.
E E Akkumulatoren, *U W* Widerstände (*W* = 3000—4000 Ohm), *G* Wassergefäß, *A*, *B* Drahtgitter, *C* Brett mit Öffnungskontakt *K*, *D* Elektromagnet mit Anker *F*, *N* Kondensator (0,5 Mikrofarad), *S* Drehspulengalvanometer, *M* Wippe, *H* Gummischnur.

und aus der Restladung q des Kondensators ergibt sich die zwischen den beiden Stromöffnungen verflossene Zeit t nach der Formel

$$t = \frac{W c}{0,43429} (\log q_0 - \log q),$$

worin c die Kapazität des Kondensators und q_0 seine Anfangsladung bedeuten. Volle Ladung und Restladung werden in bekannter Weise aus den Ausschlägen eines ballistischen Galvanometers bestimmt.

Um die Restladung möglichst bald nach dem Schusse messen

---

nirgends das Holz berührte. Die Art der Wickelung ist aus der Fig. 2 zu erkennen.

Wenn ein Gitter durchschossen war, konnte es leicht in einigen Minuten wieder geflickt werden. Der Widerstand, den es dem Geschoß entgegensetzte, wurde bei der geringen Drahtstärke nicht in Rechnung gezogen.

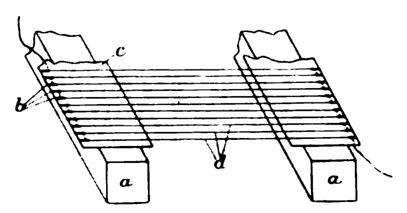


Fig. 2. Schematische Darstellung der Drahtwickelung. *a* Holzleisten, *b* Einschnitte in den Hartgummistreifen *c*, *d* Drähte.

Das beschossene Wassergefäß und die beiden Gitter standen in einem Kellerraume des Institutes, die anderen Apparate, durch fünf Drähte (*A E*, *B W*, *BM*, *KE*, *KD*) damit verbunden, in einem darüber gelegenen Zimmer. Die beiden Gitter hatten voneinander einen Abstand von $^1/_2$ oder 1 m.

zu können, war eine besondere Einrichtung getroffen worden. Das Geschoß drang nämlich dicht hinter dem zweiten Drahtgitter durch ein dickes Brett *C*, bewegte dieses ein wenig und löste dadurch einen elektrischen Kontakt *K*. Infolgedessen ließ der Elektromagnet *D* den Anker *F* los, und die Wippe *M* wurde von dem Gummiband *H* umgerissen.

Leider konnten wir wegen der ungenügenden Schußsicherheit des Kellerraumes nicht das Militärgewehr benutzen. Statt dessen wendeten wir die Mauserselbstladepistole an, die ebenfalls ein zylindro-ogivales Stahlmantelgeschoß (von 5,5 g Gewicht) besitzt.

Es galt zunächst festzustellen, wie sich die gleiche Wasserschicht verschiedenen Geschoßgeschwindigkeiten gegenüber verhält. Die Deutsche Waffen- und Munitionsfabrik Berlin-Karlsruhe hatte uns in dankenswerter Weise Patronen mit verschiedenen Ladungen zur Verfügung gestellt. Damit wurden folgende Geschwindigkeiten erreicht:[1])

Ladung: Rottweiler Blättchenpulver g	Geschwindigkeit m/sec	Wahrscheinlicher Fehler m/sec	Anzahl der Messungen
0,50 [2])	445,7	±4,6	12
0,43	368,2	±8,0	8
0,37	312,3	±5,0	7
0,31	266,9	±4,6	6

Die Munition war also recht gleichmäßig, bis auf die Patronen mit 0,43 g Pulver. Patronen mit geringerer Ladung haben wir nicht benutzt; denn wir machten die unliebsame Erfahrung, daß die Drähte von Geschossen, die mit einer geringeren Geschwindigkeit als 200 m/sec ankamen, nicht mehr durchrissen, sondern nur auseinander gedrängt wurden.[3])

1) Immer stand hier, wie bei den übrigen Versuchen, das erste Gitter 6 m von der Laufmündung entfernt.

2) Normale Ladung.

3) Wir hätten auch diese Geschwindigkeiten noch messen können, wenn wir Gitter aus Stanniolstreifen auf Paraffinpapier angewendet hätten. Wir verzichteten aber bald darauf wegen der großen Schwierigkeiten, auf die man beim Flicken dieser Gitter stößt.

Das beschossene Wassergefäß war ein beiderseits offener sehr starker Blechzylinder von 10 cm Länge und 15 cm Durchmesser, der den Wasserstoß beim Schusse gut aushielt, ohne zu zerreißen. Die Öffnungen bespannten wir mit angefeuchtetem Pergamentpapier; zuerst mit Hilfe von Eisen- oder Kupferdraht, später mittels starker Gummiringe. Nach der Füllung bauchte sich das Papier beiderseits etwa 1,5 cm vor, so daß die tatsächlich durchschlagene Wasserschicht eine Dicke von etwa 13 cm hatte.

Die Resultate des Schießens sind aus folgender Tabelle zu ersehen.

Tabelle 1.

Schießen auf eine Wasserschicht von 13 cm Dicke mit Geschossen verschiedener Geschwindigkeit.

Nr.	Eintritts-geschwindigkeit m/sec	Austritts-geschwindigkeit m/sec	Nr.	Eintritts-geschwindigkeit m/sec	Austritts-geschwindigkeit m/sec
1	445,7	394,1	8	368,2	347,8 **
2		401,9	9		334,8 **
3		397,0	10		* 304,8 **
4		399,6	11		* 291,8 **
5		416,8	12		352,8 **
6		395,6 **	13		345,3 **
7		* 383,0 **			
14	312,3	(319,5)	23	266,9	* 220,9
15		292,0	24		243,1
16		288,0	25		235,4
17		305,0	26		243,3 **
18		277,6	27		255,2 **
19		270,2	28		243,3 **
20		288,5 **	29		254,0 **
21		282,8 **	30		242,8 **
22		* 260,7 **	31		* 226,4 **

* Vermutlich Querschläger.

** Gitterdistanz 50 cm; sonst 100 cm.

Bei der Verwertung der Resultate müssen die Fehlerquellen berücksichtigt werden.

Von den unvermeidlichen zufälligen Fehlern können besonders zwei Arten das Bild erheblich trüben:

1. Wenn das ausspritzende Wasser das erste Gitter benetzt und seine Isolation stört, ehe das zweite Gitter durchschossen ist, entladet sich der Kondensator nur unvollkommen, und die Geschwindigkeit erscheint größer, als sie wirklich ist. Dieser Fehler hat einige Versuche unbrauchbar gemacht; er war immer leicht daran zu erkennen, daß ganz unmögliche Geschwindigkeiten resultierten. Auch bei Schuß Nr. 14 scheint Derartiges vorzuliegen; wir halten uns deshalb für berechtigt, diesen Versuch auszuschließen.

2. Wenn das Geschoß nicht grade, sondern als „Querschläger" auf das Wasser trifft, so wird es vermehrten Widerstand finden. Besondere Versuche (Schüsse auf Papierblätter) zeigten uns, daß solche Querschläger sehr selten sind. Dagegen deutet die Form der Schußlöcher im Brett *C* (vgl. Fig. 1) darauf hin, daß die Geschosse, *während sie durch das Wasser dringen*, sehr oft eine Verlagerung der Rotationsachse und dadurch eine starke Verzögerung in der hinteren Hälfte der Wassermasse erfahren; besonders stark scheint diese bei den Schüssen Nr. 7, 10, 11, 22, 23, 31 gewesen zu sein. Wir glauben aber, die genannten Versuche auf diese Vermutungen hin nicht unberücksichtigt lassen zu dürfen; die arithmetischen Mittel der Geschwindigkeiten werden nur wahrscheinlich dadurch etwas zu niedrig ausfallen.[1])

1) Es muß noch erklärt werden, warum der Gitterabstand teils 100, teils 50 cm beträgt. Zuerst haben wir immer im Interesse größerer Genauigkeit mit der größeren Distanz geschossen. Dabei mißlingen aber zahlreiche Versuche, besonders bei noch dickeren Wasserschichten; denn die Geschosse weichen oft von der graden Bahn ab (in der Mehrzahl der Fälle nach rechts) und verfehlen das zweite Gitter. Wir waren schließlich genötigt, um Zeit und Material zu sparen, auf 50, ja auf 30 cm herunterzugehen. Dann lassen sich auch die abirrenden Geschosse noch einfangen. Streng genommen müßte man den Resultaten verschiedenes Gewicht beilegen, da eben bei kleiner Distanz auch die (starke Verzögerung erleidenden) Querschläger mitgemessen werden. Das ist auch deutlich in der Tab. 1 zu erkennen: von den sechs Schüssen mit auffällig geringer Geschwindigkeit entfallen fünf auf den Gitterabstand von 50 cm.

Die Schüsse mit 30 cm Gitterabstand fielen so ungleichmäßig aus, daß wir sie nicht berücksichtigen konnten. Unsere letzten Versuche über die am Schlusse der Arbeit berichtet wird (p. 577 u.), sind wieder mit 1 m G.-A. angestellt worden; wenn auch kaum ein Drittel davon gelingt, so entschädigen die wenigen guten dafür durch ihre Gleichmäßigkeit.

Aus der Tab. 1 ergeben sich folgende Mittelwerte:

Tabelle 2.

Geschwindigkeits- und Energieverlust bei verschiedenen Eintrittsgeschwindigkeiten.

Eintrittsgeschw. m/sec	Entsprech. leb. Kraft mkg	Austrittsgeschw. m/sec	Entsprech. leb. Kraft mkg	Geschw.-Verlust m/sec	Energieverlust mkg
445,7	55,7	398,3	44,5	47,4	11,2
368,2	38,0	329,4	30,4	38,8	7,6
312,3	27,3	283,1	22,5	29,2	4,8
266,9	20,0	240,5	16,2	26,4	3,8

Ein Vergleich der Kolumnen 1 und 5 zeigt deutlich eine wichtige Tatsache: der Geschwindigkeitsverlust ist etwa gleich einem Zehntel der Eintrittsgeschwindigkeit. Es läßt sich also für die Wasserstrecke von 13 cm und Geschwindigkeiten von 250—450 m/sec das Gesetz aussprechen:

Der Geschwindigkeitsverlust des Geschosses in Wasser ist proportional der ersten Potenz, der Energieverlust proportional der zweiten Potenz der Eintrittsgeschwindigkeit.[1])

Wie es sich bei anderen Wasserstrecken verhält, wissen wir nicht, da wir darüber nur eine unzureichende Versuchsreihe mit 30 cm Gitterabstand besitzen. Wir vermuten aber, daß das ausgesprochene Gesetz allgemeine Gültigkeit besitzt. Über eine indirekte Bestätigung dieser Ansicht siehe p. 577.

Kurlbaum[2]) kommt durch theoretische Betrachtungen zu denselben Resultaten. Seine Formel lautet:

$$y = \frac{4\, m \log \mathrm{nat} \dfrac{v_0}{v}}{\pi\, a^2 \log \mathrm{nat} \dfrac{\sqrt{b^2 + a^2}}{a}},$$

worin y die Dicke der Wasserschicht, m die Masse, a den Radius des Geschosses, b den Radius des Wasserzylinders, v_0 die Eintritts- und v die Austrittsgeschwindigkeit bedeuten (alles in Grammen und Zentimetern).

1) Die zweite Hälfte des Gesetzes ergibt sich durch eine einfache Rechnung aus der ersten.

2) F. Kurlbaum, l. c.

In den vorliegenden Versuchen sind alle Größen konstant mit Ausnahme von v_0 und v. Statt der obigen Formel kann also geschrieben werden

$$v_0 / v = \text{konst.},$$

und das ist nach einer kleinen Umrechnung identisch mit dem von uns soeben ausgesprochenen Gesetz.

Setzt man nun in die Kurlbaumsche Gleichung die Zahlenwerte ein:

$$y = 13\,\text{cm}, \quad m = 5{,}5\,\text{g}, \quad a = 0{,}3815\,\text{cm}, \quad b = 7{,}5\,\text{cm},$$

so erhält man

$$\frac{v_0}{v} = 2{,}24,$$

während doch nach unseren Versuchen ist:

$$\frac{v_0}{v} = \frac{10}{9} = 1{,}11\,.$$

Erst die Formel

$$y = 7{,}64 \cdot \frac{4\,m \log \text{nat} \frac{v_0}{v}}{\pi\,a^2 \log \text{nat} \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{a}}$$

würde unsere Versuche befriedigend wiedergeben. Oder in Worten: Ein Geschwindigkeitsverlust von einem Zehntel der Eintrittsgeschwindigkeit tritt ein: nach unseren Versuchen in 13 cm Wasser; nach Kurlbaum in 13/7,64 = 1,7 cm Wasser. Kurlbaum hat also für den Wasserwiderstand viel zu hohe Werte gefunden.

Abweichungen von dieser Größe können nicht dadurch begründet sein, daß das von uns benutzte Geschoß eine andere Spitze hat, als sie Kurlbaum seinen Berechnungen zugrunde legt. Nach unserer Meinung ist die eine seiner Voraussetzungen unhaltbar, daß das Wasser absolut inkompressibel sei. Es leuchtet ein, daß diese Annahme zu hohe Widerstandswerte ergeben muß.

In einer zweiten Versuchsreihe haben wir den Energieverlust in Wasserdichten *verschiedener* Dicke bei *derselben* Eintrittsgeschwindigkeit untersucht.

Wir benutzten Blechzylinder von der Art des schon beschriebenen. Die Resultate sind aus der Tab. 3 zu ersehen.

Tabelle 3.

Schießen auf verschiedene Wasserschichten mit voller Ladung.

Nr.	Wasserstrecke cm	Austrittsgeschwindigkeit m/sec	Nr.	Wasserstrecke cm	Austrittsgeschwindigkeit m/sec
	0	445,7	5	13	416,8
32	4	427,9	6	13	395,6
			7	13	*383,0**
33	8	416,3			
34	8	427,9	38	23	*344,4
35	8	421,0	39	23	(408,1)
36	8	*406,4	40	23	365,0**
37	8	419,4	41	23	359,6**
			42	23	[356,2
1	13	394,1	43	23	360,5
2	13	401,9	44	23	355,0
3	13	397,0	45	23	358,2
4	13	399,6	46	23	363,5]

* Vermutlich Querschläger.
** Gitterdistanz 50 cm; sonst 100 cm.

Den Schuß Nr. 39 möchten wir aus den oben (p. 572) entwickelten Gründen ausschließen.

Die Schüsse 42—46 bedürfen einer näheren Erläuterung. Sie sind mit Patronen einer frischen Sendung gemacht worden, bei denen die Geschwindigkeit des Geschosses (Mittel aus zwölf Messungen) etwas geringer ist als früher, nämlich $428,9 \pm 5,1$ m gegen $447,7 \pm 4,8$ m. Deshalb sind auch die in der Tab. 3 eingeklammerten Zahlen nicht ohne weiteres mit den anderen vergleichbar. Jedoch kann man aus ihnen Schlüsse ziehen, die für den vorliegenden Zweck hinreichen.

Die Geschwindigkeitsverluste der Schüsse 42—46 sind der Reihe nach in Metern: 72,7; 68,4; 73,9; 70,7; 60,4. Aus den früheren Versuchen (Tabb. 1 und 2) folgt, daß einer größeren Eintrittsgeschwindigkeit auch ein größerer Geschwindigkeitsverlust entspricht. Also ist sicher, *daß die angegebenen Zahlen*

durchweg kleiner sind, als sie mit der alten Munition ausgefallen wären.

Nimmt man jetzt das Mittel 77,6 aus den Geschwindigkeitsverlusten der Versuche 38, 40, 41 und 42—46, so wird auch dieses etwas kleiner sein, als wenn alle Versuche mit der früheren Munition angestellt wären. So ist die Bezeichnung > 77,6 in der nächsten Tabelle zu verstehen.

Aus der Tab. 3 folgen die Mittelwerte:

Tabelle 4.

Geschwindigkeitsverlust eines Geschosses von 445,7 m/sec Geschwindigkeit bei verschiedenen Wasserstrecken.

Wasserstrecke cm	Austrittsgeschwindigkeit m/sec	Geschwindigkeitsverlust m/sec
0	445,7	0
4	427,9	17,8
8	417,9	27,8
13	398,3	47,4
23		>77,6

Diese Versuchsreihe läßt sich leicht zur ersten in Beziehung bringen.

Nimmt man an, das p. 573 von uns ausgesprochene Gesetz gelte auch für unendlich dünne Wasserschichten, so liefert die mathematische Betrachtung, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll, für *variable* Wasserstrecken die Formel:

$$v = v_0 \cdot e^{-by}, \tag{1}$$

worin bedeuten: v_0 die Eintrittsgeschwindigkeit, v die Austrittsgeschwindigkeit, y die Wasserstrecke, e die Basis der natürlichen Logarithmen und b eine positive Konstante. Die in der Tabelle niedergelegten Zahlen stimmen sehr gut zu dieser Formel, wie sogleich gezeigt werden soll. Daraus folgt dann mit großer Wahrscheinlichkeit, daß die eben gemachte Voraussetzung richtig ist: *der Geschwindigkeitsverlust eines Geschosses in einer unendlich dünnen Wasserschicht ist proportional der Geschwindigkeit beim Eintritt in dieselbe.*

In der vorliegenden Versuchsreihe ist v und y **bekannt;** also ließe sich nach der Methode der kleinsten Quadrate der

wahrscheinlichste Wert für b berechnen. Hier genügt es aber, wenn man nur ein Versuchsresultat der Rechnung zugrunde legt, z. B. den Wert der Austrittsgeschwindigkeit v bei einer Wasserdicke von 13 cm, also 398,3 m. Dann erhält man für b die Zahl 1 / 115,5. Berechnet man aus der Gleichung, die nunmehr lautet

$$v = 445{,}7 \,.\, e^{-\frac{y}{115{,}5}}$$

die Werte für v, so erhält man:

y cm	v berechnet m / sec	Geschwindigkeitsverlust berechnet m / sec	Geschwindigkeitsverlust gefunden m / sec
0	445,7	0	0
4	430,5	15,2	17,8
8	415,9	29,8	27,8
13	398,3	47,4	47,4
23	365,2	80,5	> 77,6

Die letzten beiden Kolumnen stimmen gut miteinander überein.

Aus der Formel (1), p. 576, läßt sich noch eine wichtige Folgerung ziehen. Der Geschwindigkeitsverlust δ ist nach ihr

$$\delta = v_0 - v = v_0 (1 - e^{-b y}).$$

Bei *konstanten* Wasserdicken ist die ganze Klammer konstant, also kann man schreiben (k eine Konstante):

$$\delta = k \,.\, v_0$$

und das ist das auf p. 573 ausgesprochene Gesetz. Nach der zweiten Versuchsreihe gilt dieses also *für alle Wasserstrecken.* Damit ist unsere oben ausgesprochene Vermutung bestätigt.

Außerdem haben wir noch, von theoretischen Erwägungen ausgehend, die wichtige Frage untersucht, ob zwei Wasserschichten von je a cm Dicke, in einem kleinen Abstand hintereinander aufgestellt, dem Geschosse denselben Widerstand entgegensetzen wie eine Schicht von $2a$ cm. Zwölf Schüsse (mit 428,9 m / sec Eintrittsgeschwindigkeit) auf eine Wasserschicht von 15 cm ergaben die Austrittsgeschwindigkeit $378{,}3 \pm 7{,}0$ m/sec,

zwölf weitere auf 2 mal 7,5 cm lieferten 374,7 ± 9,2 m/sec (Gitterabstand immer 1 m). Ein deutlicher Unterschied ist darin nicht zu erkennen, also ist die Frage zu bejahen.

Aus unseren Versuchen hat sich für den Geschwindigkeits- und Energieverlust eines Geschosses in Wasser und damit auch für die auf das Medium übertragene Bewegungsenergie ein Gesetz ergeben, das in der Form mit dem von Kurlbaum aufgestellten übereinstimmt, in der Größe der Konstanten aber beträchtlich von demselben abweicht. Dieses Gesetz macht es unter anderem auch verständlich, weshalb die Explosionswirkungen erst bei größeren Geschwindigkeiten beobachtet werden.

Es wäre wünschenswert, wenn ähnliche Untersuchungen auch auf schwerere Geschosse mit größerer Geschwindigkeit ausgedehnt würden. Wenn man über mehrere Hilfskräfte verfügt, können bequem 3—4 Versuche in einer Stunde gemacht werden. Von diesen mißlingt ein großer Teil; doch auch da ließe sich Abhilfe schaffen, wenn man Rundkugeln benutzte, bei denen es keine Querschläger gibt.

Königsberg i. Pr., Physiologisches Institut.

(Eingegangen 30. August 1905.)

7. *Zur Geometrie der Doppelbrechung;* *von Georg Wulff.*

1. Die vorliegende Notiz ist den allbekannten Interferenzkurven gewidmet, welche man in den Kristallplatten im konvergenten polarisierten Lichte beobachtet. Es wird hier ein einfacher und zugleich genauer geometrischer Ausdruck für den Gangunterschied der beiden ebenen Lichtwellen gegeben, welche durch Zerlegung einer in die Kristallplatte unter beliebigem Winkel eintretenden ebenen Lichtwelle entstehen. Damit wird auch die genaue Definition der oben erwähnten Kurven gegeben und eine genaue Berechnung der Lichtstärke in jedem Punkte des Interferenzbildes ermöglicht, was seinerseits zu einer einfachen Methode führt, die Form derjenigen Flächen genau zu prüfen, welche die Verbreitung des Lichtes in den Kristallen bestimmen.

2. Es sei (Fig. 1) K der Querschnitt einer Kristallplatte mit der Einfallsebene einer ebenen Lichtwelle, deren Normale so mit der Plattennormale NN' den Einfallswinkel r_1 bildet. Diese Welle teilt sich beim Eintritte in die Platte in zwei andere, deren Normalen oa und ob gegen die Plattennormale unter den Brechungswinkeln r' und r'' geneigt sind. Wenn, wie es hier angenommen wird, die Platte mit zwei optisch verschiedenen isotropen Mitteln I und II sich berührt, so

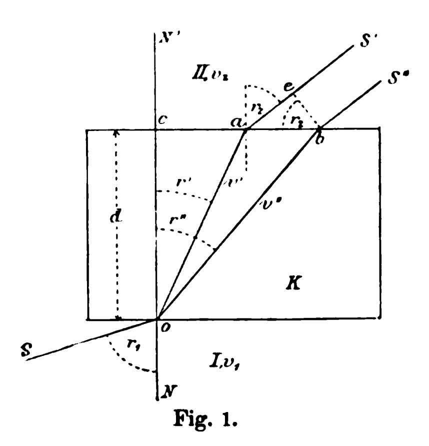


Fig. 1.

bilden die Normalen as' und bs'' der beiden aus der Platte heraustretenden Wellen mit der Plattennormale den Austrittswinkel r_2, der von dem Winkel r_1 verschieden ist. Wenn wir

die Dicke der Platte d nennen und die Lichtgeschwindigkeiten in der Kristallplatte nach den Richtungen oa und ob gleich v' und v'', im Mittel II gleich v_2 und in der Luft gleich v setzen, so haben wir bekanntlich für den Gangunterschied g der beiden Wellen die Formel[1])

$$g = dv(\cos r'/v' - \cos r''/v''),$$

oder, wenn wir die Brechungsindizes $n' = v/v'$ und $n'' = v/v''$ einführen:

$$g = d(n' \cos r' - n'' \cos r''). \tag{I}$$

3. Die Formel (I) läßt sich sehr einfach geometrisch deuten. Ziehen wir (Fig. 2) in der Einfallsebene um 0 als Mittelpunkt: 1. einen Kreis i_2 mit dem Halbmesser $n_2 = v/v_2$ und 2. die beiden Schnittkurven i' und i'' der Indexfläche der Kristallplatte mit der Einfallsebene. Dann besteht die bekannte Konstruktion der gebrochenen Wellennormalen oa und ob darin, daß wir 1. den Halbmesser op parallel den Wellennormalen as' bez. bs'' und 2. durch den Punkt p eine Gerade parallel der Platten-

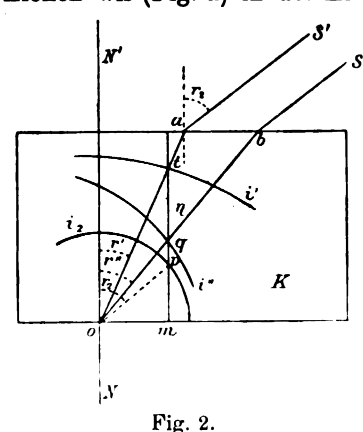


Fig. 2.

1) Indem man be (Fig. 1) senkrecht zu as' zieht, bekommt man den Zeitunterschied z der beiden Wellen:

$$z = oa/v' + ae/v_2 - ob/v''.$$

Aus der Figur ersieht man, daß

$$oa = d/\cos r', \qquad ob = d/\cos r'',$$

$$ae = ab \sin r_2 = (cb - ca) \sin r_2 = d(\operatorname{tg} r'' - \operatorname{tg} r') \sin r_2 .$$

Tragen wir diese Werte der Strecken in den Ausdruck für z und berücksichtigen wir das Brechungsgesetz

$$\sin r_2 / v_2 = \sin r'/v' = \sin r''/v'',$$

so bekommen wir nach den nötigen Umformungen:

$$z = d(\cos r'/v' - \cos r''/v'').$$

Der Gangunterschied g ist die der Zeit z entsprechende Luftschicht; also wenn v die Lichtgeschwindigkeit in der Luft bedeutet, hat man $g = vz$.

normale NN' ziehen. Diese Gerade trifft die Schnittkurven i' und i'' der Indexfläche in den Punkten q und t, durch welche die beiden gebrochenen Normalen oa und ob gehen sollen.

Wenn wir die Strecke tq, welche wir η nennen werden, betrachten, so finden wir sie gleich

$$\eta = mt - mq = ot \cos r' - oq \cos r'' = n' \cos r' - n'' \cos r''.$$

Man hat also

(II) $$\eta = g/d.$$

Für die zweite für uns wichtige Strecke om, die wir ϱ nennen wollen, bekommen wir

(III) $$\varrho = n_2 \sin r_2.$$

Es sind also ϱ die Abszisse und η die Differenz der dieser Abszisse entsprechenden Ordinaten derjenigen Schnittkurven, welche die Indexfläche mit der Einfallsebene der Lichtwelle in der Kristallplatte bildet.

4. Betrachten wir alle Querschnitte der Platte, welche durch ihre Normale NN' gehen und ziehen wir in allen diesen Querschnitten diejenigen Geraden mt, für welche die Strecke η die gleiche ist, so bildet der geometrische Ort der Punkte m auf der Plattenoberfläche eine Kurve, welche die Kurve gleichen Gangunterschiedes ist. Die Strecken $om = \varrho$ werden die Radienvektoren dieser Kurve sein; sie sind proportional dem Sinus des Austrittswinkels der Wellen in dem betreffenden Querschnitte, und der Proportionalitätsfaktor ist gleich dem Brechungsindex desjenigen isotropen Mittels, in welches die Wellen aus der Platte austreten. Eine Kurve des gleichen Gangunterschiedes ist also eine Kurve des gleichen Abstandes der beiden Schalen der Indexfläche in der Richtung der Plattennormale. Sie ist einem sich zwischen den beiden Schalen der Indexfläche bildenden Newtonschen Ringe analog, nur wird der Abstand η nicht doppelt gerechnet.

Man kann η durch die Anzahl m der Wellenlängen in der Luft λ ausdrücken:

(IV) $$\eta = m\lambda/d.$$

Die Größe η wird also mit der Einheit λ/d gemessen.

5. Es sind zwei Methoden möglich, die Kurven gleichen Gangunterschiedes zu beobachten.

a) Es wird der Austrittswinkel in der Luft direkt gemessen, welcher einer gegebenen Größe von η entspricht. Das läßt sich mit einem Goniometer in folgender Weise erzielen. Entfernen wir den Spalt am Kollimator und schieben wir in denselben einen Polarisator ein. Das Fernrohr, mit einem Analysator versehen, stellen wir dem Kollimator gegenüber. Die Platte wird an der Goniometerachse parallel derselben fixiert und mit derselben gedreht. Die beiden Wellen, in welche eine aus dem Kollimator auf die Platte einfallende Welle in der Platte zerlegt wird, treffen das Objektiv des Fernrohres und konvergieren in einem Punkt dessen Brennebene, wo sie interferieren. Wenn η einer geraden oder ungeraden Anzahl von $\lambda/2d$ entspricht, beobachtet man im Sehfelde eine dunkle oder eine helle Stelle, welche leicht durch das Drehen des Goniometerkreises samt der Platte auf das Fadenkreuz gebracht werden kann. Die Richtung der dieser Stelle entsprechenden Wellen wird auf dem Goniometerkreise abgelesen. Der Austrittswinkel in der Luft r wird gefunden, wenn man noch die Richtung der Plattennormale mit dem Gaussschen Okulare bestimmt, oder, wenn die Platte symmetrisch ist, durch die Halbierung der Ablesungen, welche den beiden symmetrisch liegenden Interferenzstellen entsprechen.

b) Am Goniometer kann man im Gesichtsfelde nur kleine Bogen weniger Interferenzstreifen auf einmal übersehen. Am Polarisationsmikroskop erhält man in der Hauptbrennebene des Objektives, dank der großen Apertur desselben, das Bild der ganzen Schar von Kurven des gleichen Gangunterschiedes. Das Bild einer solchen Kurve ist dabei der Kurve selbst ähnlich. Wenn die optische Achse des Mikroskopes mit der Plattennormale zusammenfällt, so ist in der oberen Hauptbrennebene des Objektives der Zentralabstand ξ der Spur der Welle, welche aus dem zwischen der Kristallplatte und dem Objektive sich befindenden Mittel von dem Brechungsindex n_2 auf das Objektiv unter dem Winkel r_2 einfällt, durch die von H. Abbe abgeleitete Formel gegeben:

$$\sin r_2 = \xi / f n_2 \,,$$

wo f die Äquivalentbrennweite des Objektives ist. Da aber

$$\varrho = n_2 \sin r_2 ,$$

so ergibt sich, daß

(V) $$\xi = f \varrho .$$

Diese Relation erlaubt, bei bekanntem f die Werte von ϱ aus der Messung von ξ mit einem Okularmikrometer zu erhalten. Man kann auch, wenn die Platte vorläufig am Goniometer beobachtet wurde und für sie die Werte von $\varrho\,(= \sin r)$ bekannt sind, nach der obigen Relation die Brennweite des Objektives aus der Messung von ξ bestimmen. Endlich kann man die Apertur des Objektives aus der maximalen sichtbaren Größe von ϱ erhalten.

6. Es wurde eine zur optischen Achse senkrechte Kalkspatplatte am Goniometer im gelben Natriumlichte untersucht.

Die Strecke η ist in diesem Falle gleich der Differenz der Ordinaten eines Kreises

$$y^2/\omega^2 + x^2/\omega^2 = 1$$

und einer Ellipse

$$y^2/\omega^2 + x^2/\varepsilon^2 = 1 ,$$

wo ω und ε der ordentliche und der außerordentliche Brechungsindizes des Kalkspats sind und $x = \sin r$ ist. Daraus folgt, daß

$$\eta = \sqrt{\omega^2 - \sin^2 r} - \frac{\omega}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2 r} .$$

Die folgende Tabelle gibt die Resultate der goniometrischen Messungen der r für die schwarzen Ringe und zwar für jeden zehnten Ring.

Nr. des Ringes	Ablesungen am Goniometer		Summe	Differenz	r
10	203° 5′	156° 45′	359° 50′	46° 20′	23° 10′
20	213 8	146 44	359 52	66 24	33 12
30	221 12	138 38	359 50	82 34	41 17
40	228 27	131 19	359 46	97 8	48 34
50	235 29	124 19	359 48	111 10	55 35
60	242 39	117 5	359 44	125 34	62 47
70	250 45	108 53	359 38	141 52	70 56
80	263 28	95 30	358 58	167 58	83 59

Setzen wir $\omega = 1{,}65850$ und $\varepsilon = 1{,}48635$, so bekommen wir für η folgende Werte:

Nr. des Ringes	η	Differenz
10	0,01181	
		0,01183
20	0,02364	
		0,01182
30	0,03546	
		0,01186
40	0,04732	
		0,01185
50	0,05917	
		0,01184
60	0,07101	
		0,01182
70	0,08283	
		0,01185
80	0,09468	

Es wurden also die Interferenzstreifen bis zum 80ten Ring beobachtet und der Austrittswinkel bis $83^0\ 59'$ gemessen. In diesen weiten Grenzen erwies sich der Zuwachs von η als vollständig konstant, womit die Richtigkeit der Formeln (II) und (III) vollkommen bewiesen wird.

Die Dicke der Platte, mit dem Mikrometer gemessen, ergab sich zu 0,495 mm. Aus der Formel (IV) läßt sich diese Dicke berechnen, wenn wir $m = 10$ setzen und die Größe der Wellenlänge für das Natriumlicht berücksichtigen

$$d = \frac{10 \times 0{,}000589 \text{ mm}}{0{,}01184} = 0{,}497 \text{ mm},$$

was mit der direkten Messung übereinstimmt.

7. Eine zur ersten Mittellinie der optischen Achsen senkrechte Aragonitplatte wurde am Goniometer untersucht.

Für diese Substanz wurden folgende Brechungsindizes angenommen:

$$\alpha = 1{,}53013, \quad \beta = 1{,}68157, \quad \gamma = 1{,}68589.$$

Die Platte wurde in drei Richtungen untersucht und zwar a) in der Ebene der optischen Achsen, b) senkrecht dazu und c) in der Richtung von 45^0 gegen jene Hauptschnitte.

a) In der Ebene der optischen Achsen. Messungen am Goniometer ergaben:

Nr. des Streifens	Ablesungen am Goniometerkreise		Summe	Differenz	r
0 (opt. Achse)	195° 30′	164° 45′	360° 15′	30° 45′	15° 22½′
10	203 43	156 32	360 15	47 11	23 35½
20	209 55	150 20	360 15	59 35	29 47½
30	215 12	145 2	360 14	70 10	35 5
40	219 59	140 16	360 15	79 43	39 51½
50	224 27	135 49	360 16	88 38	44 19
60	228 42	131 33	360 15	97 9	48 34½
70	232 54	127 22	360 16	105 32	52 46
80	237 5	123 10	360 15	113 55	56 57½
90	241 25	118 54	360 19	122 32	61 16
100	245 59	114 17	360 16	131 42	65 51
110	251 7	109 10	360 17	141 57	70 58½
120	257 34	102 45	360 19	154 49	77 24½

Für η bekommt man folgende Größen:

Nr. des Streifens	η	Differenz
0 (opt. Achse)	0,00016	
		0,00589
10	0,00605	
		0,00592
20	0,01197	
		0,00589
30	0,01786	
		0,00589
40	0,02377	
		0,00587
50	0,02964	
		0,00589
60	0,03555	
		0,00590
70	0,04145	
		0,00590
80	0,04735	
		0,00590
90	0,05325	
		0,00591
100	0,05916	
		0,00589
110	0,06505	
		0,00589
120	0,07094	

Die Größe η wurde dabei durch die Formel berechnet:

$$\eta = \sqrt{\beta^2 - \sin^2 r} - \frac{\gamma}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - \sin^2 r},$$

d. h.

$$\eta = \sqrt{2{,}82768 - \sin^2 r} - 1{,}10179\sqrt{2{,}34130 - \sin^2 r}.$$

Die Zahlen der obigen Tabelle mit der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen, geben

$$\eta = 0{,}005899\, m + 0{,}00016.$$

Das letzte Glied sollte eigentlich gleich Null sein, wenn die Brechungsindizes genau der Substanz der Platte entsprächen, was eigentlich nicht gewesen ist. Eine kleine Abweichung in der 5ten Dezimalstelle des Brechungsindex kann diese Differenz vollständig erklären. Zum Beispiel, wenn wir β um 0,00005 vermehren, so bekommen wir für den 10ten und 120ten Streifen 0,00610 und 0,07100 statt 0,00605 und 0,07094. Die Differenz erleidet dabei kaum eine Veränderung. Man hat nämlich 0,07100 – 0,00610 = 0,06490 und 0,07094 – 0,00605 = 0,06489.

b) In der Richtuug senkrecht zur Ebene der optischen Achse.

Hier wird η durch die Formel

$$\eta = \sqrt{\gamma^2 - \sin^2 r} - \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - \sin^2 r}$$

oder

$$\eta = \sqrt{2,84222 - \sin^2 r} - 1,09897\sqrt{2,34130 - \sin^2 r}$$

gegeben.

Da η von den optischen Achsen, wo es gleich Null ist, gezählt wird, und da in der Ebene der optischen Achsen von einer optischen Achse nach der Mitte der Platte sieben Streifen sich beobachten ließen, so entsprach der dritte Streifen in der Richtung senkrecht zur Ebene der optischen Achsen der Zahl $m = 10$. Es wurde je zehnter schwarze Streifen von da an anvisiert. Die Ergebnisse der Messungen am Goniometer sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Nr. des Streifens	Ablesungen am Goniometerkreise				Summe		Differenz		μ	
10	189°	30′	170°	30′	360°	0′	19°	0′	9°	30′
20	200	9	159	50	359	59	40	19	20	9½
30	207	4	152	55	359	59	54	9	27	4½
40	212	43	147	16	359	59	65	27	32	43½
50	217	42	142	18	360	0	75	24	37	42
60	222	18	137	44	360	2	84	34	42	17
70	226	38	133	23	360	1	93	15	46	37½
80	230	53	129	11	360	4	101	42	50	51
90	235	4	125	0	360	4	110	4	55	2
100	239	19	120	48	360	1	118	31	59	15½

Für die Strecke η erhalten wir folgende Werte:

Nr. des Streifens	η	Differenz
10	0,00604	
		0,00588
20	0,01192	
		0,00590
30	0,01782	
		0,00592
40	0,02374	
		0,00589
50	0,02963	
		0,00590
60	0,03553	
		0,00589
70	0,04142	
		0,00592
80	0,04734	
		0,00590
90	0,05324	
		0,00588
100	0,05912	

Mit der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen, gibt diese Tabelle:

$$\eta = 0{,}005895\, m + 0{,}00015.$$

Dieser Ausdruck stimmt sehr nahe mit demjenigen für die Achsenebene.

c) Wenn die Einfallsebene nicht mit einer Symmetrieebene zusammenfällt, so werden die Rechnungen etwas komplizierter. Man beziehe die Indexfläche auf die drei rechtwinkeligen Koordinatenachsen, deren zwei X_1 und X_2 in der Ebene der Kristallplatte liegen mögen. Die Spur der Einfallsebene auf der Ebene der Kristallplatte möge mit den Koordinatenachsen X_1 und X_2 die Winkel α und $90^0 - \alpha$ bilden. Der Sinus des Austrittswinkels ist die Strecke om (Fig. 2) dieser Spur und die beiden Koordinaten des Punktes m, nach den Achsen X_1 und X_2 genommen, sind $x_1 = \sin r \cos \alpha$ und $x_2 = \sin r \sin \alpha$. Zu diesen Koordinaten wird nun die dritte X_3 berechnet, welche, da die Indexfläche eine Fläche vierten Grades ist, vier Werte erhalten wird, deren zwei für die Lösung der Aufgabe maßgebend sind. Die Differenz derselben gibt die Strecke η.

Ich habe die Einfallsebene gleich geneigt zu den Symmetrieebenen der Aragonitplatte gewählt, und die Achsen X_1 und X_2 parallel der Ebene der optischen Achsen und

senkrecht darauf gezogen, so daß $\alpha = 45^0$ war. Es wurden am Goniometer in dieser Einfallsebene die drei Interferenzstreifen beobachtet, für welche $m = 20$, 40 und 60 war. Es wurde gefunden:

Nr. des Streifens	**Ablesungen am Goniometerkreise**		**Summe**	**Differenz**	***r***
20	**208° 55′**	**156° 2′**	**359° 57′**	**47° 53′**	**23° 56½′**
40	**215 41**	**144 17**	**359 58**	**71 24**	**35 42**
60	**224 58**	**135 2**	**360 0**	**89 56**	**44 58**

Zur Berechnung von η wurde die Gleichung der zu den Symmetrieachsen als Koordinatenachsen bezogenen Indexfläche benutzt:

$$(\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2 x_1^2 + \mathfrak{c}^2\mathfrak{a}^2 x_2^2 + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$
$$- [(\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2)x_1^2 + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{a}^2)x_2^2 + (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2)x_3^2] + 1 = 0,$$

wo

$$\mathfrak{a} = 1/\alpha, \quad \mathfrak{b} = 1/\beta, \quad \mathfrak{c} = 1/\gamma$$

sind.

Die Berechnung hat folgendes geliefert:

Nr. des Streifens	η	Differenz
20	0,01165	
		0,01162
40	0,02327	
		0,01176
60	0,03503	

Die dem Streifenabstande entsprechende Größe von η ist

0,011 65 : 20 = 0,000 582
0,023 27 : 40 = 0,000 582
0,035 03 : 60 = 0,000 584

Mittel: 0,000 583

statt 0,000589, welche Größe für die Symmetrieebenen gefunden wurde. Der Unterschied, der übrigens etwa 1 Proz. beträgt, hängt von der mangelhaften Orientierung der Platte ab, da ich eine Vorrichtung dazu hatte, welche eine Unsicherheit von etwa einem Grade verursachen konnte, was bei dem schiefen Verlaufe der Streifen im Gesichtsfelde, welcher in diesem Falle

stattfindet, jenen Fehler wohl hervorrufen konnte. Auch ist es schwierig, die schiefen Streifen genau auf das Fadenkreuz des Fernrohres einzustellen.

8. Da die oben erläuterte Konstruktion a priori als richtig anerkannt werden soll, so geben die obigen Messungen und Berechnungen eigentlich eine Art Prüfung der Form der Indexflächen in den ein- und zweiachsigen Kristallen. Diese Prüfung ist einfach und genau. Die Genauigkeit steigt bis in die fünfte Dezimalstelle der Brechungsindizes, und was die Einfachheit anbetrifft, so ist die Methode dem gewöhnlichen Praktikum für Studierende ganz zugänglich.

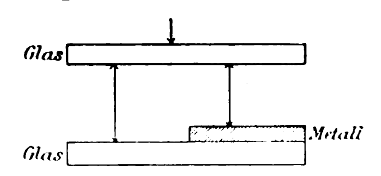
9. Wenn man die Interferenzstreifen in einer Kristallplatte am Goniometer in oben erläuterter Weise von der Plattennormale ab nach der Richtung der streifenden Inzidenz durchmustert, so wird man von einer Nebenerscheinung überrascht: die bei der Entfernung von der Plattennormale sich mehr und mehr zusammenrückenden Streifen gehen von einem gewissen Austrittswinkel ab mehr und mehr auseinander. Die Erscheinung läßt sich sehr leicht geometrisch erklären. Wenn die Streifen sehr dicht nebeneinander liegen, so kann man die entsprechenden Strecken η für wenige Anzahl Streifen als äquidistant ansehen, was den arithmetisch progressierenden Strecken $o\,m$ entsprechen würde, welche Strecken die Sinus der Austrittswinkel darstellen. Es entsprechen aber gegen 90^0 den gleichen Zuwächsen von Sinus die rasch zunehmenden Zuwächse von Winkeln, was die Überwiegung dieser, sozusagen Dispersion der Austrittswin kel der Streifen über die durch wachsende Doppelbrechung verursachte Verdichtung der letzteren hervorruft.

(Eingegangen 18. September 1905.)

8. *Eine Methode zur Bestimmung der Dicke und optischen Konstanten durchsichtiger Metallschichten; von W. Betz.*[1])

Es war bisher keine Methode ausgearbeitet, um die Dicke, Brechungs- und Absorptionskoeffizienten durchsichtiger Metallschichten in so einfacher Weise gleichzeitig zu ermitteln, daß eine Bestimmung dieser drei Größen im Laufe einer Untersuchung möglich war: man hätte diese Größen einzeln durch besondere, schwierige und unsichere Methoden ermitteln müssen.

Die *Dicke* konnte bestimmt werden, entweder durch Wägung der Schicht oder durch Interferenzmessung. Man verwandelt die Schicht in Jod oder Schwefelverbindungen und legt eine Glasplatte darauf. In der aus der Figur ersichtlichen Weise entstehen dann bei geeigneter Beleuchtung zwei Systeme von Interferenzstreifen, die gegeneinander verschoben sind, wobei die Verschiebung der Dicke der Schicht entspricht.[2]) Man muß die Metallschicht in einen durchsichtigen Körper verwandeln, da das Metall dem reflektierten Licht von der Schichtdicke abhängige Phasenänderungen erteilt. Diese Phasenänderung läßt sich nun eliminieren, wenn man über Schicht und freier Glasfläche eine zweite Metallschicht so erzeugt, daß die Stufenhöhe dieser Schicht der Dicke der ersten Schicht gleich bleibt. Die zweite Schicht muß nun so dick sein, daß sie überall dem Lichte gleiche Phasenänderungen bei der Reflexion erteilt. Wenn man noch die obere Glasplatte mit einer geeigneten Versilberung versieht, kann man Interferenzstreifen von außerordentlicher Schärfe erhalten. So hätte man eine vorzügliche Methode zur Dickenmessung, wenn man eben



1) Auszug aus der Leipziger Dissert.; Leipzig, Oskar Leiner 1905.
2) O. Wiener, Wied. Ann. **31**. p. 629, 1887.

immer sicher sein könnte, daß die zweite Schicht die verlangte Eigenschaft besitzt.

Man kann zwar eine Formel aufstellen, die gleiche Phasenänderungen auf beiden Stufen nicht voraussetzt, jedoch Gleichheit der Phasenänderung für die benachbarten Streifen entsprechenden Farben. Die Dicke wäre gegeben durch

$$2\,d = \frac{\lambda_1\,\lambda'_1}{\lambda'_1 - \lambda_1} - \frac{\lambda_2\,\lambda'_2}{\lambda'_2 - \lambda_2}\,,$$

wobei sich die Indizes 1 und 2 auf die beiden Streifensysteme, die Striche auf die Streifen nächst höherer Ordnung beziehen. Die Formel ist äußerst ungünstig; sie erlaubt eine Genauigkeit von $\pm\,50\,\mu\mu$, wenn die Wellenlängen auf $0{,}02\,\mu\mu$ genau bestimmt sind und die Interferenzstreifen einen Abstand haben, der einer Differenz der Wellenlänge von $15\,\mu\mu$ entspricht.

Brechungsexponenten wurden von Quincke[1]) mit dem Interferometer, von Kundt mit Hilfe durchsichtiger Metallprismen bestimmt.

Absorptionskoeffizienten sind von Wernicke[2]), Rathenau[3]), W. Wien[4]), und Hagen und Rubens[5]) bestimmt worden. Wernicke verglich photometrisch mit einem Vierordtschen Doppelspalt das Verhältnis der Durchlässigkeit zweier auf derselben Platte erzeugten Silberschichten von verschiedener Dicke. Die Schichten waren auf chemischem Wege erhalten. Unter der Annahme, daß beide Schichten gleich viel Licht reflektieren, kann man setzen

$$v = e^{-\frac{4\pi}{\lambda}\,n\,k\,.\,d}\,,$$

wo v das Intensitätsverhältnis, $n\,k$ den Absorptionskoeffizienten, d die Dickendifferenz der beiden Schichten bedeuten. Die Dicke wurde durch Interferenzmessung an der jodierten Schicht bestimmt. Der Wert von $n\,k$ stimmt mit aus Elliptizitätsbeobachtungen an massiven Metallen berechneten Werten überein.

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **119.** p. 379; **120.** p. 602. 1863; **142.** p. 177. 1871.

2) W. Wernicke, Pogg. Ergb. **8.** p. 65. 1878.

3) W. Rathenau, Diss. Berlin 1889.

4) W. Wien, Wied. Ann. **35.** p. 48. 1888.

5) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. **8.** p. 432. 1902.

W. Wien hat bolometrisch die Absporption einzelner Silber-, Gold- und Platinschichten bestimmt. Die Dicke wurde durch Wägung ermittelt und die reflektierte Strahlung besonders gemessen. Als Strahlungsquelle diente die leuchtende oder nichtleuchtende Flamme eines Bunsenbrenners. Vergleichungen mit Resultaten anderer Beobachter sind also nicht möglich.

Rathenau hat die Methode von **Wernicke** auf Gold, Silber, Kupfer, Platin, Eisen und Nickel angewandt. Die Stufendicke seiner Spiegel bestimmte er durch direkte Interferenzmessung an den *metallischen* Schichten. Zwischen den **Rathenau**schen Zahlen und den Werten von **Wernicke** und den Werten, die aus der Elliptizität des von massiven Metallen reflektierten Lichtes erhalten werden, bestehen bedeutende Unterschiede, die vielleicht daher rühren, daß die verglichenen Metallstufen nicht gleichwertig waren.

Hagen und **Rubens** haben über die Absorption ultravioletter, sichtbarer und ultraroter Strahlen in dünnen Metallschichten gearbeitet. Sie verglichen bolometrisch die Intensität der Strahlung einer Bogenlampe, wenn die zu untersuchende Schicht in den Strahlengang eingeschaltet war, mit der Intensität der Strahlung, wenn die Schicht daraus entfernt war. Werte für die Absorptionskoeffizienten konnten sie dann folgendermaßen erhalten. Wenn die Schicht so dick ist, daß der maximale Wert des reflektierten Lichtes schon erreicht ist, dann setzen sie[1])

$$\log p = - a\, d + \log(1 - R),$$

wo p das gemessene Intensitätsverhältnis bedeutet und a so definiert ist, daß

$$a = \frac{1}{d} \log_{10} p\,(1 - R).$$

$\log p$ ist also eine lineare Funktion der Dicke. Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem $\log p$ als Funktion der Dicke auf, so müssen sämtliche Punkte auf einer Geraden liegen, falls die Dicken groß genug waren. Die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels dieser Geraden gegen die Achse

1) Der Ansatz ist nicht einwandsfrei. Vgl. G. T. Walker, Ann. d. Phys. 10. p. 189. 1903.

der d ist dann gleich der gesuchten Absorptionskonstanten a. Die Dicken waren durch Wägung bestimmt worden. Untersucht wurden Gold, Silber, Platin. Werte der Brechungsexponenten konnten Hagen und Rubens durch Vergleichung mit früher von ihnen an massiven Metallen angestellten Messungen der Intensität des reflektierten Lichtes erhalten.

Die Konstanten zeigen gute Übereinstimmung mit den von Drude aus Elliptizitätsbeobachtungen abgeleiteten Werten.

Bei diesen Methoden ist nun immer vorausgesetzt, daß die Metallschicht so dick ist, daß das von der hinteren Metallfläche reflektierte Licht die Erscheinungen nicht merklich beeinflußt, d. h. die Schicht soll so dick sein, daß sie in doppelter Dicke undurchsichtig wäre. Für Gold und Silber trifft das nach Hagen und Rubens erst für eine Dicke von 50 $\mu\mu$, bei Platin schon bei 20 $\mu\mu$ zu.

Dünne Metallschichten zeigen nun je nach der Art der Herstellung so mannigfaltige Eigenschaften, daß es erwünscht ist, eine *allgemeine* und relativ einfache Methode auszuarbeiten, die die Dicken und optischen Konstanten auch dann zu bestimmen gestattet, wenn die oben verlangte, an sich sehr beträchtliche, untere Grenze der Dicke nicht erreicht ist.

Hr. Prof. Wiener stellte mir nun die Aufgabe, diese Größen aus der elliptischen Polarisation des durchgegangenen Lichtes und aus Intensitätsbeobachtungen zu berechnen.

Der einzuschlagende Weg war durch die theoretischen Arbeiten von Voigt[1]) und Drude[2]) gegeben. Direkt anwendbare Formeln sind jedoch von diesen Autoren nicht aufgestellt worden. Drude entwickelte zwar Formeln, die sogar den Einfluß von Oberflächenschichten zu eliminieren gestatten. Indessen verlangen sie große Absorptionskoeffizienten und große Dicke der Metallschicht und eine mir unerreichbare Genauigkeit in der Messung der elliptischen Polarisation des durchgegangenen Lichtes.

1. Theoretischer Teil.

Aus der elektromagnetischen Theorie ergibt sich für die elliptische Polarisation des bei schiefem Einfall durch eine

1) W. Voigt, Wied. Ann. **25.** p. 25. 1885.
2) P. Drude, Wied. Ann. **43.** p. 126. 1891.

planparallele, absorbierende Platte hindurchgegangenen Lichtes folgender Ausdruck [1])

$$(1)\quad \varrho e^{i\Delta} = \frac{N^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + n_1 n_2 \cos^2\varphi'}{N^2 \cos^2\varphi' + n_1 n_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2} \; \frac{+ N\cos\varphi'(n_1\cos\varphi_2 + n_2\cos\varphi_1)\dfrac{1+e^{-2iq}}{1-e^{-2iq}}}{+ N\cos\varphi'(n_1\cos\varphi_1 + n_2\cos\varphi_2)\dfrac{1+e^{-2iq}}{1-e^{-2iq}}}.$$

Hierin bedeuten:

ϱ = Amplitudenverhältnis,
Δ = Phasendifferenz,
$e^{-iq} = e^{-\frac{2\pi d}{\lambda} i \,.\, N/\cos\varphi'}$,
$e^{-ip} = e^{-\frac{2\pi d}{\lambda} i \,.\, n_2/\cos\varphi_2}$,
d = Schichtdicke,
φ_1 = Einfallswinkel,
$N = n(1 - ik)$,
$\cos\varphi' = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi_1}{N^2}}$ = Brechungswinkel im Metall,
$\cos\varphi_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\varphi_1}$ = Brechungswinkel in der Glasplatte, auf der das Metall niedergeschlagen ist.

Diese Gleichung ist nur zur Berechnung der Dicke brauchbar, wenn man n und nk kennt. Umgeschrieben lautet sie

$$(2)\quad \frac{1+e^{-2iq}}{1-e^{-2iq}} = \frac{\varrho e^{i\Delta}[N^2\cos^2\varphi' + n_1 n_2 \cos\varphi_1\cos\varphi_2]}{N\cos\varphi'[n_1\cos\varphi_2 + n_2\cos\varphi_1 - (n_1\cos\varphi_1 + n_2\cos\varphi_2)\,\varrho e^{i\Delta}]} \; \frac{- N^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - n_1 n_2\cos^2\varphi'}{N\cos\varphi'[n_1\cos\varphi_2 + n_2\cos\varphi_1 - (n_1\cos\varphi_1 + n_2\cos\varphi_2)\,\varrho e^{i\Delta}]}.$$

Die rechte Seite wird mit komplexen Zahlen ausgerechnet für Wertepaare von n und nk, die in später zu erläuternder Weise ausgewählt werden. Hierbei ist nun noch folgendes zu beachten: Die Dicke d der Metallschicht ist eine reelle Größe und als solche in den Grundgleichungen angesetzt. Dies gilt aber nicht mehr, sobald bei gegebener elliptischer Polarisation willkürliche optische Konstanten angenommen werden. Denn Gleichung (2) läßt sich schreiben:

$$e^d \,.\, e^{n(1-ik)\cos\varphi'} = f\{n(1-ik),\, \varrho e^{i\Delta},\, \varphi\}.$$

1) Eine Ableitung findet man in der Dissertation.

Im allgemeinen läßt sich nun eine komplexe Zahl durch Multiplikation mit einer reellen Zahl nicht in eine beliebige andere komplexe Zahl verwandeln. d ist hier also komplex anzusetzen. Der reelle und imaginäre Teil von d ist aus Gleichung (2) leicht zu bestimmen.

$\varrho e^{i\Delta}$ stellt noch nicht die beobachtete elliptische Polarisation dar; durch den Austritt aus dem Glas in Luft wird das Amplitudenverhältnis verändert. Wie sofort aus den Fresnelschen Gleichungen folgt, ist das beobachtete Amplitudenverhältnis noch mit $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ zu dividieren, um das in der Formel vorkommende $\varrho e^{i\Delta}$ zu erhalten.

Der entsprechende Ausdruck für das reflektierte Licht ist viel komplizierter, indem sowohl e^{-2iq} als e^{-4iq} darin vorkommen. Kombinationen mit den Ausdrücken für Amplitudenverhältnis und Phasendifferenz oder für Intensität des durchgegangenen Lichtes erlauben keine Eliminationen. Ich setze deshalb die Ausdrücke für das reflektierte Licht nicht hierher.

Wenn man Gleichung (2) auf Beobachtungen bei benachbarten Einfallswinkeln anwendet, wäre es möglich, das exponentielle Glied zu eliminieren. Für Einfallswinkel von 60° und 65° wird nämlich bereits für $nk = 2$ und kleine n

$$\frac{1 + e^{-2iq_{60}}}{1 - e^{-2iq_{60}}} \cdot N\cos\varphi'_{60} = \frac{1 + e^{-2iq_{65}}}{1 - e^{-2iq_{65}}} \cdot N\cos\varphi'_{65}$$

mit einer Ungenauigkeit von weniger als 1 Proz. Führt man die Elimination aus, so kommt man auf eine verhältnismäßig einfache, in N quadratische, komplexe Gleichung, aus der man n und nk im allgemeinen eindeutig bestimmen kann. Durch Einsetzen der Werte von n und nk in Gleichung (2) läßt sich die Dicke berechnen. Eine Kontrolle ergibt sich, indem man die Dicke durch dieselben Werte aus Absorptionsbeobachtungen mit Hilfe der weiter unten anzugebenden Gleichung (4) berechnet. Die Beobachtungen der Elliptizität sind jedoch so ungenau, daß weder die bei mehreren verschiedenen Einfallswinkeln erhaltenen Werte von n und nk noch die aus Elilptizität und Absorption bestimmten Dicken übereinstimmen. Wegen anfangs guter Resultate habe ich zahlreiche Versuche in dieser Richtung unternommen.

Zur Bestimmung der drei Unbekannten müssen also noch Gleichungen aus Intensitätsbeobachtungen gewonnen werden.

Für senkrechte Inzidenz hat man

$$4\,\frac{E}{D}\,e^{+ip'}\,.\,n_1 N = (n_1 + N)(n_2 + N)\,e^{+iq'} + (n_1 - N)(n_2 - N)\,e^{-iq'},$$

worin bedeuten

$\frac{E}{D}$ = **Verhältnis der einfallenden zur durchgehenden Amplitude,**

$$p' = \frac{2\pi d}{\lambda}\,n_2,$$

$$q' = i\,\frac{2\pi d}{\lambda}\cdot n\,(1 - i k) = +(\gamma + \nu i)\,d.$$

Es sei

$$(3)\quad \begin{cases} (n_1 + N)(n_2 + N) = n_1 n_2 + N(n_1 + n_2) + N^2 = \alpha + \beta i, \\ (n_1 - N)(N - n_2) = -\,n_1 n_2 + N(n_1 + n_2) - N^2 = \alpha' + \beta' i. \end{cases}$$

Man hat also

$$4\,n_1 N\cdot\frac{E}{D_2}\,e^{+ip'} = (\alpha + \beta i)\,e^{(\gamma + \nu i)d} + (\alpha' + \beta' i)\,e^{-(\gamma + \nu i)d}.$$

Durch Multiplikation mit der komplex konjugierten Gleichung erhält man, wenn D' die konjugierte Amplitude bezeichnet

$$16\,n_1^2\,(n^2 + n^2 k^2)\cdot\frac{E^2}{D\,D'} = (\alpha^2 + \beta^2)\,e^{+2d\gamma} + (\alpha'^2 + \beta'^2)\,e^{-2d\gamma}$$
$$+\,2\,(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\sin 2\,d\,\nu + 2\,(\alpha\alpha' + \beta\beta')\cos 2\,d\,\nu\,.$$

Das Glied mit $e^{-2d\gamma}$ ist relativ sehr klein und mit in fast allen Fällen genügender Annäherung kann man setzen

$$(4)\quad \begin{cases} e^{2d\gamma} = \dfrac{16\,n_1^2\,(n^2 + n^2 k^2)\,\dfrac{E^2}{D\,D'}}{\alpha^2 + \beta^2} \\ \qquad -\,\dfrac{2\,[(\alpha\alpha' + \beta\beta')\cos d\,\nu + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\sin 2\,d\,\nu]}{\alpha^2 + \beta^2}. \end{cases}$$

Das erste Glied der rechten Seite von (4) ist mindestens fünfmal so groß als das zweite. Um bei vorgelegtem n und $n\,k$ die Dicke d zu berechnen, kann man daher so verfahren, daß man das zweite Glied zuerst wegläßt und die Rechnung wiederholt, indem man das Korrektionsglied mit dem wahrscheinlichen Wert von d ansetzt.

Die Korrektion ist positiv bei $n < 1$, negativ bei $n > 1$ und übersteigt bei extremen Werten ($n = 0{,}1$, $n = 2{,}5$) nicht

5 $\mu\mu$, wenn die wirkliche Dicke in der Gegend von 10 $\mu\mu$ liegt. Bei 20 $\mu\mu$ Dicke beträgt die Korrektion 3 $\mu\mu$; bei 40 $\mu\mu$ ist sie zu vernachlässigen. Einmalige Wiederholung der Rechnung genügt in der Regel.

Es ist zu beachten, daß E^2/DD' noch nicht das Verhältnis der Intensitäten darstellt, wenn das erste Medium vom letzten verschieden ist. Wenn J_1 und J_2 die Intensitäten, A_1 und A_2 die Amplituden im ersten und letzten Medium bedeuten, dann gilt der Satz:

$$(5) \qquad \frac{J_1}{J_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} \cdot \frac{n_1}{n_2} \,.$$

In Formel (4) ist deshalb mit

$$\frac{E^2}{DD'} = \frac{J_1}{J_2} \cdot \frac{n_2}{n_1}$$

zu rechnen.

Zu einer dritten Gleichung wurde ich durch folgende Betrachtung geführt. Bei Schichten, die so dick sind, daß die vielfachen inneren Reflexionen ohne wesentlichen Einfluß sind, setzt sich für das durchgegangene Licht der gesamte Verlust aus folgenden Faktoren zusammen: 1. aus dem Reflexionsverlust an der vorderen Grenze, 2. aus der Absorption in der Schicht, 3. aus der Reflexion an der hinteren Grenze. Bei wachsender Dicke wird nun die Reflexion an der hinteren Grenze immer den gleichen prozentualen Verlust für das durchgehende Licht erzeugen. Ändert man nun das Medium, in das der Strahl austritt, so hat man in dem beträchtlichen Verlust für alle nicht zu kleinen Dicken ein ausgezeichnetes Mittel in der entsprechenden Gleichung in der Hand, *um eine Beziehung zwischen n und nk festzulegen.* Wenn das Metall sich einmal zwischen Glas und Luft, dann zwischen Glas und Benzol befindet, dann ergibt sich eine einfache Beziehung, wenn es erlaubt ist, die Korrektionsglieder in (4) wegzulassen. $e^{2d\gamma}$ ist in beiden Fällen gleich; ebenso $16\,n_1^2\,(n^2 + n^2 k^2)$, es folgt also

$$(6) \qquad \frac{\dfrac{E^2}{(DD')_{\text{Luft}}}}{\dfrac{E^2}{(DD')_{\text{Benzol}}}} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)_{\text{Luft}}}{(\alpha^2 + \beta^2)_{\text{Benzol}}} \,,$$

wobei nach (3)

$$\alpha^2 + \beta^2 = [n_1 n_2 + n(n_1 + n_2) + n^2 - n^2 k^2]^2 + [n k (n_1 + n_2) + 2 n^2 k]^2.$$

Am besten läßt man die Gleichung auf dieser Form stehen, ohne erst $n k$ explizit durch n auszudrücken, da man in keine der früheren Gleichungen einsetzt.

Im allgemeinen ist es statthaft[1]), in Formel (6) die Korrektionsglieder aus (4) wegzulassen.

Die hieraus entspringende mögliche Ungenauigkeit in $n k$ steigt nur bei kleinen Dicken bis 0,5 — je nach dem Wert von n, positiv oder negativ —, was die Möglichkeit der schließlich auszuführenden Rechnung kaum einmal in Frage stellt.

Die Lösung des Problems in geschlossener Form ist nicht zu erreichen. Am besten schlägt man folgenden Weg ein: Nach Gleichung (6) legt man die Beziehung zwischen n und $n k$ fest. Dann berechnet man aus Gleichung (2) die komplexen Dicken für Wertepaare von n und $n k$, die dieser Beziehung entsprechen. Diejenige Dicke, deren imaginärer Teil Null ist, muß dann die gesuchte Dicke darstellen und die gesuchten optischen Konstanten anzeigen, da im allgemeinen zu einem festen Wert von $n k$ nur *ein* Wert von n gehört, für den der imaginäre Teil der Dicke Null wird. Den gleichen Wert der Dicke muß man noch erhalten, wenn man aus Intensitätsbeobachtungen nach Gleichung (4) die Dicke berechnet.

II. Experimenteller Teil.

Die *Metallschichten* wurden in der üblichen Weise durch Kathodenzerstäubung erhalten.

Die Messung der *elliptischen Polarisation* wurde mit dem bei Drude, Optik p. 238 abgebildeten Spektrometer ausgeführt. Verwendet wurde ein Streifenkompensator, nach Angaben von Chroustchoff von R. Fuess in Berlin gebaut, da die Helligkeit für einen Kompensator mit homogenem Gesichtsfeld zu gering war.

Ich überzeugte mich durch mehrmals wiederholte, jedesmal mit erneuter Justierung des ganzen Apparates begonnene

1) Vgl. Diss. p. 16.

Beobachtungsreihen am gleichen Objekte, das einmal in der Richtung Luft–Metall–Glas, sodann umgekehrt vom Licht durchlaufen wurde, daß die Bestimmung von

$$\varrho e^{i\Delta} = \varrho(\cos\Delta + i\sin\Delta)$$

mit Sicherheit auf die zweite Dezimale des reellen und imaginären Teiles genau erhalten werden konnte, eine Genauigkeit, die für die schließlich angestellte Rechnung vollauf genügte. Alle Beobachtungen wurden für rotes, grünes und blaues Licht angestellt. Durch farbige Gläser wurde ausreichend monochromatisches Licht erzeugt, die so ausgesonderten Wellenlängen betrugen:

blau	460—500	max.	480 $\mu\mu$
grün	520—540	„	530
rot	630—700	„	680

Eine noch engere Begrenzung der Bereiche dieser Farben hatte keine veränderte Einstellung des Kompensators und Analysatornicols zur Folge. Spektrale Zerlegung des einfallenden Lichtes ist unvorteilhafter.

Das Polarisatornicol wurde folgendermaßen ausgewertet. Ein Metallspiegel wurde senkrecht zur Achse des Kollimatorrohres aufgestellt, dann auf dem Tischchen bis zur möglichst schiefen Inzidenz gedreht und bei abgenommenem Kompensator Polarisator und Analysator auf völlige Dunkelheit eingestellt. Hierdurch läßt sich die Polarisationsebene bequem und scharf bestimmen.

Das *Verhältnis des einfallenden zum durchgelassenen Licht* wurde gemessen durch den Vierordtschen Doppelspalt in Verbindung mit einem Gitterspektrometer.

Als zweite Medien für den *Vergleich der durchgelassenen Intensitäten* wurden Luft und Benzol gewählt. Da Benzol den gleichen Brechungsexponenten wie das benutzte Glas hat, werden Umrechnungen und Komplikationen durch Interferenzen in der Flüssigkeitsschicht vermieden. Es benetzt das Metall sehr gut und läßt sich so vollständig entfernen, daß die elliptische Polarisation vor und nach der Benutzung nicht merklich verschieden war.

Mit Hilfe einer Glasplatte wurde die Metallschicht teilweise mit Benzol bedeckt und dann das Intensitätsverhältnis

der Strahlen beobachtet, die aus der freien und benzolbedeckten Metallschicht austraten.

Die Einzelheiten der Messungen und die Korrektionen, die durch Übergang der Strahlen in andere Medien nötig werden, sind in der Dissertation ausführlich beschrieben.

Anwendung der Theorie auf Silber und Kupfer.

Die Prüfung der Theorie wurde an Silber und Kupfer vorgenommen, weil hier eine unabhängige Bestimmung der Dicke durch Überführung der Schichten in die Jodverbindungen und Interferenzmessung nach Wiener möglich war.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate zusammengestellt, die an drei Silber-[1]) und zwei Kupferspiegeln gewonnen wurden.

		Phasendifferenz		Amplitudenverhältnis	$\frac{E_2}{D D'}$	$\frac{(D D')_{Benzol}}{(D D')_{Luft}}$	n	$n k$	Dicke[2]) aus Elliptizität	Dicke aus Absorption	Mittlere Dicke	Dicke aus den Jodverbindg.
Silber I	Rot	35°	25′	0,435	4,16	0,930	0,24	4,15	27,5	29,9	27,1	29,3
	Grün	26	35	0,479	2,82	0,903	0,14	3,30	27,8	27,5		
	Blau	39	45	0,583	1,65	0,839	0,30	2,52	27,0	29,2		
Silber II	Rot	28	45	0,387	28,7	0,933	0,28	4,40	49,0	47,5	47,8	43,4
	Grün	39	25	0,464	16,6	0,894	0,15	3,25	44,6	47,8		
	Blau	45	0	0,554	9,88	0,857	0,26	2,75	47,0	46,0		
Silber III[3])	Rot	24	40	0,498	1,73	0,806	1,50	2,75	16,0	16,4	15,0	13,5
	Grün	19	40	0,470	2,21	0,905	0,85	4,15	15,5	13,8		
	Blau	27	10	0,609	1,91	0,902	0,68	3,88	14,9	13,3		
Kupfer IV	Rot	28	40	0,477	2,93	0,903	0,62	3,86	22,7	23,1	20,2	19,2
	Grün	23	20	0,558	2,10	0,826	0,78	2,64	18,3	20,5		
	Blau	26	35	0,566	2,23	0,817	0,94	2,50	17,5	18,9		
Kupfer V	Rot	30	10	0,495	14,3	0,904	0,77	4,00	36,0	39,4	37,9	36,5
	Grün	26	35	0,625	5,08	0,828	1,12	2,70	39,7	38,8		
	Blau	28	50	0,679	5,71	0,859	1,32	2,47	37,3	36,5		

1) Sehr dünne Silberspiegel sind manchmal rot durchsichtig. Dies scheint auf einer Oxydbildung oder sonstigen Verunreinigung zu beruhen. Vgl. unten Silber III.

2) In Milliontel Millimetern.

3) Silber III war in Durchsicht rotblau.

Zum Vergleich stelle ich noch die Werte zusammen, die von anderen Beobachtern erhalten wurden.

	n			nk		
	Rot	Grün	Blau	Rot	Grün	Blau
Kupfer[1]	0,62[2]		1,1	2,6[2]	2,3	2,2
Silber[1]	0,18	0,17	0,17	3,6[2]	3,2	2,9
Silber[3]		0,2[2]		4,8	3,5	3,0
Silber[4]				3,6	2,9	2,7
Silber[5]		0,18		3,7[2]		

Die nötigen Rechnungen wurden folgendermaßen ausgeführt: In einem Intervall von 0,2 für die Brechungsexponenten, von 0,3 für die Absorptionskoeffizienten waren die in der Gleichung (2) vorkommenden Koeffizienten für den Einfallswinkel $\varphi = 65^0$ ausgerechnet und in Tabellen zusammengestellt worden. Zunächst wird nun die Beziehung zwischen n und nk nach Gleichung (6) berechnet und als Kurve mit n und nk als Koordinaten gezeichnet. Dann werden die komplexen Dicken nach Gleichung (2) in dem von dieser Kurve getroffenen Gebiet berechnet. Zwei oder drei Proben genügen, um für einen festen Wert von nk denjenigen Wert von n durch Interpolation zu finden, für den der imaginäre Teil der Dicke verschwinden würde. Wiederholt man das für drei Werte von nk, dann kann man die Kurve der Konstanten der rein reellen Dicken konstruieren. Der Schnittpunkt beider Kurven gibt die Konstanten an, die das Problem befriedigen.

1) Nach Messungen von R. S. Minor an massiven Metallen (Ann. **10.** p. 613. 1903).

2) Für Natriumlicht.

3) Nach Messungen von E. Hagen u. H. Rubens an chemisch erzeugten Spiegeln (Ann. d. Phys. **8.** p. 452. 1902).

4) Nach Messungen von A. Wernicke an chemisch erhaltenen Spiegeln (Pogg. Ergbd. **8.** p. 65 1878).

5) Nach P. Drude, vgl. z. B. Lehrb. d. Optik p. 338. E. Hagen u. H. Rubens geben an, daß für Silber, das durch Kathodenzerstäubung erhalten war, die Werte von nk nicht so stark anstiegen. R. S. Minor erinnert an die Tatsache, daß Kupfer, aus saurem oder neutralem Bade niedergeschlagen, etwas verschiedene Farben zeigt.

Die im Schnittpunkt geltende Dicke läßt sich dann sofort aus den oben gewonnenen rein reellen Dicken interpolieren. Als Probe berechnet man dann noch die Dicke aus den Intensitätsbeobachtungen nach Gleichung (4) mit den Konstanten des Schnittpunktes. Diese Probe ist unbedingt nötig, denn es kommt häufig vor, daß sich die Resultate dieser beiden Rechnungen auf keine Weise vereinigen lassen. Es kann das seinen Grund in Oberflächenschichten haben oder wahrscheinlicher in Inhomogenitäten der Schichten irgendwelcher Art.[1])

Platin.

Bei Platin konnte ich nicht zu widerspruchsfreien Resultaten gelangen. Reine Spiegel herzustellen war bei Platin unter allen untersuchten Metallen am schwierigsten. Ferner veränderten sich meine Platinspiegel weitaus am schnellsten an der Luft. Nach einem Tage schon wurden sie beim Anhauchen plötzlich matt. Wenn man eine Schablone aus schwarzem Papier darauf legte und das ganze im Dunkeln einen Tag lang liegen ließ, dann war beim Abheben der Schablone keine Veränderung zu entdecken. Hauchte man nun darauf, dann erschien die aus dem Papier ausgeschnittene Figur ganz plötzlich. Durch vorsichtiges Polieren mit blankem Stahl war die Figur nicht wegzubringen; nach einem weiteren Tage unbedeckten Liegens wurde beim Anhauchen der ganze Spiegel matt und die Figur verschwand fast ganz. Die Benzolluftbeobachtung gab ganz kleine Absorptionskoeffizienten $n k = 1$ bis 1,5. Mit diesen Werten war die aus der Elliptizität berechnete Dicke mit der aus der Absorption berechneten nicht in Übereinstimmung zu bringen.[2])

Gold.

Bei Gold ist es schwierig, grün durchsichtige Schichten zu erhalten. Bei sehr großem Elektrodenabstand bekommt

1) Vgl. F. Kaempf, Ann. d. Phys. 16. p. 308. 1905. Nach den Beobachtungen von Kaempf besteht die Möglichkeit, daß in den Spiegeln, die durch Zerstäubung von plattenförmigen Kathoden gewonnen werden, Doppelbrechung senkrecht und parallel zur Spiegelschicht auftritt. Indessen wäre der Effekt dieser Doppelbrechung wahrscheinlich zu klein, um die sehr großen Abweichungen zu erklären.

2) Infolge des Umzuges des hiesigen Instituts in das neue Gebäude fand ich nicht die Zeit, viele Versuche hierüber anzustellen.

man regelmäßig bläuliche Schichten, und bei ganz kleinem Abstand und großer Stromdichte tiefblaue Schichten. Erhitzte man diese auf ungefähr 200°, dann wurden sie plötzlich grün und viel durchsichtiger.[1])

Es bestand die Möglichkeit, daß das blaue Gold ein Amalgam war. Es wurde deshalb die blaue Modifikation auf Platten aus geschmolzenem Quarz erzeugt und vor und nach dem Erhitzen gewogen. Es zeigte sich nun beim schwachen Erhitzen ein Gewichtsverlust von ca. 8 Proz.[2])

Das Gold wurde in Wasserstoff zerstäubt:

0,00470 g	verlieren	0,00038 g	=	8,1 Proz.
0,00400 g	„	0,00028 g	=	7,0 „
0,00415 g	„	0,00035 g	=	8,4 „
0,00148 g	„	0,00014 g	=	9,5 „
0,00166 g	„	0,00010 g	=	6,0 „
				7,8 Proz.

Grünes Gold dagegen ergab keinen Gewichtsverlust beim Erhitzen.

0,00522 g,	geglüht	0,00521 g	−0,00001
0,00326 g	„	0,00327 g	+0,00001
0,00376 g	„	0,00377 g	+0,00001

Die Wägungen wurden mit einer Wage von Bunge ausgeführt, die 0,01 mg sicher zu bestimmen erlaubte.

Wurde die Platte nun noch einmal bis zum Glühen erhitzt, dann war eine weitere Gewichtsabnahme nicht zu konstatieren. Der Versuch wurde wiederholt, indem die Quecksilberpumpe durch eine Ölpumpe ersetzt wurde. Der Gewichtsverlust blieb bestehen, es konnte also kein Amalgam sein. Um auch Öl- oder Fettdampf auszuschließen, wurde ein kleines Entladungsrohr mit einem Stück Golddraht als Kathode angefertigt; es war wiederholt mit Äther ausgespült und stark erhitzt worden. Durch eine Kapillare und einen Gummischlauch war es mit der Ölluftpumpe verbunden. Nach schnellem Auspumpen wurde abgeschmolzen. Auch jetzt wurde die tief-

1) In der Dissertation sind Absorptionskurven des grünen und blauen Goldes mitgeteilt.

2) Das würde dem Sauerstoffgehalt der Verbindung Au_2O_3 entsprechen.

blaue Modifikation erhalten, die beim Anwärmen wieder in grün überging.

Wäre es ein reines Oxyd gewesen, so hätte es wahrscheinlich den elektrischen Strom nicht geleitet. Es wurden also noch Leitfähigkeitsbestimmungen ausgeführt. Die Goldschicht wurde teilweise galvanisch verkupfert. Die verkupferten Stellen hafteten hinreichend gut am Glas, um beim Erhitzen nicht abzuspringen. Die grüne Modifikation leitete ungefähr doppelt so gut als die blaue. Gleichgroße Platten aus reinem Gold von 100 $\mu\mu$ Dicke hätten einen 10—30 mal kleineren Widerstand gehabt, als die vorliegenden Schichten unbekannter Dicke aus blauem Gold.

Manchmal erhält man Goldschichten, die beim Anhauchen oder Befeuchten mit Alkohol etc. die Farbe in der Durchsicht ändern: von rot oder violett in blau. Theoretisch ist das immer möglich, sobald die Absorptionskoeffizienten für rot und blau keine sehr große Differenz haben. An sich dünne Schichten würden in verschiedener Dicke ebenso dem durchgelassenen Licht nicht die gleiche Farbe erteilen. Etwas allgemeines über den Verlauf läßt sich nicht aussagen. Grün als Übergangsfarbe konnte ich nie beobachten, was ja auch natürlich ist, da im allgemeinen so viel Rot übrig bleiben wird, daß das komplementäre Grün verzehrt wird.

Auffällig ist folgender Versuch: Wenn man eine schwach rötliche oder bläuliche Metallschicht auf weißes Papier legt, erscheint ein ziemlich gesättigtes Rot. Hebt man die Schicht langsam vom Papier ab, so wird das Rot allmählich blässer und geht bei einem geeigneten Spiegel schließlich in ein deutliches Blau über.

Hieraus ist zu schließen, daß Rot etwas weniger als Blau absorbiert wird und daß diese Eigenschaft durch die vielfachen Reflexionen in sehr dünnen Schichten verdeckt werden kann.

Ich habe mehrere Messungen der Elliptizität des durchgegangenen Lichtes und der Absorption zu Berechnungen der Konstanten verwendet, ohne eindeutige oder widerspruchsfreie Resultate erhalten zu können.

Die Goldschichten wurden auch unter dem Mikroskop untersucht. Mit stärkster homogener Immersion war eine Art körniger Struktur zu entdecken. Man sah im Gesichtsfeld rote

und grüne unregelmäßig verteilte „Körner" auf rötlichem, grünlichem oder bläulichem Grund. Die Körner scheinen von Beugungserscheinungen kleiner Löcher herzurühren. Ein Zusammenhang zwischen den Körnern und der Farbe des durchgelassenen Lichtes war nicht zu entdecken. Die Beobachtungen von Wood[1]) am Natrium und von Kossogonoff[2]) an Platin, Gold und Silber, die diese Autoren durch „optische Resonanz" erklären, scheinen keine Analogien zu meinen Beobachtungen an Gold zu bilden. Gegen Resonanz spricht auch der oben mitgeilte Versuch durch unter die Schicht gelegtes Papier einen Farbenwechsel zu erzeugen.

Schließlich möchte ich Hrn. Prof. Wiener für seine liebenswürdige Unterstützung auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen.

1) R. W. Wood, Phil. Mag. (6) **3**. p. 396; **4**. p. 425. 1902.
2) J. Kossogonoff, Phys. Zeitschr. **4**. p. 208, 258, 518. 1903.

(Eingegangen 15. September 1905.)

9. *Ein Beitrag zur Kenntnis der Funkenentladung in Gasen; von W. Voege.*

(Hierzu Taf. IV, Figg. 2—7.)

I. Über die spezifische elektrische Festigkeit der Gase.

Vor einiger Zeit hatte ich gelegentlich von Versuchen zur Bestimmung der elektrischen Durchschlagsfestigkeit verschiedener Körper[1]) auch Versuche mit einigen Gasen, Sauerstoff, Kohlensäure und Wasserstoff, angestellt und gefunden, daß das Schlagweitengesetz von einer gewissen Funkenlänge an für diese Gase ebenso wie für Luft geradlinig verläuft. Rechnet man unter Zugrundelegung meiner Zahlenwerte für etwa 12 cm Funkenlänge den von Hrn. Orgler[2]) als spezifische elektrische Festigkeit eines Gases definierten Koeffizienten $k = A_2 - A_1 / B_2 - B_1$, wo A_2 und A_1 zwei Funkenspannungen in dem betreffenden Gas, B_2 und B_1 die entsprechenden Spannungen in Luft sind, aus, so erhält man bedeutende Abweichungen von den Orglerschen Werten. Außerdem findet sich die auffallende Tatsache, daß nach allen in neuerer Zeit ausgeführten Messungen Kohlensäure leichter durchschlagen wird als Luft, während nach meinen Versuchen gerade das Umgekehrte und zwar in bedeutendem Maße der Fall ist. Da die Messungen des Hrn. Orgler mit einer Influenzmaschine als Elektrizitätsquelle, meine dagegen mit einem Funkeninduktor angestellt sind und immerhin die Möglichkeit vorlag, daß die andere Art der Elektrizitätszuströmung die Abweichungen bewirkte, habe ich zunächst die von Hrn. Orgler benutzte Versuchsanordnung wieder hergestellt — Kugeln von $2\,^1/_2$ cm Durchmesser, 2,5 und 4 mm Schlagweite, Belichtung der Funkenstrecke mit Röntgenstrahlen — und die Versuche mit der einem Funkeninduktor entnommenen Spannung wieder-

1) W. Voege, Elektrotechn. Zeitschr. 1904. p. 1033.
2) A. Orgler, Ann. d. Phys. 1. p. 159. 1900.

holt. Wie folgende Tabelle zeigt, stehen die Resultate in guter Übereinstimmung mit den Orglerschen Werten.

	Orgler	Voege
Luft	1,00	1,00
CO_2	0,888	0,83
H	0,563	0,57

Die CO_2 wird auch mit der im Funkeninduktor erzeugten Spannung leichter durchschlagen als Luft. Spitzenelektroden ergaben dasselbe Resultat. Als ich nun die Schlagweite vergrößerte, blieben die Verhältnisse zunächst dieselben, dann wurden die für Luft und CO_2 erforderlichen Spannungen nahezu die gleichen und von ca. 8 cm an bot zweifellos die Kohlensäure der elektrischen Durchschlagung den größeren Widerstand. Dieselben Versuche wurden dann mit hochgespanntem Wechselstrom von 50 Perioden wiederholt. Die Spannung des Wechselstromes wurde in einem eisengeschlossenen Funkteninduktor hinauftransformiert und die zur Durchschlagung der Gasschicht erforderlichen Spannungen mittels einer parallel geschalteten veränderlichen Luftfunkenstrecke (Spitzenelektroden) bestimmt. Außerdem wurden die Resultate durch Vergleich mit einem die primäre effektive Spannung messenden Hitzdraht Voltmeter kontrolliert. Die zu untersuchenden Gase O und CO_2 wurden aus Bomben entnommen und mit Watte, Chlorcalcium und Schwefelsäure von Staub und Feuchtigkeit möglichst gereinigt. Das Glaßgefäß, in welchem die Durchschlagung stattfand, hatte einen Durchmesser von 14 cm und eine Höhe von 25 cm. Als Elektroden dienten stumpfe Messingspitzen. Nach jeder Entladung wurde frisches Gas in den Apparat geleitet. Die erhaltenen Durchschlagswerte sind in Fig. 1 in Kurvenform aufgetragen, wobei die an der Meßfunkenstrecke abgelesenen Schlagweiten mit Hilfe der früher bestimmten Schlagweitenkurve für Luft[1]) in maximale Volt umgerechnet sind. Das Bild der Kurven ist dasselbe, wie es meine früheren Versuche zeigten. Bei weitem am schwersten wird von den drei Gasen der Sauerstoff durchschlagen, für größere Funkenlängen folgt dann die

1) W. Voege, Ann. d. Phys. 14. p. 556. 1904.

Kohlensäure, während die Luft den geringsten Widerstand gegen die elektrische Entladung bietet. Bei kleinen Schlagweiten liegt die Sache anders; hier steht die Luft in der Mitte zwischen Sauerstoff und Kohlensäure. Die Kurven für die zuletzt genannten beiden Gase schneiden sich zwischen 8 und 10 cm Funkenlänge, d. h. derjenigen Stelle, wo die Durchschlagsversuche in Luft unsichere Werte liefern. Nun habe ich früher[1]) den anfänglich steileren Anstieg der Kurve für Luft

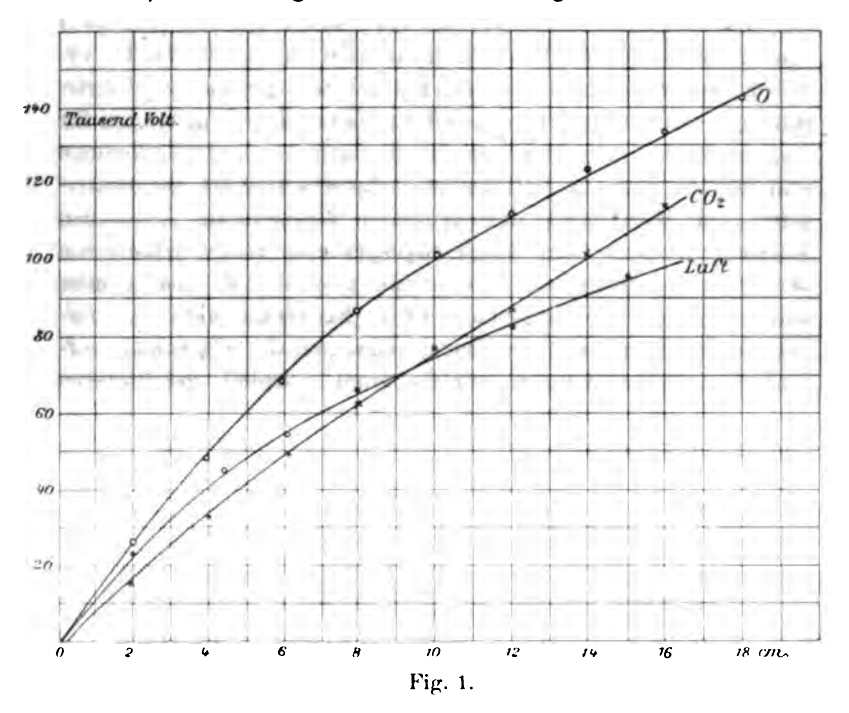


Fig. 1.

sowie die unsichere Zone zwischen 6 und 10 cm durch eine Rückwirkung des negativen Poles auf den positiven zu erklären versucht. Die von der Kathode ausgehenden negativen Ionen, welche die Anode erreichen, erschweren den Funkenübergang erheblich. Da nun Luft und Kohlensäure gerade in der unsicheren Zone bei ~ 9 cm ihre Rollen vertauschen, liegt der Gedanke nahe, daß die Abweichung bei kleineren

1) W. Voege, Phys. Zeitschr. 1905. p. 273 u. f.

Funkenlängen auf eine verschieden starke Rückwirkung des negativen Poles auf die Anode in den beiden Gasen zurückzuführen ist. In der Tat ist die Geschwindigkeit der negativen Ionen für Luft größer als für Kohlensäure, für Luft ist $v_n = 1{,}71$, für Kohlensäure $v_n = 0{,}84$. Je beweglicher die negativen Ionen sind, um so stärker wird ihre Rückwirkung auf die Anode sein. Die Erklärung für das verschiedene Verhalten der beiden Gase dürfte demnach m. E. auf die verschiedene Ionengeschwindigkeit und die damit zusammenhängende Kathodenrückwirkung zurückzuführen sein.

Wenn nun die erwähnte Rückwirkung für Funkenlängen unter 10 cm mit wachsender Schlagweite verschiedene Werte annimmt, so ist damit der Übergangswiderstand zwischen Elektrode und Gas nicht konstant. Die Konstanz dieses Widerstandes ist aber Voraussetzung bei der Ableitung der Formel für die spezifische elektrische Festigkeit aus den Gleichungen $A = a + \alpha$ für Gas und $B = b + \beta$ für Luft, wenn A und B die erforderlichen Spannungen, α bez. β den zur Überwindung des Übergangswiderstandes zwischen Metall und Luft erforderlichen Betrag und a und b die zur Durchbrechung der Gasschicht aufzuwendende Spannung bedeuten. Für die geringen Größenunterschiede von 0,4—5 mm Funkenlänge sind, wie die Versuche des Hrn. Orgler zeigen, die Übergangswiderstände α und β auch praktisch konstant, dagegen gilt dies nicht mehr, wenn man zu Schlagweiten von mehreren Zentimetern übergeht.

Die von Hrn. Orgler angegebenen Zahlen für den Koeffizienten k sind daher nicht als charakteristische Konstante für die untersuchten Gase anzusehen, da sich ihre Gültigkeit nur auf ein kleines Schlagweitengebiet erstreckt. Wenn man richtige Werte für die spezifische elektrische Festigkeit ableiten will, muß man die Zahlenwerte für Schlagweiten über 8 cm zugrunde legen, da von hier an die Schlagweitenkurven nach allen neueren Untersuchungen einen geradlinigen Verlauf haben, d. h. eine Rückwirkung hier nicht mehr in Frage kommt. Aus meinen in der Fig. 1 wiedergegebenen Resultaten können sichere Werte für die spezifische elektrische Festigkeit der untersuchten Gase jedoch noch nicht abgeleitet werden. Zu dem Zweck müßten die Versuche mit chemisch reinen Gasen,

einem noch größeren Gasvolumen und unter verschiedenen anderen Vorsichtsmaßregeln wiederholt werden.

Bemerken will ich, daß ich mit Induktor und Turbinenunterbrecher Kurven von genau demselben Verlauf erhalten habe wie mit hochgespanntem Wechselstrom, dagegen lagen die mit der Induktorspannung gewonnenen Werte sämtlich etwas höher als die Wechselstromwerte. Da dasselbe aber auch bei Füllung des Durchschlagsgefäßes mit Luft der Fall ist (die Spannung ist immer mit einer zur Funkenstrecke im Gefäß parallelen offenen Luftfunkenstrecke gemessen), nehme ich an, daß der Wechselstrom, bei welchem den Elektroden schon vor Auftreten der maximalen Spannung eine bedeutend größere Energiemenge zugeführt wird als beim Induktorstrom, im geschlossenen Gefäß eine stärkere Ionisation hervorruft, welche dann ein leichteres Zustandekommen des Funkens ermöglicht.

Von Interesse ist es, die Wirkung zu beobachten, welche das Zuströmen eines zweiten Gases auf einen im ersten Gase stattfindenden Funkenüberschlag ausübt. Dabei sei die Spannung so reguliert, daß gerade ein regelmäßiger Funkenüberschlag erfolgt. Ist das erste Gas Kohlensäure und gehen in demselben kräftige elektrische Entladungen über, so hören dieselben schon nach dem Einleiten weniger Kubikzentimeter Sauerstoff bei unveränderter Spannung gänzlich auf. In Luft müssen ca. 25 Proz. des Luftvolumens Sauerstoff eingeführt werden, um eine Erschwerung des Überganges zu erhalten. Ist das ursprüngliche Gas Sauerstoff und leitet man Kohlensäure in das Gefäß ein, so erfolgte eine Erleichterung des Funkenüberganges erst nachdem ca. 2000 ccm CO_2 eingeleitet waren, d. h. nachdem praktisch aller Sauerstoff entfernt war.

Der Sauerstoff scheint also die elektrische Entladung in jedem Fall zu erschweren und zwar ist es, wie sich aus den Kurven (Fig. 1) ergibt, nicht die spezifische elektrische Festigkeit, sondern der Übergangswiderstand an den Elektroden, welcher die höhere Durchschlagsspannung erforderlich macht. Ob der Sauerstoff selbst oder das gebildete Ozon die Ursache ist, konnte nicht mit Sicherheit entschieden werden, vorherige Ozonisation des eingeleiteten Sauerstoffs bewirkte keinen nennenswerten Unterschied.

Hat man atmosphärische Luft in einem abgeschlossenen



Gefäß und reguliert die Spannung so ein, daß kräftiger Funkenüberschlag stattfindet, so hört derselbe nach wenigen Minuten auf, ohne daß die Spannung geändert wäre. Es muß ein kräftiger Luftstrom eingeblasen werden, um das gebildete Hindernis zu beseitigen. In einem Gemisch von Kohlensäure und Sauerstoff trat diese Erschwerung nicht auf, dagegen wurde sie sogleich wieder beobachtet, als in dem Gasgemisch der Sauerstoff durch Luft ersetzt wurde. Danach hängt also die erwähnte Erschwerung mit der Anwesenheit von Stickstoff zusammen und man wird wohl nicht fehl gehen, wenn man die gebildeten Stickoxyde als Ursache der größer werdenden Durchschlagsfestigkeit ansieht.

Dies steht in Übereinstimmung mit der Beobachtung des Hrn. Warburg[1]), wonach bei gleicher Stromstärke das Spitzenpotential in ruhender Luft bewegter Luft gegenüber erheblich ansteigt.

II. Äußere Erscheinung der Funkenentladung in verschiedenen Gasen.

In jedem Gas weist eine Funkenentladung von größerer Länge ganz charakteristische Merkmale auf. Da dieselben meines Wissens bisher nirgends wiedergegeben sind, mögen sie hier an der Hand einiger photographischer Aufnahmen kurz skizziert werden. Die abgebildeten Funkenentladungen von ca. 12 cm Länge sind mit unterbrochenem Gleichstrom (Turbinenunterbrecher und 50 cm Funkeninduktor) erhalten. Die Funken sprangen gleichmäßig über, die photographische Kamera wurde mit entsprechender Geschwindigkeit an den Funken senkrecht zur Funkenstrecke vorbeigeführt. Auch mit sehr schnell bewegter photographischer Platte waren Vorentladungen nicht zu entdecken. Um diese zu erhalten, müssen ganz bestimmte Verhältnisse zwischen Kapazität und Selbstinduktion im primären Stromkreise des Induktors herrschen.

1. *Luft.* Ist die Spannung noch nicht hoch genug, um eine Funkenentladung herbeizuführen, so bildet die negative Elektrode einen hellen Punkt, während von der Anode ein starkes Lichtbüschel ausgeht (Fig. 2, Taf. IV). Der Funke

---

1) E. Warburg, Ann. d. Phys. 17. p. 24. 1905.

selbst hat in der Nähe der Kathode eine heller glänzende Partie, er weist starke Knicke auf, ist von glänzend weißer Farbe und mit ziemlich starkem Geräusch verbunden (Fig. 3, Taf. IV).

Bei Verwendung von hochgespanntem Wechselstrom ist der Raum zwischen den Elektroden mit bläulichem Licht erfüllt, während von beiden Elektroden gleich lange Büschel ausgehen. Leitet man ein wenig Sauerstoff oder Kohlensäure in das Gefäß ein, so ziehen sich die Büschel zurück und der bläuliche Lichtschein verschwindet.

2. *Sauerstoff.* Bevor es zur Funkenbildung kommt, sind die Lichterscheinungen an den Elektroden sehr gering. Die Funken ähneln den Luftfunken, sie zeigen starke Knicke und Verästelungen, dagegen fehlt die helle Partie an der negativen Elektrode. Die Farbe der Funken ist violett (Fig. 4, Taf. IV).

3. *Kohlensäure.* Die Funken sind viel gerader als in Luft, sie zeigen keine scharfen Knicke und gehen fast lautlos über. Farbe blau. In der Nähe der Kathode fehlt oft ein Stück in der leuchtenden Entladung (Fig. 5, Taf. IV). Wird die Stromstärke im Funken stark erhöht, so wird die Farbe des Funkens violett. Vermutlich zerfällt bei der starken Erhitzung im Funken die Kohlensäure in Sauerstoff und Kohlenoxyd und der freie Sauerstoff verleiht dem Funken die violette Färbung.

4. *Wasserstoff.* Der negative Pol bildet einen hell leuchtenden Punkt, während von der Anode ein gerades einer fahlen Flamme gleichendes Lichtbüschel ausgeht (Fig. 6, Taf. IV). Wird die Spannung noch weiter erhöht, so erscheint ein roter, völlig gerader, lautloser Funke (Fig. 6 und 7, Taf. IV).

Mit Wechselstrom war es nicht möglich einen Funken von nur 1 cm Länge zu erhalten. Es findet eine so starke dunkle Entladung statt, daß die Elektrodenspitzen glühend werden und das Gas sich stark erhitzt. Der Transformator nimmt primär einen starken Strom auf, ohne daß die sekundäre Spannung nennenswert steigt. Mit unterbrochenem Gleichstrom erhält man leichter eine disruptive Entladung, weil der plötzliche Anstieg der Spannung die Funkenbildung begünstigt[1]), die Gesamtwärmewirkung dagegen hier viel geringer ist.

1) G. Jaumann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, 97. p. 765. 1888.

III. Einfluß verschiedener Gase an den Elektroden.

In seiner Arbeit „Über die Wirkung von Flammengasen auf leuchtende elektrische Fntladungen“ [1]) kommt Hr. v. Wesendonck zu dem Schluß, daß die Art des Gasgemisches an den Elektroden von entscheidendem Einfluß auf die elektrische Entladung ist. Auch aus meinen oben angegebenen Versuchen folgt, daß die Verschiedenheit der erforderlichen Durchschlagsspannung im wesentlichen in dem verschieden großen Übergangswiderstand an den Elektroden ihren Grund hat. Es war daher von Interesse, festzustellen, welche Wirkung die einzelnen Gase an der Anode bez. an der Kathode hervorbringen; war es doch nach allen früheren Versuchen sehr unwahrscheinlich, daß die Wirkung an beiden Elektroden die gleiche ist. Die Versuchsanordnung ist in Fig. 8 dargestellt. Die eine der beiden Spitzenelektroden befand sich in einem Glasgefäß, welches der Spitze gegenüber eine feine Öffnung besaß, durch welche die Funken ohne Schwierigkeit hindurchschlagen. Die beiden Glasröhren dienten zur Zu- und Ableitung der Gase. Es wurden Gefäße verschiedener Art benutzt, welche gestatteten, die Wirkung der Gase sowohl in Ruhe als auch in Bewegung auf die Elektroden zu untersuchen. Die Elektrode im Gefäß konnte durch einfache Umschaltung bald zur Anode, bald zur Kathode gemacht werden. Die Spannung wurde entweder mit Funkeninduktor und Turbinenunterbrecher oder aber mit hochgespanntem Wechselstrom, welcher mit Hilfe eines Hochspannungsgleichrichter der Firma Nostitz und Koch zu einem intermittierenden Gleichstrom umgewandelt wurde, erzeugt. In beiden Fällen ergaben sich dieselben Resultate.

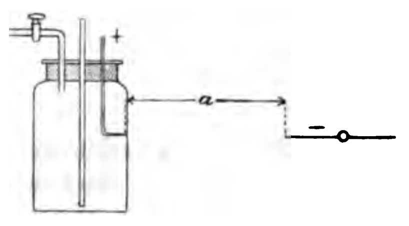


Fig. 8.

Den Erwartungen entsprechend erwies sich die Natur des Gases an den Elektroden, besonders an der Anode von größtem Einfluß auf die elektrische Entladung. Die Versuche wurden

1) K. v. Wesendonck, Ann. d. Phys. 65. p. 553. 1898.

immer so vorgenommen, daß zunächst mit parallel geschalteter Funkenstrecke diejenige Spannung ermittelt wurde, welche zum Zustandekommen eines Funkens erforderlich war, wenn das Gefäß mit Luft gefüllt wurde. Sodann wurde ein anderes Gas in die Flasche geleitet und der Versuch wiederholt.

1. Sauerstoff.

		Anode	Kathode
Im Gefäß	Luft	13,1 cm	12,4 cm
„ „	O	12,4 „	12,4 „

Es ist kein wesentlicher Unterschied gegen Luft vorhanden.

2. Kohlensäure.

		Anode	Kathode
Im Gefäß	Luft	13,0 cm	12,3 cm
„ „	CO_2	13,9 „	11,5 „

CO_2 an der Anode erschwert, an der Kathode erleichtert die Funkenbildung. Am deutlichsten ist dies zu konstatieren, wenn man während des Funkenüberschlages in Luft langsam Kohlensäure in das Gefäß treten läßt. Ist die Elektrode im Gefäß Anode, so bleiben die Funken aus, ist sie Kathode, so wird die Funkenentladung kräftiger.

3. Wasserstoff.

	Anode	Kathode
Luft	12,9 cm	11,9 cm
H	12,9 „	11,1 „

An der Anode kein merkbarer Einfluß, an der Kathode Erleichterung des Funkenüberganges. Wenn die letztere auch nicht besonders groß ist, ist sie doch zweifellos vorhanden.

Früher hatte ich nun gefunden, daß positive Ionen den Übergangswiderstand an der Kathode herabsetzen, während dieselben an der Anode wirkungslos sind.[1]) Wasserstoff in die Nähe der Elektroden einer Funkenstrecke gebracht, ver-

1) W. Voege, Phys. Zeitschr. 1905. p. 273.

hält sich also genau so wie positive Ionen. Da der Wasserstoff auch bei der Elektrolyse immer als positives Element auftritt, kam ich auf den Gedanken, zu versuchen, ob ein bei der Elektrolyse ausgesprochen negatives Gas sich auch analog den negativen Ionen verhält, d. h. ob es an der Anode den Übergang in hohem Grade erschwert. Um es mit einem möglichst einfachen, unzusammengesetzten Gase zu tun zu haben, wählte ich das Chlor. In der Tat genügten ganz geringe Quantitäten Chlor an der Anode, um die Funkenentladung außerordentlich zu erschweren, während es an der Kathode wirkungslos blieb. Ebenso wie Chlor wirken die übrigen Halogene. Für Jod und Brom lasse ich die Zahlenwerte folgen.

Im Gefäß	Anode	Kathode
Luft	10 cm	9,5 cm
Jod (Dampf) . . .	15,5 „	10,0 „
Luft	10,0 „	9,8 „
Brom (Dampf) . .	17,0 „	9,5 „

Die Wirkung des Chlors ist so intensiv, daß es nicht genügt, einen kräftigen Luftstrom durch das Gefäß zu treiben, um den ursprünglichen Zustand wieder herzustellen, vielmehr ist ein gründliches Ausspülen des Gefäßes mit Wasser und Trocknen desselben erforderlich. Chlorwasserstoff wirkt ähnlich dem Chlor, nur sehr viel schwächer, auch ist die Nachwirkung nicht so groß wie beim Chlor. Die Halogene Chlor, Brom, Jod stehen bezüglich der Intensität der Wirkung auf die Funkenentladung in derselben Reihenfolge, welche sie hinsichtlich der chemischen Aktivität einnehmen.

Eine Erklärung, warum die als elektrolytisch negativ und positiv bekannten Gase sich analog der Zuführung positiver bez. negativer Ionen an eine der Elektroden einer Funkenstrecke verhalten, ergibt sich unschwer aus den Anschauungen der Ionentheorie, ja man hätte den Zusammenhang vielleicht voraussehen können. Die Ionenenergie, d. h. die potentielle Energie, welche das negative Elektron in bezug auf das positive Restatom besitzt, ist am größten bei den stark negativen, am kleinsten bei den positiven Elementen. Andererseits, mit je größerer Kraft ein chemisches Atom sein eigenes Elektron

festhält, je größer also seine Ionenenergie ist, um so größer ist sein Sättigungsbestreben für ein weiteres negatives Elektron.[1]) Bei einer Funkenentladung in Luft nun ist die zwischen den Elektroden befindliche Luft ionisiert, es sind daher freie Elektronen in großer Zahl vorhanden. Das Chlor hat entsprechend seiner Stellung am negativen Ende der Spannungsreihe die Eigenschaft, diese freien Elektronen an sich zu ziehen. Es bildet negative Atomionen. Man hat also genau dasselbe, als wenn man direkt negative Ionen in die Umgebung der Anode gebracht hätte. An der Kathode bilden sich die negativen Chlorionen natürlich in derselben Weise, sie sind hier aber, wie früher gezeigt, ohne Wirkung auf die elektrische Entladung. — Ein Element, dessen Ionen positiver sind als jene der Luft, z. B. der Wasserstoff, gibt das negative Elektron leichter ab als diese, während der Rest als positives Ion zurückbleibt.

Die vermehrte Zahl der positiven Ionen an der Kathode nun erleichtert die Funkenentladung, wovon man sich durch direkte Vergrößerung der Anzahl der negativen Ionen in der Nähe der negativen Elektrode leicht überzeugen kann.

Es hat sich also die Ansicht des Hrn. v. Wesendonck, daß die Art des Gasgemisches an den Elektroden von ganz bedeutendem Einfluß auf die Funkenentladung ist, durchaus bestätigt. Die Gase spielen aber m. E. in diesem Falle nur eine sekundäre Rolle, die eigentliche Ursache der Wirkung liegt in der Änderung der Anzahl positiver bez. negativer Ionen. Jedenfalls hat man in der Anwendung eines stark negativen Gases ein Mittel, eine elektrische Entladung in hohem Grade zu erschweren. Wahrscheinlich ist, wie oben erwähnt, die Tatsache, daß eine Funkenentladung in einem abgeschlossenen Luftraum bald erlischt, auf die gebildeten Stickoxyde zurückzuführen. Die Stickoxydionen nun sind denen der Luft gegenüber als negativ zu betrachten, sie dürften also in ähnlicher Weise wie das Chlor die Erschwerung der elektrischen Entladung bewirken.

Hamburg, Physikal. Staatslaboratorium, September 1905.

1) Vgl. J. Stark, Die Dissoziierung und Umwandlung chemischer Atome. Braunschweig 1903. p. 5 u. f.

(Eingegangen 22. September 1905.)

10. *Poröse Körper als Durchwege für Gase. Poröser Kontakt; von K. Prytz.*

Will man sich bei der Herstellung von Röhrenverbindungen in Arbeiten mit der Quecksilberluftpumpe vor Verunreinigungen der Gase und vor mangelhafter Dichtung sichern, so hat man das ganz zuverlässige Mittel: die Verbindungen durch Zusammenschmelzen von Glasröhren herzustellen. Dieses ziemlich mühsame Verfahren kann jedoch nicht verwendet werden, wenn man zwei schon verschlossene Behälter, welche nicht vor der Verbindung geöffnet werden dürfen, verbinden muß, wenn man eine Verbindung zeitweilig unterbrechen muß, oder wenn man mit Röhren von ungleichen Materialien zu tun hat (z. B. Glas und Quarz). Ich habe gefunden, daß man in solchen Fällen, wo es kein wesentlicher Übelstand ist, daß die Gase relativ langsam hindurchströmen, die gegenseitige Berührung zwischen zwei porösen Körpern unter Quecksilber zur Herstellung von Gasverbindungen mit Vorteil verwenden kann. Die Poren müssen so eng sein, daß das Quecksilber nicht bei dem Überdruck einer Atmosphäre hineindringt; übrigens wird man sie möglichst weit wünschen. Bisher habe ich Chamotte, wie man es in den Deckeln der Verbrennungsöfen vorfindet, am geeignetsten gefunden. Die Verwendung von Gips oder Zement ist mit Rücksicht auf den Wasserinhalt nicht ratsam.

Das Prinzip des Verfahrens ist aus Fig. 1 ersichtlich. Unterhalb der trichterförmigen Erweiterung des Rohres r_1 ist ein Chamottestöpsel mittels Siegellack festgekittet, in die Erweiterung wird Quecksilber gegossen. Das Rohr r_2, welches unten durch einen gleichen, ein wenig aus dem Rohre hervorragenden Stöpsel verschlossen ist, wird in das Quecksilber des Trichters herabgeführt und wird oben mit der Luftpumpe verbunden. Das Quecksilber dringt nach dem Evakuieren nicht hinein; wenn man aber die beiden Stöpsel gegeneinander drückt, wird eine Gasverbindung zwischen den beiden Röhren r_1 und r_2 hergestellt, was dadurch kennbar wird, daß das Quecksilber in

in r_1 emporsteigt. Die Gasverbindung ist völlig zuverlässig: sie wird geschlossen, sobald die beiden Stöpsel gegeneinander gedrückt werden, und sie wird selbstverständlich augenblicklich nach der Trennung unterbrochen.

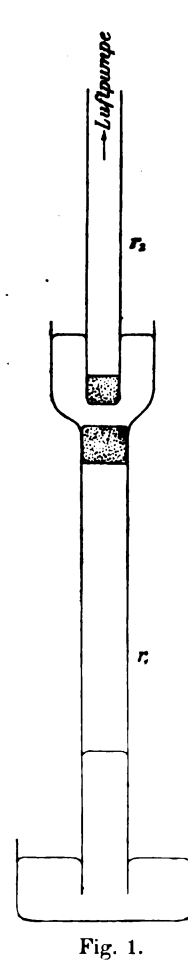


Fig. 1.

Der Umstand, daß man so die Verbindung zwischen zwei Gasbehältern mittels poröser Kontaktkörper nach Belieben schließen oder unterbrechen kann, macht es in vielen Fällen möglich, Schwierigkeiten verschiedener Art, welche die Verwendung von anderen Mitteln zur Gasverbindung oder von Hähnen herbeiführen kann, zu entgehen. Soll ein Rohr mit einem porösen Stöpsel versehen werden, wird der letztere einigermaßen zylindrisch und wenig kleiner als zum Ausfüllen des Rohres geformt. Man bedeckt die Innenseite der Röhrenmündung mit einer dünnen Schicht von Siegellack. Der zylindrische Teil der Oberfläche des Stöpsels wird mit einer dickeren Schicht überzogen, indem man im voraus den Stöpsel erwärmt, doch nicht zu stark, damit der Lack nicht in die Poren hineindringt. Wenn der Lack kalt geworden ist, wird das Ende des Stöpsels in die Röhrenmündung hineingeführt; indem beide zum Weichwerden des Lackes erwärmt werden, wird der Stöpsel zur erwünschten Tiefe hineingedrückt. Ich habe bisher keine Übelstände von der Verwendung des Siegellackes bemerkt, er wird aber ohne Zweifel mit einem anorganischen Kittemittel ersetzt werden können. In gewissen Fällen kann man zweckmäßig das Rohr so mit einem porösen Stöpsel versehen, daß man den letzteren in die Verlängerung des Rohres mittels eines kurzen Stückes Kautschukschlauches anbringt; dies ist z. B. dann zu empfehlen, wenn man, nachdem man den Stöpsel verwendet hat, Quecksilber in den Raum hineinbringen will, welches dadurch ermöglicht wird, daß man mit dem Stöpsel unterhalb

des Quecksilbers entweder den Schlauch und somit den Stöpsel entfernt oder den Schlauch durchlöchert.

Der Zusatz, welchen die Quecksilberpumpe erhält, wenn sie für Verbindungen mittels porösen Kontaktes eingerichtet wird, ist in Fig. 2 ersichtlich. *B* ist ein Gefäß von Glas, ca. 7 cm weit, in dessen verengten unteren Teil eine ca. 1 cm dicke Chamotteplatte p_1 mittels Siegellackes festgekittet ist. Ins Gefäß wird Quecksilber bis ca. 3,5 cm Höhe gefüllt. Vom Boden des Gefäßes ist ein Rohr, welches bei *A* Verbindung mit der Luftpumpe hat, abwärts geführt; unten ist es durch einen Chamottestöpsel, welcher immer in Quecksilber taucht, geschlossen. Die Platte p_1 dient zum Evakuieren eines nach unten gekehrten, mit porösem Stöpsel verschlossenen Rohres, z. B., wie in der Figur gezeigt, eines Spektralrohres (oder auch mehrerer Röhren auf einmal). Ist ein Rohr evakuiert worden, wird es von der Pumpe auf die Weise getrennt, daß man ein mit Quecksilber gefülltes Näpfchen ins Gefäß eintaucht. Nachdem man die Röhrenmündung unterhalb des Quecksilbers in das Näpfchen eingeführt hat, werden das Rohr und das Näpfchen zusammen aufgehoben. Hat man mit Spektralröhren zu tun, muß man die am Boden und an den Seiten des Näpfchens anhaftenden Luftbläschen entfernen, entweder mittels eines kurzdauernden Siedens des Quecksilbers, oder mittels des Bestreichens des Bodens und der Seitenwände mit einem evakuierten, porösen Stöpsel; wenn möglich vermeide man die Berührung des Stöpsels des Spektralrohres mit dem Rand des Näpfchens.

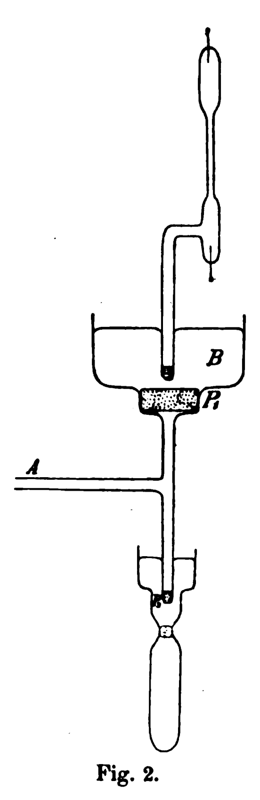


Fig. 2.

Behälter, dessen Hohlraum durch einen aufwärts gekehrten Stöpsel zugänglich ist, werden mittels des Stöpsels p_2 in Fig 2 evakuiert. Ein solcher Behälter ist mit einer Erweiterung für das sperrende Quecksilber oberhalb des porösen Stöpsels versehen.

Das Evakuieren durch die porösen Stöpsel geht natürlich relativ langsam, solange man mit größeren Drucken des Gases zu tun hat. Zwei Chamottestöpsel mit den Durchmessern 8 mm und 6 mm und mit ungefähr den gleichen Höhen gaben, jeder für sich in einer Röhrenverbindung eingeschaltet, 160 cm^3 bez. 66 cm^3 Luft pro Minute zufolge einer Druckdifferenz von 65 cm Quecksilberhöhe. Beide in Serie in derselben Röhrenverbindung eingeschaltet gaben 46 cm^3. Die beiden Stöpsel wurden dann, wie es in Fig. 1 angedeutet ist, angebracht; sie gaben mit derselben Differenz 17 cm^3, wenn sie gegeneinander gedrückt wurden; die Luft hatte also in diesem Falle, außer den in Serie angebrachten Stöpseln, noch die Kontaktstelle zu passieren; der Übergangswiderstand setzte somit die Geschwindigkeit im Verhältnisse 46 : 17 herab.

Die kleine Durchströmungsgeschwindigkeit wird doch von untergeordneter Bedeutung, wenn man mit der Fallluftpumpe arbeitet, weil dieser Apparat selber langsam bei den größeren Gasdrucken arbeitet. Man kann mit porösem Kontakt wegen der Bequemheit, mit welcher man die Verbindung unterbricht bez. wieder herstellt, sehr leicht ein Vorpumpen mit der Wasserluftpumpe vornehmen. Der Zeitfrage gegenüber muß es erinnert werden, daß das Zeitraubende bei den Arbeiten mit der Quecksilberpumpe gewöhnlich das Pumpen bei den sehr kleinen Drucken ist, und es zeigt sich, daß eben bei diesen die Gase *auffallend schnell durch die porösen Stöpsel gehen*, welches durch das Herabsetzen der inneren Reibung erklärt wird. Ein Spektralrohr, welches vor dem Anbringen des Chamottestöpsels ausgetrocknet und mit Phosphorsäureanhydrid im Zuleitungsrohre versehen worden ist, kann mit porösem Kontakt in 1—2 Stunden vollständig entleert werden; bei nachfolgendem Hineinlassen von wasserstofffreien Gasen erscheint das Rohr vollständig von Wasserstofflinien und Kohlenoxydbändern frei. Die Dichtigkeit der Sperrung mittels Quecksilbers über den porösen Stöpsel hat sich monatelang bewährt.

Das langsame Durchströmen wird ganz ohne Bedeutung, wenn man wie in Arbeiten mit Spektralröhren mit kleinen Gasmengen arbeitet. Hat man nur kleine Mengen zur Disposition, bietet die poröse Kontaktverbindung den wesentlichen Vorteil dar, daß die Verbindungsglieder wenig Platz aufnehmen

und nur kleine oder gar keine schädliche Räume mit sich führen. Der Verlust an Gas beim Schließen oder Unterbrechung einer Verbindung wird daher ein minimaler, und man wird ihm in den meisten Fällen ganz entgehen können, weil man sehr leicht Luftpumpenverbindung mit einem Raum, welcher durch einen porösen Kontaktkörper unter Quecksilber abgesperrt ist, herstellen kann.

Bei den Arbeiten mit Spektralröhren ist das langsame Durchströmen gewöhnlich ein Vorteil; demzufolge kann man nämlich mit der porösen Kontaktverbindung die Zuleitung oder das Entfernen des Gases viel besser als mit Röhrenverbindungen und Hähnen beherrschen. Begrenzt man die Berührung zwischen den beiden Kontaktkörpern zu einem kurzdauernden, leisen Streifen, wird die übergeführte Gasmenge eine minimale sein.

Die Leichtigkeit, mit welcher man eine poröse Kontaktverbindung unterbricht, macht die Arbeit mehr als gewöhnlich von der Pumpe unabhängig. Hat man in gewöhnlicher Weise ein Spektralrohr zwecks seiner Evakuierung mit der Pumpe verbunden, wird gewöhnlich auch darauf hingewiesen sein, den Behälter mit dem zu untersuchenden Gase mit der Pumpe zu verbinden; will man das Spektrum bei verschiedenen Drucken des Gases untersuchen, muß man weiter das Spektroskop in unmittelbarer Nähe der Pumpe aufstellen und verwenden, was öfters unbequem ist. Mit poröser Kontaktverbindung dagegen kann man nach dem Evakuieren des Rohres dieses und den Gasbehälter in das Dunkelzimmer zum bequemen Aufstellen für das Spektroskop hineinführen, ohne bei der weiteren Arbeit von der Pumpe abhängig zu sein.

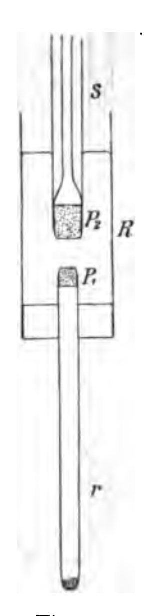


Fig. 3.

Zwecks der Darstellung von Emanation durch das Glühen von Radiumbromid habe ich letzteres in ein kleines Reagenzglas, *r* in Fig. 3, Höhe 8,5 cm, Weite 4 mm, aus Quarz angebracht. Um *r* mit dem mit der Pumpe verbundenen Rohr, wo die Emanation kondensiert werden sollte, in Verbindung

zu setzen, wurde ein kleiner Chamottestöpsel p_1 in die Mündung von r festgekittet. In ein mittels eines Kautschukstöpsels mit r verbundenes weiteres Glasrohr R wurde Quecksilber gegossen, und hier wurde das mit dem Stöpsel p_2 versehene Zuleitungsrohr s hineingeführt. Nachdem das Quarzrohr evakuiert und dann mit Wasserstoff bis zu ca. $^1/_3$ Atmosphärendruck gefüllt worden war, wurde die Berührung zwischen p_1 und p_2 unterbrochen, und das Radiumpräparat wurde durch eine ganz kleine Flamme zum Glühen erhitzt. Hiernach wurde wieder Kontakt zwischen p_1 und p_2 geschlossen, und der emanationshaltige Wasserstoff wurde durch das in flüssiger Luft gekühlte Kondensationsrohr herausgezogen. Es ist zur Sicherung einer vollständigen Kondensation der Emanation hier ein Vorteil, daß das Gas nur langsam durch die beiden Stöpsel strömt. Nach dem Evakuieren wird Rr entfernt, während man mit der Emanation weiter arbeitet. Das Quarzrohr steht zum nächsten Versuche vollkommen dicht verschlossen da.

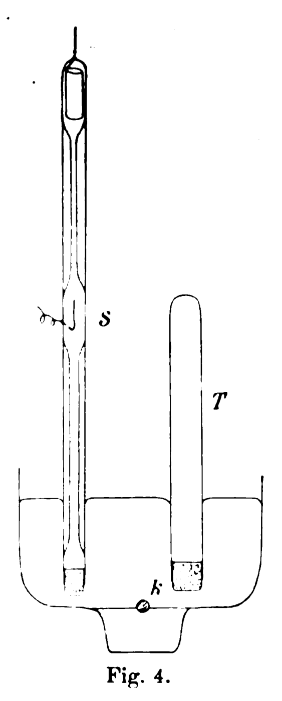


Fig. 4.

Man kann einen porösen Kontaktkörper allein, ohne es in Verbindung mit irgend einem Hohlraum zu haben, als Gasbehälter zum Abmessen von unbegrenzt kleinen Luftmengen verwenden. k ist in Fig. 4 ein kleiner Chamottekörper, welcher in einer Schicht von Siegellack im Boden eines mit Quecksilber gefüllten Gefäßes befestigt ist; es wird als Gasometer so verwendet: Zuerst werden die Poren von k mittels einer kurzdauernden Berührung mit dem Stöpsel p_2 in Fig. 2, während die Pumpe arbeitet, evakuiert; darauf wird ein mit porösem Stöpsel geschlossener, das zu untersuchende Gas enthaltender Behälter T (Fig. 4) ins Gefäß angebracht. Drückt man den Stöpsel des T gegen k, werden die Poren des letzteren sich mit dem Gase bis zum Drucke im Behälter füllen; hiernach kann k seinen Inhalt z. B. an ein evakuiertes

Spektralrohr, welches wie *S* in der Figur im Quecksilber des Gefäßes angebracht ist, abgeben. Auf diese Weise haben Hr. Th. Thorkelsson und ich die Entwickelung eines Spektrums untersucht, welche dadurch bedingt war, daß das Spektralrohr eine Reihe von konstanten Zuführungen eines Gemisches von Argon und Helium bekam. Man wird die Kapazität des Gasometers, welche wegen der Adhäsion etwas verschieden für verschiedene Gase sein kann, für ein gegebenes Gas messen können, wenn man die Poren mit dem Gas bei bekanntem Druck und Temperatur erfüllt und darauf mittels der Quecksilberpumpe den Inhalt in ein Meßrohr überführt; werden die beiden Operationen hinlänglich häufig wiederholt, kann man ohne großen Zeitverlust eine so große Gasmenge überführen, daß man sie im Meßrohr gut bestimmen kann.

Zum Aufsammeln eines Gases über Quecksilber wird ein Rohr von der in Fig. 5 dargestellten Form verwendet. In der Einschnürung ist ein poröser Stöpsel *p* festgekittet; ins Gefäß oberhalb des Stöpsels gießt man Quecksilber; das Gefäß muß so weit sein, daß man ohne Schwierigkeit ein mit seinem Quecksilbernäpfchen versehenes und mit porösem Stöpsel verschlossenes Rohr *r* unterhalb der Quecksilberoberfläche des Gefäßes vom Näpfchen auslösen kann. Der Raum *R* unterhalb des Stöpsels *p* wird von unten mit Quecksilber gefüllt, indem man die Luft in *R* durch die beiden Stöpsel und das Rohr *r* entfernt. Das Gas wird entweder gewöhnlicherweise von unten her oder mittels porösen Kontaktes von oben zugeführt.

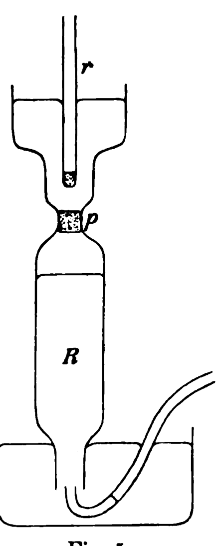


Fig. 5.

Um das Gas aus einem gewöhnlichen Aufsammelglas herauszunehmen, habe ich, wie es aus Fig. 6 hervorgeht, verfahren. Das porös geschlossene Rohr *a* mit dem als Handhabe dienenden Stiel *s* wird evakuiert und unter Quecksilber in einem Troge zusammen mit dem Aufsammelsglas *G* angebracht. Wird *a* in *G* hineingeführt, bis der Stöpsel oberhalb des Quecksilbers in *G* erscheint, so sieht man, daß das

abgesperrte Gas schnell von *a* hineingenommen wird; man kann so das Gas sehr vollständig entfernen, da das kleinste Bläschen zwischen Quecksilber und Glas bei der Berührung mit dem Stöpsel verschwindet.

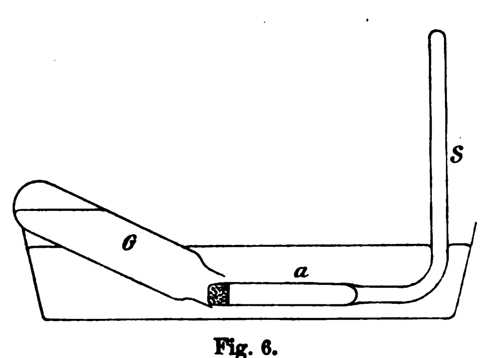


Fig. 6.

Zum Entfernen des Stickstoffs von einem Gemische von diesem Gase mit Edelgasen habe ich den in Fig. 7 dargestellten Absorptionsapparat eingerichtet. Jedes Ende eines dickwandigen, 37 cm langen, 0,9 cm weiten Stahlrohres *R* wird in ein viel weiteres Knierohr hineingeschraubt, nachdem es mit einem leicht abnehmbaren, porösen Stöpsel *p* geschlossen worden ist. In die Knieröhre wird Quecksilber gegossen. Der Stöpsel *p* ist so gebildet, daß man leicht poröse Kontaktverbindung zwischen ihm und einem ins Quecksilber hineingetauchten Rohr herstellt. Bevor das Stahlrohr geschlossen wird, füllt man ein Gemisch von Mg, CaO und Na hinein. Nachher wird es in einem Verbrennungsofen angebracht, wo es, nachdem die Luft mittels der Wasserluftpumpe durch die Stöpsel ausgepumpt worden ist, zur hellen Rotglut erwärmt wird, während die aus dem Ofen herausragenden Enden mittels strömenden Wassers gekühlt werden. Hierdurch wird der Rest von N und O absorbiert.

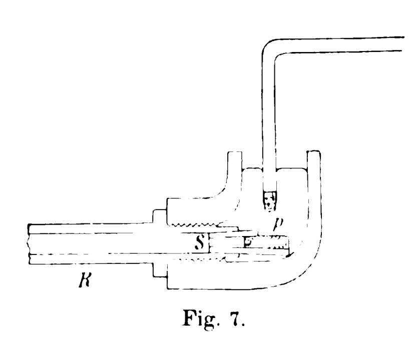


Fig. 7.

Darauf wird der das Gasgemisch enthaltende Behälter mit dem ins Quecksilber eintauchenden Rohre verbunden; werden die beiden Stöpsel gegeneinander gedrückt, so strömt das Gemisch ins Rohr hinein, indem der Stickstoff absorbiert wird. Der Rest von Edelgasen im Stahlrohr wird mittels der Quecksilberpumpe herausgenommen

und in einem Aufsammelglas übergeführt. Hr. Th. Thorkelsson und ich haben auf diese Weise Argon und Helium in Gasen von mehreren isländischen heißen Quellen, welche Hr. Thorkelsson im Sommer 1904 besucht hatte, isoliert. Die Vorteile, welche die Verwendung vom porösen Kontakt hier mit sich führt, sind die folgenden: Die Dichtigkeit ist vollkommen; die Röhren für Zu- oder Ableitung werden leicht im voraus evakuiert, und die verschiedenen nacheinanderfolgenden Verbindungen werden leicht gewechselt ohne Verlust an Gas und ohne daß fremde Gase hineintreten können.

Läßt man ein Gemisch von Gasen einen porösen Körper durchströmen, muß man darauf aufmerksam sein, daß die verschiedenen Komponenten mit verschiedener Geschwindigkeit hindurchgehen können. Hieraus folgt, daß das Mischungsverhältnis verändert werden kann, wenn man nicht das ganze Gasquantum hindurchsendet. Die Ungleichheit der Geschwindigkeit verschiedener Gase wird nützlich, wenn man eine *Trennung mittels Diffusion* der Gase ungleicher Dichte beabsichtigt. Diese

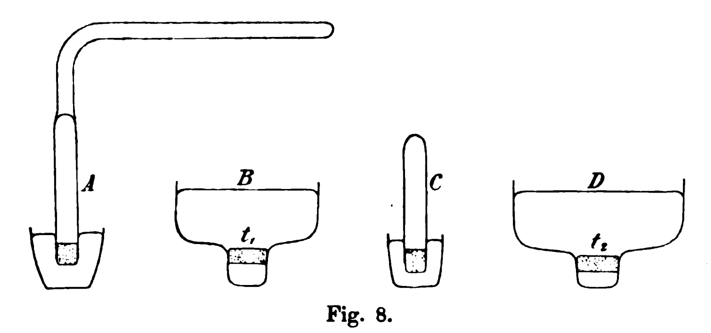


Fig. 8.

sonst recht mühsame Operation wird bedeutend erleichtert bei der Verwendung des porösen Kontaktes unterhalb des Quecksilbers, weil man wegen der Leichtigkeit des Schließens oder des Unterbrechens des Kontaktes in kurzer Zeit eine vielmal fraktionierte Filtrierung durch Diffusion von einem Gasgemische vornehmen kann, besonders wenn man mit den kleinen Mengen, welche man in einem Spektralrohr braucht, zu tun hat. In der oben genannten Untersuchung von isländischen Quellgasen wurde das Gemisch von Helium mit einer relativ großen Menge von Argon durch Diffusion mit der Absicht filtriert, das Helium

mit Sicherheit spektroskopisch nachzuweisen. Das Gemisch war in dem porös geschlossenen Rohr *A* (Fig. 8) enthalten. Zum Gebrauch bei der Diffusion wurden die beiden Diffusionsgefäße *B* und *D* verfertigt. Jedes derselben hat unten einen kleinen Gasraum unterhalb einer Terrakottaplatte *t*, welche oben im engeren Teil des Gefäßes festgekittet ist; oberhalb der Platte ist Quecksilber. Terrakotta wurde wegen der Feinheit seiner Poren gewählt. Weiter wurde das mit einem Terrakottastöpsel verschlossene Rohr *C* hergestellt. Nachdem die Gasräume von *B*, *C* und *D* evakuiert worden sind, fängt die Filtrierung damit an, daß man den Gasbehälter *A* in *B* anbringt; es wird dann eine Reihe kurzdauernder Berührungen zwischen dem Stöpsel von *A* und der Patte t_1 vorgenommen. Nachdem *A* entfernt und *C* in *B* angebracht worden ist, wird die zweite Filtrierung durch kurzdauernde Berührungen zwischen dem Stöpsel *C* und der Platte t_1 ausgeführt. *C* wird nun mit seinem Filtrat in *D* überführt; hier wird die dritte Filtrierung vorgenommen. Schließlich wird eine vierte Filtrierung bei dem Einnehmen des Gases von *D* in das Spektralrohr mittels porösen Kontaktes ausgeführt.

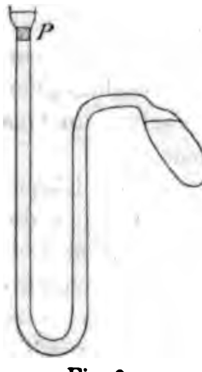


Fig. 9.

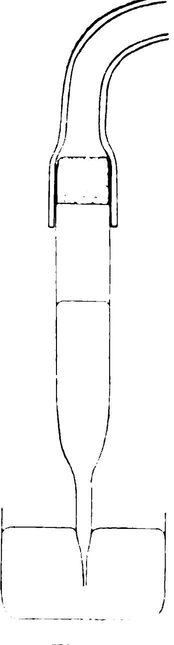


Fig. 10.

Zum Schluß werde ich noch zwei Verwendungen, welche ich von den porösen Stöpseln gemacht habe, erwähnen. Fig. 9 zeigt, wie ein Barometer hergestellt werden kann. Der eine Ast eines gebogenen Rohres ist unterhalb einer Erweiterung durch einen Chamottestöpsel geschlossen; der andere Ast ist mit einem Quecksilberreservoir in Verbindung; gießt man Quecksilber in die Erweiterung, kann man das Rohr mittels der Quecksilberpumpe evakuieren, eventuell in Verbindung mit einer Erwärmung des

größten Teiles des Rohres. Nach dem Evakuieren läßt man das Quecksilber des Reservoirs ins Rohr hinüberfließen. Durch angebundenes Leder wird das die Erweiterung ganz ausfüllende Quecksilber gegen Abfließen gesichert. Das Barometer hat den Vorteil, daß man es zu jeder Zeit leicht aufs neue durch den Stöpsel evakuieren kann.

Fig. 10 zeigt eine Anordnung zum genauen Abmessen einer gegebenen Menge von Quecksilber. Ein Glasrohr wird am einen Ende zu einer feinen Spitze ausgezogen; das andere Ende wird mittels eines Stöpsels von Gips geschlossen. Steckt man die Spitze in Quecksilber, während ein über das andere Ende geschobener Schlauch mit der Wasserluftpumpe verbunden wird, so steigt das Quecksilber ins Rohr hinauf, bis es vom Gips zurückgehalten wird. Das Rohr wird aus dem Gefäß emporgehoben, während das Vakuum in den Poren des Gipses noch vorhanden ist; nachher kann man oben Luft hineinsenden, ohne daß Quecksilber austritt. Durch einen angemessenen Überdruck wird die ganze Menge ausgetrieben.

Kopenhagen, September 1905.

(Eingegangen 28. September 1905.)

11. *Über den Vorgang der Abscheidung eines Kolloides im elektrischen Strome;*
von August Schmauss.

Es ist bekanntlich eine *wesentliche* Eigenschaft der kolloidalen Lösungen, daß beim Hindurchleiten eines elektrischen Stromes die gelösten Teilchen sich an einer der beiden Elektroden abscheiden.

Von J. Billitzer[1]) ist gezeigt worden, daß sich die Kolloidteilchen in gewissem Sinne wie *Jonen* verhalten, und daß ihre Überführung im elektrischen Strome einer Art Elektrolyse entspricht.

Studieren wir den Vorgang, um den Einfluß von Konvektionsströmungen möglichst zu vermeiden, in einer dünnen Schicht der kolloidalen Lösung, die etwa auf eine Glasplatte ausgegossen sei, dann wird sich uns einige Zeit, nachdem der Strom geschlossen wurde, folgendes Bild bieten (Fig. 1):

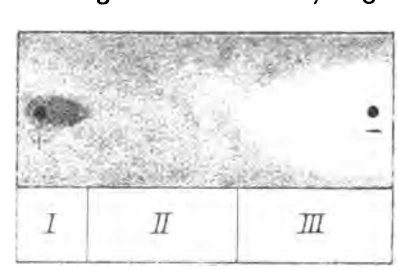


Fig. 1.

Es sind drei Zonen zu unterscheiden. In der Zone I erfolgt die Abscheidung des Kolloids an der Elektrode, deren Ladung, wie man annehmen darf, der des Kolloids entgegengesetzt ist.

In der Zone II ist die Flüssigkeit unverändert, die Zone III ist frei vom Kolloid. Die Breite der Zone III ist bedingt durch die Wanderungsgeschwindigkeit des Kolloids, die nicht groß sein kann — verglichen mit Ionengeschwindigkeiten — da einerseits die zu bewegenden Teilchen groß sind, wie wir aus der ultramikroskopischen Untersuchung wissen[2]), andererseits ihre Ladung

1) J. Billitzer, Ann. d. Phys. **11.** p. 914. 1903.

2) H. Siedentopf u. R. Zsigmondy, Ann. d. Phys. **10.** p. 1. 1903; A. Cotton u. H. Mouton, Compt. rend. **138.** p. 1584 u. 1692. 1904.

klein ist, was aus den Fällungsversuchen von Billitzer[1]) hervorgeht.

Das in Fig. 1 dargestellte Bild erhalten wir *bei der Elektrolyse von Kolloiden*, die in einer *schlechter als reines Wasser leitenden Flüssigkeit gelöst* sind.

Ist das *Lösungsmittel Wasser*, dann kompliziert sich die Erscheinung.

Die folgenden Versuche wurden mit kolloidalen Gold- und Silberlösungen angestellt, die nach dem Bredigschen Verfahren[2]) hergestellt waren.

Zwei Platindrähte tauchten in die auf eine Glasplatte ausgegossene Lösung. War dann der Strom einige Minuten hindurchgegangen, dann war der Anblick der in Fig. 2 schematisch dargestellte.

In Zone I erfolgte zunächst Abscheidung des Kolloids an der Anode. Nachdem einiges Kolloid dort ausgefällt war, sah man die Grenze einer Zone II mit gleichmäßiger Geschwindigkeit gegen die Kathode zustreben. In dieser Zone erfolgte die Abscheidung des Kolloids in Ringen, welche konzentrisch zur Anode lagen. In Zone III war die ursprüngliche kolloidale Lösung unverändert. Von der Kathode her rückte mit gleichmäßiger Geschwindigkeit eine Zone IV mit scharfer Grenze gegen Zone III vor. In dieser Zone war die Flüssigkeit dunkler gefärbt als in der ursprünglichen Lösung. In Zone V, die sich ebenfalls gleichmäßig gegen die Anode hin vergrößerte, war kein Kolloid mehr enthalten.



Fig. 2.

Es wurde der Strom geöffnet, um zu sehen, ob die Ausbildung dieser Höfe durch eine gewöhnliche Diffusion von an den Elektroden abgeschiedenen Zersetzungsprodukten bedingt sei. Da sich die Grenzen nicht weiter verschoben, mit erneutem Ein-

1) J. Billitzer, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, 113. p. 1163. 1904.

2) G. Bredig, Anorgan. Fermente, Leipzig 1901.

setzen des Stromes jedoch sofort die Wanderung fortsetzten, war gezeigt, daß ***die Ausbildung der Höfe eine direkte Wirkung des Stromes*** **war. Ließ man den Strom länger geschlossen, so daß die Zonen II und IV bis zu gegenseitiger Berührung vordrangen, dann** ***erfolgte hier die Abscheidung des ganzen*** **in der Zone IV** ***noch in Lösung befindlichen*** **und auf die Grenze zwischen II und IV zustrebenden** ***Kolloides.***

Die Erscheinung hat viel Ähnlichkeit mit den von Lehmann[1]) an Suspensionen von Tusche beobachteten Vorgängen, wenn durch dieselben ein elektrischer Strom geleitet wurde, und soll mit Rücksicht auf die neueste Theorie der Kolloide von Billitzer[2]), die die ***Bedeutung der Ladung des Kolloides für sein Verhalten*** **betont, eingehender studiert werden.**

Zunächst wurde die ***Geschwindigkeit der Ausbreitung der Höfe*** **II und IV gemessen. Es ergab sich für die Gold- und Silberlösung die Geschwindigkeit pro Sekunde für den Hof II im Mittel zu 0,00026 cm, für den Hof IV zu 0,00040 cm für den Potentialabfall von 1 Volt pro 1 cm (gemessen mit 50 Volt Spannung und 10 cm Elektrodenabstand).**

Diese ***Geschwindigkeit*** **ist sehr groß und hat** ***dieselbe Größenordnung wie die der meisten einwertigen Ionen.*** Es müssen starke elektrische Kräfte wirksam sein, da das elektrische Feld der angelegten Potentialdifferenz den großen, schwach geladenen Kolloidteilchen keine solche Geschwindigkeit erteilen könnte.

Einen näheren Einblick in den Vorgang verschaffte die Messung der Stromstärke. Es wurde an die 10 cm voneinander entfernten Platinstifte, welche als Elektroden dienten, eine Potentialdifferenz von 50 Volt angelegt und der Verlauf der Stromstärke gemessen. Es zeigte sich eine *Zunahme* der Stromstärke, die so lange anhielt, bis die Zonen II und IV zu gegenseitiger Berührung gelangten. Trat diese ein, dann nahm die Stromstärke schnell ab.

Dadurch war die Ausbildung der Höfe in ersichtlichen Zusammenhang mit der von Kohlrausch und Heydweiller[3])

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. phys. Chemie **14**. p. 306. 1894.
2) J. Billitzer, l. c. **113**. 1098.
3) F. Kohlrausch u. A. Heydweiller, Wied. Ann. **54**. p. 392. 1895.

studierten Erscheinung gebracht, daß in Salzlösungen und auch in reinem Wasser, das stets noch Spuren eines Salzes enthalten kann, beim Hindurchleiten eines Stromes der Widerstand abnimmt, um nach erreichtem Minimum wieder anzusteigen.

Die Erklärung für diese Erscheinung liegt in der Bildung von H- bez. OH-Verbindungen an den Elektroden, welche besser leiten als das vorhandene Salz. Es bildet sich an der Kathode die Base, an der Anode die Säure; infolgedessen findet sich um die Kathode ein Hof mit negativ geladenen Ionen, die unter dem Einfluß des auf sie wirkenden Feldes zur Anode wandern, von der Anode her werden dem Kation die positiven Ionen der Säure nachgesandt.

Der bekannte Vorlesungsversuch der Elektrolyse einer Lösung von Na_2SO_4, der Lackmustinktur beigemischt ist, gibt im Prinzip den Vorgang bei unserem Kolloid. Was dort *chemische* Wirkung der Zersetzungsprodukte auf die Farbstofflösung bedeutet, muß sich bei unserer Kolloidlösung darstellen als Wirkung der *Ionen auf die geladenen Kolloidteilchen.*

Es ist von Billitzer[1]) eingehend gezeigt worden, daß bei der Koagulierung von Kolloiden durch Elektrolyte stets das entgegengesetzt geladene Ion mitgefällt wird. Dabei dient *ein Ion als Kondensationskern* so vieler Kolloidpartikelchen, daß das Konglomerat ungeladen ist. Eine wässerige Lösung eines Kolloids ist um so haltbarer, je weniger Elektrolyt mitgelöst ist. Da auch in reinstem Wasser noch Ionen vorhanden sind[2]), kann eine Kolloidlösung nur eine begrenzte Lebensdauer haben. Das „Altern“ kolloidaler Lösungen besteht gerade in dem Zusammenschluß der kolloidalen Teilchen zu mehreren, das unter dem Einfluß der „sammelnden“ Ionen erfolgt. *Das „Altern“ ist also eine sehr langsame Koagulation* (vgl. die Beobachtung von Schmauss[3]) und neuerdings von Cotton und Mouton[4]) an Fer Bravais) infolge der geringen Konzentration der fällen-

---

1) J. Billitzer, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, 113. p. 1163. 1904.

2) F. Kohlrausch u. A. Heydweiller, l. c. p. 394.

3) A. Schmauss, Ann. d. Phys. 12. p. 187. 1903.

4) A. Cotton u. H. Mouton, Compt. rend. 1905. p. 349.

den Ionen. Von Billitzer ist gezeigt worden, daß eine *mittlere* Konzentration des Kolloides die beste ist.

Auf Grund dieser Beobachtungen kann die beschriebene Hofbildung vollständig erklärt werden: An der Anode ist ein *Überschuß* an positiv geladenen Ionen vorhanden, welche unter dem Einflusse des elektrischen Feldes zur Kathode wandern. Auf diesem Wege begegnen sie den entgegengesetzt geladenen Kolloidteilchen, deren Koagulation sie herbeiführen. Desgleichen ist an der Kathode ein *Überschuß* an negativ geladenen Ionen vorhanden, welche zur Anode getrieben werden. Da diese Ionen mit den Kolloidteilchen *gleichgeladen* sind, werden sie dieselben nach der Anode hin abstoßen. Zur Wirkung des elektrischen Feldes auf die negativ geladenen Kolloide *addiert* sich die elektrostatische Wirkung der Ionen auf die gleichgeladenen Kolloide. Die Folge ist eine steigende Konzentration der Zone IV an Kolloidteilchen, die, wie die mikroskopische Untersuchung ergeben hat, noch vollständig in „Lösung“ sind, da ja die gleichgeladenen Ionen geradezu als „Schutzkolloid“ wirken. Kommt die Zone IV mit der Zone II zur Berührung, die einen Überschuß an positiven Ionen heranträgt, dann muß in Anbetracht der hohen Konzentration des Kolloides hier *alles* heranwandernde Kolloid ausfallen.

Es ist noch die in der Fig. 2 angedeutete Erscheinung zu besprechen, daß in Zone II *die Abscheidung des Kolloides* in zu der Anode konzentrischen Ringen, also *periodisch*, erfolgt. Die Erklärung liegt in der bereits erwähnten Tatsache, daß *ein* Ion *mehrere* Kolloidteilchen „kondensieren“ muß, bis seine Ladung neutralisiert ist. Das Ion wird sich mit seinem Überschuß an elektrischer Ladung so lange fortbewegen, bis es die entsprechende Anzahl Kolloidteilchen gesammelt hat. Es wird also eine kleine Zone der Lösung von Kolloid befreit, während unmittelbar daneben Koagulation erfolgt. Diese periodische Abscheidung ist besonders gut zu sehen, wenn die Lösung in einer Kapillare der Elektrolyse unterworfen wird. Dann ordnen sich die Abscheidungen senkrecht zur Rohrachse an und gewähren den Anblick von äußerst niedlichen Kundtschen Staubfiguren.

Die Figuren, die man unter verschiedenen Bedingungen

erhalten kann, erinnern an die zuerst von Liesegang[1]) studierten periodischen Abscheidungen aus übersättigten Lösungen bei Diffusionsvorgängen. Die Analogien zwischen beiden Erscheinungen sind weitgehende und bestätigen die Vermutung Bechholds[2]), daß man kolloidale Lösungen als „metastabile" Lösungen auffassen kann, die in der chemischen Dynamik eine große Bedeutung haben.[3])

München, Physikalisches Institut der Universität.

---

1) R. Liesegang, Photogr. Archiv. 1896. p. 321.

2) H. Bechhold, Zeitschr. phys. Chem. 52. p. 185. 1905.

3) W. Ostwald, Lehrb. der allg. Chemie. 2. Aufl. II. 2. p. 778.

(Eingegangen 9. Oktober 1905.)

12. *Das elektromagnetische Feld in der Umgebung eines gedämpft schwingenden linearen Oszillators;* *von F. Hack.*

In einer früheren Mitteilung[1]) habe ich auf Grund einer theoretischen Arbeit von Hrn. Abraham[2]) die Kraftlinien dargestellt, welche von einem ungedämpft schwingenden linearen Sender ausgehen. Meine Zeichnungen bezogen sich auf die Grundschwingung und die beiden ersten Oberschwingungen.

Ich möchte nun versuchen, wenigstens für die Grundschwingung den Einfluß der Dämpfung durch Zeichnungen darzustellen; die letzteren beruhen durchaus auf der genannten Arbeit des Hrn. Abraham, der auch die Bezeichnungen bis auf geringe Abweichungen entlehnt sind.

Die *ganze* Senderlänge ist $= 2$ gesetzt, der Querschnittsradius $= b$, woraus sich die Größe

$$\varepsilon = \frac{1}{4 \log \text{nat} \frac{2}{b}}$$

berechnet. Als Wert von ε soll dem folgenden $\varepsilon = 0{,}05$ zugrunde gelegt werden, was einem Verhältnis:

$$\frac{\text{Querschnittsradius}}{\text{ganze Senderlänge}} \sim \frac{1}{150}$$

entsprechen würde, da $\log \text{nat}\, 150 \sim 5{,}01$ ist. Das zugehörige Dekrement der Schwingungen ist $\sim 0{,}6$; stärker gedämpfte Schwingungen dürften in praxi wohl kaum vorkommen.

Aus der Diskussion der von Hrn. Abraham eingeführten Funktion $A(x, y)$ ergeben sich nun folgende Unterschiede zwischen gedämpften und nicht gedämpften Schwingungen:

---

1) F. Hack, Ann. d. Phys. **14.** p. 539 ff. 1904.

2) M. Abraham, Wied. Ann. **66.** p. 435 ff. 1898.

1. Während bei den ungedämpften Schwingungen die Wellenlänge der Grundschwingung $\lambda_0 = 4$ ist, gilt für die gedämpften Schwingungen

$$\lambda = 4(1 + c_1 \varepsilon^2), \quad c_1 \sim 5{,}6 .$$

Dementsprechend sind die Perioden der ungedämpften und der gedämpften Schwingung bezüglich:

$$T_0 = \frac{4}{c} \quad \text{und} \quad T = \frac{4}{c}(1 + c_1 \varepsilon^2) .$$

2. Bei ungedämpften Schwingungen sind die durch

$$c\,t = 0 , \quad c\,t = 2 , \quad c\,t = 4 \ldots$$

bezeichneten Zeitpunkte „Ruhepunkte" des Senders; d. h. es gehen vom Sender keine Kraftlinien aus.

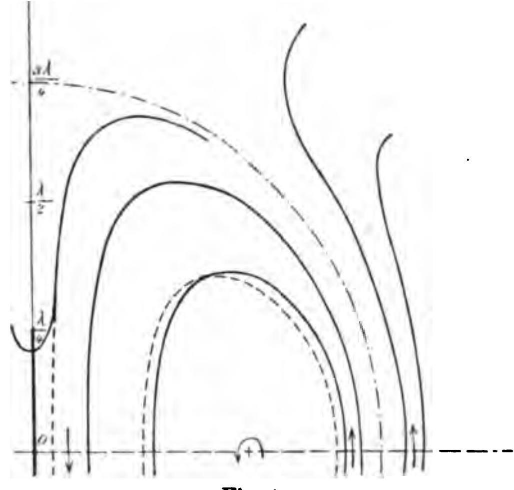


Fig. 1.

Bei gedämpften Schwingungen gibt es keinen Zeitpunkt, für den das letztere streng richtig wäre; indessen finden Augenblicke statt, zu denen vom Sender äußerst wenige Kraftlinien ausgehen; man erhält sie aus

$$t = -\frac{S_1(0) - S_1(1)}{\frac{\pi}{2} \cdot c} \cdot \varepsilon + k \cdot \frac{T}{2} ,$$

wobei

$$S_1(0) - S_1(1) \sim 2{,}3 \quad \text{und} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

zu setzen ist. Auch diese Zeitpunkte sollen als „Ruhepunkte" bezeichnet werden.

3. Der Vergleichung sind zugrunde gelegt:

a) eine ungedämpfte Schwingung 𝔘 mit der Periode T_0,

b) eine gedämpfte Schwingung 𝔊 mit der Periode T.

𝔘 und 𝔊 sind dargestellt in einem Ruhepunkt und drei weiteren Phasen, die von dem Ruhepunkt um $T_0/8$ bez. $T/8$ abstehen; diese Darstellungsweise bringt wenigstens in der Umgebung des Senders die geringsten Inkonvenienzen mit sich.

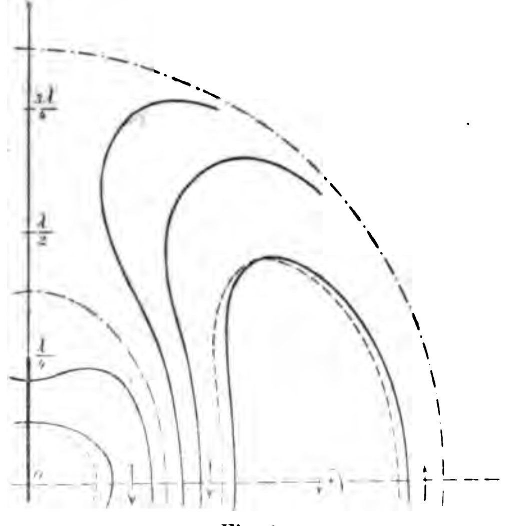


Fig. 2.

4. Die „Nullkurven", auf welchen $A(x, y) = 0$ ist, sind bei 𝔘 Ellipsen, deren Brennpunkte die Enden des Oszillators sind; die großen Halbachsen sind in der die Ruhepunkte darstellenden Zeichnung ungerade Vielfache der halben Senderlänge; schon in mäßiger Entfernung vom Sender können die Ellipsen durch Kreise ersetzt werden.

Bei 𝔊 sind die Nullkurven in der Nähe des Senders im Vergleich mit 𝔘 etwas nach außen gedrängt, doch beträgt die Abweichung nur etwa 1 Proz. der Wellenlänge, ist deshalb in den Zeichnungen nicht dargestellt. In größerer Entfernung vom Sender hingegen befinden sich die Nullkurven etwas innerhalb der für 𝔘 gültigen und nähern sich mit wachsender Ent-

fernung vom Sender asymptotisch der Lage, welche sie bei einer ungedämpften Schwingung $\mathfrak{U}_1$ einnehmen würden, die um die Zeit

$$\tau = \frac{S_1(0) - S_1(1)}{\frac{\pi}{2} \cdot c} \cdot \varepsilon$$

später einsetzt als $\mathfrak{U}$.

Die Abweichung zwischen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_1$ in der Lage der Nullkurven überschreitet nicht 2 Proz. der Wellenlänge.

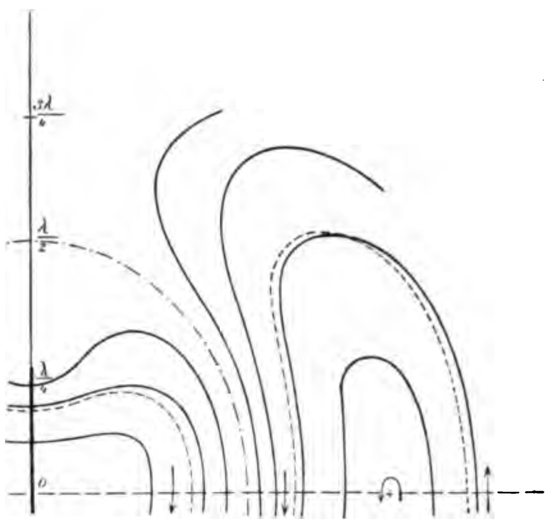


Fig. 3.

5. Im ganzen erleidet die Form der Kraftlinien keine wesentliche Änderung, dagegen treten in der Nähe des Senders Verschiebungen in der Lage auf, die jedoch 5 Proz. der Wellenlänge in keinem praktischen Fall übersteigen werden. Die Verschiebung ist am stärksten kurz vor und nach der Abschnürung einer Kraftlinie; im übrigen macht sie sich am meisten bei denjenigen Linien bemerklich, welche mittleren Werten von $A(x, y)$ entsprechen. Das Weitere ergibt sich aus dem Anblick der Zeichnungen, in welchen

$\mathfrak{G}$ durch ausgezogene,

$\mathfrak{U}$ durch gestrichelte Linien

dargestellt ist; die Nullkurven sind strichpunktiert; wo $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{U}$ nicht zu unterscheiden waren, ist die Linie ausgezogen.

Mit fortschreitender Entfernung vom Sender geht das Feld von $\mathfrak{G}$ asymptotisch in dasjenige von $\mathfrak{U}_1$ über, wenn nur die Form der Kraftlinien in Betracht gezogen wird.

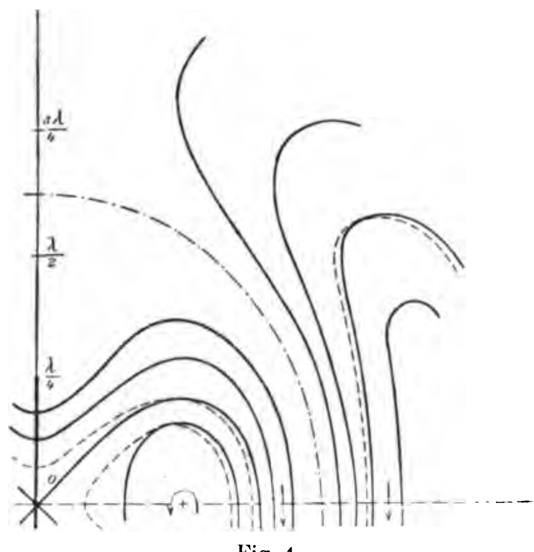


Fig. 4.

Das Resultat ist also: *der Verlauf der Kraftlinien bei gedämpften Schwingungen weicht so wenig von demjenigen bei ungedämpften Schwingungen ab, daß man für alle Zwecke, bei denen es nicht auf die äußerste Genauigkeit ankommt, denjenigen der ungedämpften Schwingungen zugrunde legen kann, so wie er in der früheren Mitteilung geschildert wurde.*

Göppingen (Württemberg), Sept. 1905.

(Eingegangen 13. September 1905.)

13. *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?*

von A. Einstein.

Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir publizierten elektrodynamischen Untersuchung[1]) führen zu einer sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.

Ich legte dort die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außerdem das Prinzip:

Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Parallel-Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden (Relativitätsprinzip).

Gestützt auf diese Grundlagen[2]) leitete ich unter anderem das nachfolgende Resultat ab (l. c. § 8):

Ein System von ebenen Lichtwellen besitze, auf das Koordinatensystem (x, y, z) bezogen, die Energie l; die Strahlrichtung (Wellennormale) bilde den Winkel φ mit der x-Achse des Systems. Führt man ein neues, gegen das System (x, y, z) in gleichförmiger Paralleltranslation begriffenes Koordinatensystem (ξ, η, ζ) ein, dessen Ursprung sich mit der Geschwindigkeit v längs der x-Achse bewegt, so besitzt die genannte Lichtmenge — im System (ξ, η, ζ) gemessen — die Energie:

$$l^* = l \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

wobei V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Von diesem Resultat machen wir im folgenden Gebrauch.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

2) Das dort benutzte Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist natürlich in den Maxwellschen Gleichungen enthalten.

Es befinde sich nun im System (x, y, z) ein ruhender Körper, dessen Energie — auf das System (x, y, z) bezogen — E_0 sei. Relativ zu dem wie oben mit der Geschwindigkeit v bewegten System (ξ, η, ζ) sei die Energie des Körpers H_0.

Dieser Körper sende in einer mit der x-Achse den Winkel φ bildenden Richtung ebene Lichtwellen von der Energie $L/2$ (relativ zu (x, y, z) gemessen) und gleichzeitig eine gleich große Lichtmenge nach der entgegengesetzten Richtung. Hierbei bleibt der Körper in Ruhe in bezug auf das System (x, y, z). Für diesen Vorgang muß das Energieprinzip gelten und zwar (nach dem Prinzip der Relativität) in bezug auf beide Koordinatensysteme. Nennen wir E_1 bez. H_1 die Energie des Körpers nach der Lichtaussendung relativ zum System (x, y, z) bez. (ξ, η, ζ) gemessen, so erhalten wir mit Benutzung der oben angegebenen Relation:

$$E_0 = E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right],$$

$$H_0 = H_1 + \left[\frac{L}{2}\,\frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} + \frac{L}{2}\,\frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\right]$$

$$= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Durch Subtraktion erhält man aus diesen Gleichungen:

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

Die beiden in diesem Ausdruck auftretenden Differenzen von der Form $H - E$ haben einfache physikalische Bedeutungen. H und E sind Energiewerte desselben Körpers, bezogen auf zwei relativ zueinander bewegte Koordinatensysteme, wobei der Körper in dem einen System (System (x, y, z)) ruht. Es ist also klar, daß die Differenz $H - E$ sich von der kinetischen Energie K des Körpers in bezug auf das andere System (System (ξ, η, ζ)) nur durch eine additive Konstante C unterscheiden kann, welche von der Wahl der willkürlichen addi-

tiven Konstanten der Energien H und E abhängt. Wir können also setzen:

$$H_0 - E_0 = K_0 + C,$$
$$H_1 - E_1 = K_1 + C,$$

da C sich während der Lichtaussendung nicht ändert. Wir erhalten also:

$$K_0 - K_1 = L \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Die kinetische Energie des Körpers in bezug auf (ξ, η, ζ) nimmt infolge der Lichtaussendung ab, und zwar um einen von den Qualitäten des Körpers unabhängigen Betrag. Die Differenz $K_0 - K_1$ hängt ferner von der Geschwindigkeit ebenso ab wie die kinetische Energie des Elektrons (l. c. § 10).

Unter Vernachlässigung von Größen vierter und höherer Ordnung können wir setzen:

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2} \frac{v^2}{2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

Gibt ein Körper die Energie L in Form von Strahlung ab, so verkleinert sich seine Masse um L/V^2. Hierbei ist es offenbar unwesentlich, daß die dem Körper entzogene Energie gerade in Energie der Strahlung übergeht, so daß wir zu der allgemeineren Folgerung geführt werden:

Die Masse eines Körpers ist ein Maß für dessen Energieinhalt; ändert sich die Energie um L, so ändert sich die Masse in demselben Sinne um $L/9.10^{20}$, wenn die Energie in Erg und die Masse in Grammen gemessen wird.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß bei Körpern, deren Energieinhalt in hohem Maße veränderlich ist (z. B. bei den Radiumsalzen), eine Prüfung der Theorie gelingen wird.

Wenn die Theorie den Tatsachen entspricht, so überträgt die Strahlung Trägheit zwischen den emittierenden und absorbierenden Körpern.

Bern, September 1905.

(Eingegangen 27. September 1905.)

14. *Bemerkungen zu Hrn. S. Valentiners Abhandlung: „Über den maximalen Wirkungsgrad umkehrbarer Kreisprozesse“[1]; von Arthur Boltzmann.*

Hr. S. Valentiner behauptet in genannter Abhandlung ohne Bezugnahme auf den zweiten Hauptsatz einen Beweis des im ersten Absatze ausgesprochenen Satzes zu geben, daß ein beliebiger umkehrbarer Kreisprozeß einen Wirkungsgrad besitzt, der höchstens dem beim Carnotschen Kreisprozeß (bei gleicher höchster und tiefster Temperatur) sich ergebenden gleich ist und es eine gut definierbare Gruppe von umkehrbaren Kreisprozessen gibt, die dasselbe leisten wie der Carnotsche.

Hr. Valentiner bedient sich bei seinem Beweise der ϑ, s-Ebene und setzt voraus, daß in derselben jeder umkehrbare Kreisprozeß durch eine geschlossene Kurve dargestellt wird, damit basiert er aber seinen ganzen Beweis auf die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes, da, wenn dQ/ϑ kein vollständiges Differential wäre, ein Kreisprozeß im allgemeinen durch keine geschlossene Kurve dargestellt würde, wenn man $\int dQ/\vartheta$ als Abszisse und ϑ als Ordinate aufträgt.

Im folgenden transformiert Hr. Valentiner zuerst einen beliebigen umkehrbaren Kreisprozeß, den er durch eine nach dem freien Raum überall konvexe geschlossene Kurve in der ϑ, s-Ebene darstellt, durch Parallelverschiebung von Flächenstücken. Diese werden durch unendlich viele, unendlich nahe in der Ebene gezogene Isothermen (Parallelen zur Abszissenachse) gebildet. Die Transformation geschieht in der Weise, daß die Flächenstücke auf der gleichen Isotherme vom Schnittpunkte derselben mit einer willkürlich gewählten Adiabate

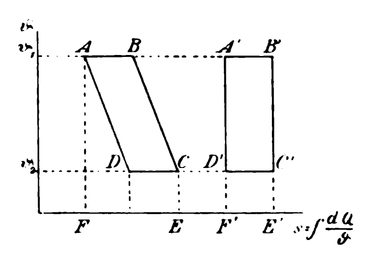
1) S. Valentiner, Ann. d. Phys. 15. p. 829. 1904.

nach bei allen Isothermen gleicher Richtung abgetragen werden. Die bei diesem neuen Prozeß zugeführte Wärmemenge Q_1' ist, wie Hr. Valentiner sagt, im allgemeinen kleiner als die beim ersten Prozeß zugeführte Wärme Q_1. Der Wirkungsgrad des neuen Prozesses ist also, da die in Arbeit verwandelte Wärme gleich bleibt, größer als der des ersten.

Vergleicht man nun den Wirkungsgrad des neuen Prozesses mit dem eines Carnotschen, der zwischen denselben extremen Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 arbeitet und bei dem die gleiche Wärmemenge Q_1' wie beim neuen Prozeß zugeführt wird, so rücken die beiden begrenzenden Adiabaten im allgemeinen wieder zusammen, der Wirkungsgrad wird beim Carnotschen Prozeß noch größer.

Hr. Valentiner hebt nun den Ausnahmefall hervor, wo sich das transformierte Abbild $A' B' C' D'$ des vorgelegten umkehrbaren Kreisprozesses mit dem des Carnotschen vollkommen deckt, und sagt: Liegt der Ausnahmefall vor, daß $A' B' C' D'$ ein aus Isothermen und Adiabaten gebildetes Rechteck darstellt, so ist der Wirkungsgrad des vorgelegten Prozesses gleich dem des Carnotschen.

Es stelle $ABCD$ (vgl. nebenstehende Figur) das Abbild eines Beispieles eines derartigen Ausnahmekreisprozesses dar. Die beim vorgelegten Kreisprozeß zugeführte Wärmemenge Q_1 wird durch die Fläche $ABCEF$ dargestellt; die beim transformierten Kreisprozeß, welcher in diesem Falle ein Carnotscher ist, zugeführte Wärmemenge Q_1' wird durch die Fläche $A' B' E' F'$ dargestellt. Der Wirkungsgrad des transformierten (Carnotschen) Kreisprozesses $(Q_1' - Q_2')/Q_1'$ ist also größer als der des vorgelegten $(Q_1 - Q_2)/Q_1$, da, wie man ohne weiteres sieht, $Q_1' - Q_2' = Q_1 - Q_2$ und $Q_1' < Q_1$ ist.



Es gibt also keinen vom Carnotschen um ein Endliches verschiedenen Kreisprozeß, welcher dasselbe leistet wie der Carnotsche. Denn wenn auch der transformierte Kreisprozeß bereits ein Carnotscher ist, so hat dafür der ursprüngliche

Kreisprozeß, wenn er nicht schon ein Carnotscher ist, immer einen kleineren Wirkungsgrad als der transformierte und daher auch als der Carnotsche Prozeß. Der Wirkungsgrad der von Hrn. Valentiner bezeichneten Ausnahmefälle hat durchaus nicht den Charakter eines Maximums, da man durch kontinuierliche Transformation eines beliebigen Kreisprozesses in einen zwischen denselben Temperaturgrenzen arbeitenden Carnotschen seinen Wirkungsgrad jedesmal kontinuierlich bis zu dem des Carnotschen steigern kann.

Wien, 9. September 1905.

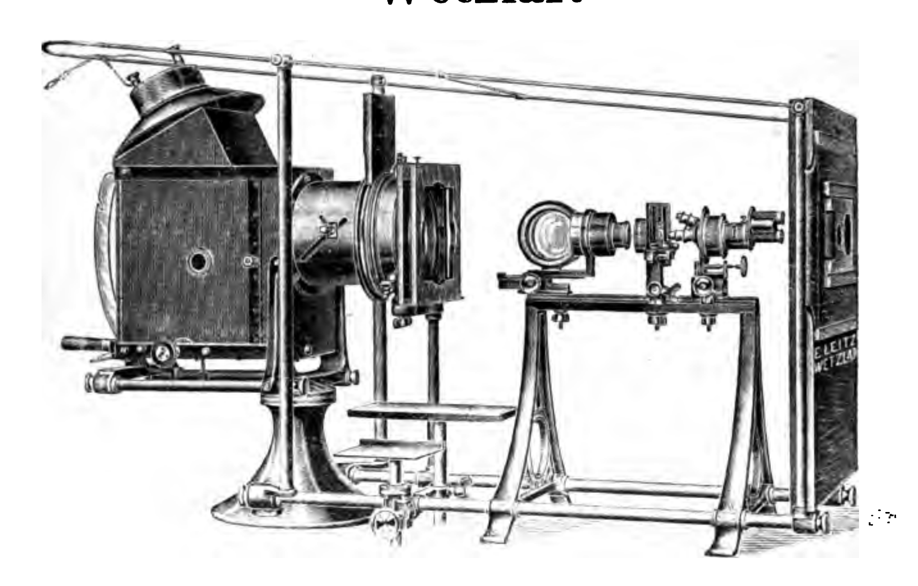
(Eingegangen 11. September 1905.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

E. LEITZ

Optische Werkstätte

Wetzlar.



Universal-Projektionsapparat

für diaskopische, mikroskopische und episkopische Projektion.

Mikroskope

Mikrotome und mikrophotographische Apparate.

Photographische Objektive.

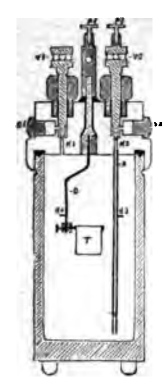
Zweiggeschäfte:

Berlin NW., Luisenstr. 45. **Frankfurt a. M.**, Kaiserstr. 64.

St. Petersburg, Woskressenski 11.

New York, 30 East 18th Str. **Chicago**, 32—38 Clark Str.

Vertretung für **München**: Dr. A. Schwalm, Sonnenstr. 10.



Julius Peters, Berlin NW. 21, Thurmstr. 4.

Polarisations-Apparate

in allen Konstruktionen für wissenschaftl. u. technischen Bedarf.

Neu! *Neu!*

Calorimeter

nach Berthelot-Mahler, verbessert nach Dr. Krecker (gesetzlich geschützt).



Alt, Eberhardt & Jäger, Ilmenau i. Th.

Eigene Hohlglashütte, Lampenbläsereien, Glasschleifereien, Holzwarenfabrik, Thermometerfabriken, Präzis.-mechanische Werkstatt, Klempnerei, Schriftflaschenmalerei und Emaillieranstalt.

Glasapparate, Instrumente und Utensilien für wissenschaftlichen Gebrauch und in jeder Ausführung. Hohlglas aller Art.

Einrichtung für Laboratorien an Lehranstalten, Universitäten usw.

Elektrolytische Apparate für Demonstrations- und praktischen Gebrauch.

Elektrische Röhren jeder Art, auch nach besonderen Angaben. Dewargefässe. Apparate für Pflanzenphysiologie.

Standgefässe aller Art für Präparate usw.

Chemische Thermometer, ... hochgradig ... Widerstands- ... ablesbar.

Thermometer aller Art und für jeden Zweck.

Glasgefässe aus Spiegelglas ... skopischen, spektralanalytischen ... Gebrauch, ... fähig gegen W... und Säuren.

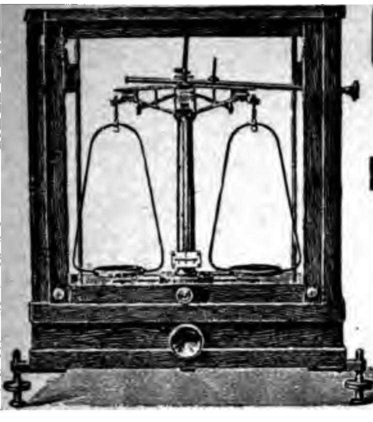
... Glasplatten usw.

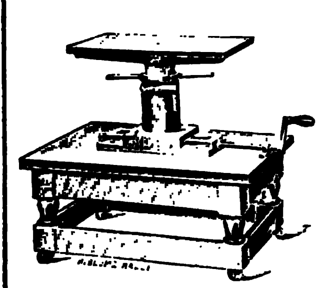
Günther & Tegetmeyer. Braunschweig.

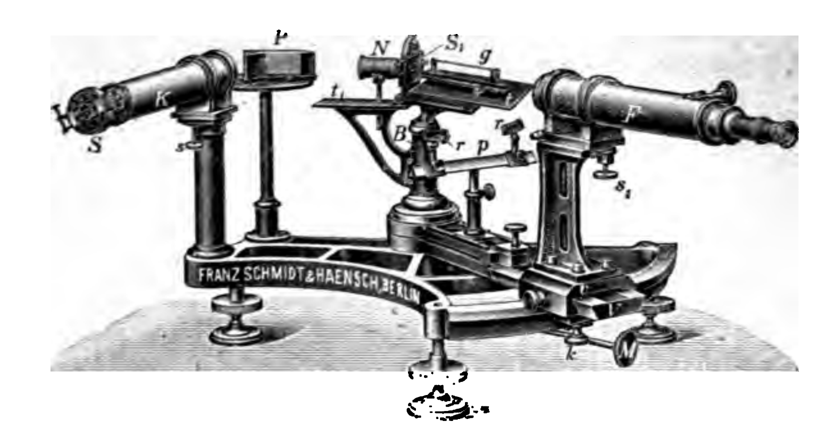
... Instrumente.

... Exner.

... Braunschweig ... Geitel.



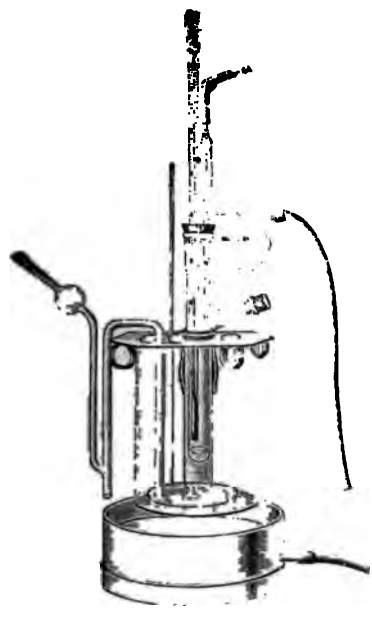




Interferenzspektroskop n. Lummer-Gehrcke, geliefert an die Physikal.-techn. Reichsanstalt.

A. Haak, Jena.

Glastechnische Werkstätten.



Thermometer

für

Wissenschaft und Technik,

von —200 bis +575°.

Barometer

mit constantem Nullpunkt,

eigene Construction.

Elektrische Apparate u. Röhren

nach

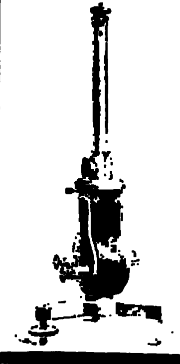
Geissler, Crookes, Hittorff, Röntgen, Puluj, Hertz, Lenard.

Volumetrische Messinstrumente.

Illustrirte Preislisten zu Diensten.

KEISER & SCHMIDT, Berlin N.,

Johannisstrafse 20.



Neues hochempfindliches Spiegelgalvanometer, Präzisionswiderstände, Mefsbrücken, Kompensationsapparate, Präzisions-Ampère- und Voltmeter für Laboratorien und Schalttafeln, Galvanometer, Funkeninduktoren, Kondensatoren, Rubenssche Thermosäulen, Pyrometer bis 1600° C., Elemente.


SIEMENS & HALSKE A.-G.
Wernerwerk, Berlin-Nonnendamm,
früher Berliner Werk, Berlin SW., Markgrafenstr. 94.

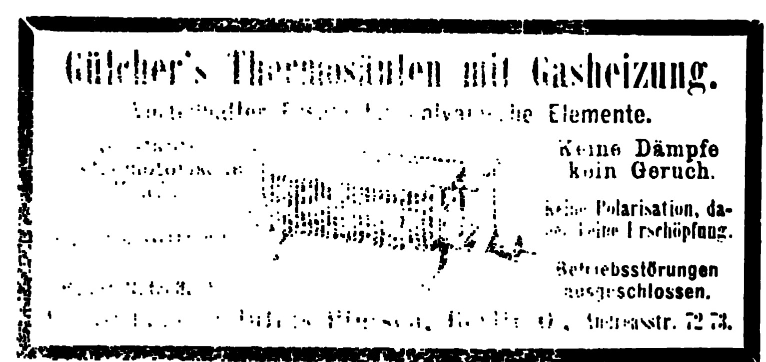
HANS BOAS BERLIN O.

Elektrotechnische Fabrik — Krautstraße 52

Quecksilber-strahl-Unter-brecher

Neueste vollkommenste Bauart

Neueste vollkommenste Bauart



Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1905. № 14.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 18. HEFT 1.

DER GANZEN REIHE 323. BANDES 1. HEFT.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT DREI TAFELN.



LEIPZIG, 1905.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
ROSSPLATZ 17.

(Ausgegeben am 19. Dezember 1905.)

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 18. HEFT 4.

DER GANZEN REIHE 323. BANDES 4. HEFT.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT DREI TAFELN.



LEIPZIG, 1905.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

ROSSPLATZ 17.

(Ausgegeben am 19. Dezember 1905.)

Inhalt.

Seite
1. W. Voigt. Theoretisches und Experimentelles zur Aufklärung des optischen Verhaltens aktiver Kristalle 645
2. Chr. Jensen und H. Sieveking. Die Verwendung von Mikrophonkontakten für telegraphische Relais und zum Nachweis schwacher Ströme 695
3. H. Rubens. Über das Emissionsspektrum des Auerbrenners. (Hierzu Taf. V u. VI.) 725
4. L. Holborn und F. Henning. Über die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes 739
5. M. Toepler. Beobachtungen im Grenzgebiete zwischen Spitzenstrom und Büschellichtbogen (Glimmstrom) 757
6. A. Wörmann. Die Neutralisationswärme starker Säuren und Basen und ihre Änderung mit Temperatur und Konzentration 775
7. O. Lehmann. Näherungsweise Bestimmung der Doppelbrechung fester und flüssiger Kristalle 796
8. O. Lehmann. Drehung der Polarisationsebene und der Absorptionsrichtung bei flüssigen Kristallen 808
9. Franz Weidert. Über den Einfluß der Belichtung auf die thermoelektrische Kraft des Selens 811
10. P. Lohberg. Selbstgegenfritter (Autoantikohärer) 850
11. G. Tammann. Über das Haften von heißem Holzkohlepulver an kalten Körpern 856
12. B. Walter. Über einen neuen Kitt für physikalische Apparate 860
13. B. Walter. Über das Nachleuchten der Luft bei Blitzschlägen. (Hierzu Taf. VII, Fig. 1 u. 2.) 863
14. Carl Forch. Berichtigung zu der Arbeit: Die Oberflächenspannung von anorganischen Salzlösungen 867
15. C. L. Weber. Zu der Mitteilung von v. Panayeff: Über die Beziehung des Schmelzpunktes zur Wärmeausdehnung der Metalle. 868

Manuskripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude**, zu senden. Seine Adresse ist **Berlin N.W. 7**, Neue Wilhelmstr. 16.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

1905. № 14.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 18.

1. *Theoretisches und Experimentelles zur Aufklärung des optischen Verhaltens aktiver Kristalle; von W. Voigt.*

Für aktive Körper liegen seit langer Zeit eine ganze Anzahl von Erklärungssystemen vor,[1]) und die Beobachtungen, die an sich zwischen ihnen zu entscheiden oder wenigstens eine gewisse Zahl von vornherein zurückzuweisen vermöchten, haben zumeist so geringe Genauigkeit, daß ihre Resultate zweifelhaft sind. Hier einen Schritt vorwärts zu tun, war die erste Veranlassung der nachstehenden Untersuchungen.

Die eine meiner Beobachtungsreihen, deren Resultate schon an anderer Stelle[2]) mitgeteilt sind, beschäftigt sich mit den Fragen, 1. ob (wie ein Teil der Theorien ergibt) in einachsigen aktiven Kristallen senkrecht zur Hauptachse wirklich lineärpolarisiertes Licht fortgepflanzt wird, 2. ob, wenn dies nicht stattfindet (und somit Theorien von einem bestimmten Typ ausscheiden), die mit dieser Erfahrung vereinbaren Theorien für einachsige Kristalle mit *einer* oder mit *zwei* Aktivitätskonstanten anzusetzen sind. Die betreffenden Beobachtungen sind an Quarz angestellt; sie ergaben, daß die senkrecht zur Achse fortgepflanzten Wellen äußerst gestreckte Ellipsen als Schwingungsform haben, und die Bestimmung von deren Achsenverhältnis zu etwa $^1/_{500}$ lieferte einerseits den Beweis für die Notwendigkeit der mehrkonstantigen Theorie bei einachsigen Kristallen, andererseits die ersten Zahlenwerte der beiden Parameter für einen solchen.

Diese Beobachtungen waren ohne Kenntnis der wichtigen Arbeit des Hrn. Pocklington[3]) angestellt, in welcher zum ersten Male über die Beobachtung der Rotationspolarisation bei aktiven zweiachsigen Kristallen berichtet ist. Die schöne

1) Vgl. z. B. P. Drude, Gött. Nachr. 1892. p. 400.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. 1904. p. 155.

3) H. C. Pocklington, Phil. Mag. (6) 2. p. 361. 1901.

Entdeckung des entgegengesetzten Drehungssinnes der Polarisationsebene längs der beiden optischen Achsen in Rohrzucker bewies bereits die Notwendigkeit der mehrkonstantigen Theorie für zweiachsige Kristalle, machte also dieselbe für einachsige mehr als wahrscheinlich.

Was die theoretischen Entwickelungen in der Pocklingtonschen Arbeit betrifft, so beziehen sie sich in erster Linie auf magnetisch-aktive Körper und benutzen in den kurzen Andeutungen über natürlich-aktive Körper ein System von Differentialgleichungen, das der Dispersion keine Rechnung trägt, für einfarbiges Licht aber sehr ähnlich dem von mir schon früher vorgeschlagenen[1]) ist, ihm aber darin direkt widerstrebt, daß es der Gleichung der Energie in der gebräuchlichen elektromagnetischen Form nicht entspricht. Man darf das wohl als einen Nachteil bezeichnen.

Auch das früher von Hrn. Drude[2]) aufgestellte Erklärungssystem leidet an diesem Übelstande. Neuerdings hat dann Hr. Drude[3]) eine Modifikation angebracht, die das System mit der Energiegleichung in Einklang bringt und praktisch dem von mir vorgeschlagenen gleichwertig macht. Die Unterschiede bewegen sich in Gliedern von der zweiten Größenordnung der Aktivitätskonstanten, die der Beobachtung völlig unzugänglich sind.

Bemerkenswert ist der Versuch Hrn. Drudes, das Gleichungssystem zu deuten mit Hilfe der Vorstellung fester spiralförmiger Bahnen, an welche die Elektronen in aktiven Körpern gebunden sind. Dennoch scheint mir, daß seine Hypothese noch eine kleine Änderung erfordert, um wirklich ihrem Zweck zu dienen. Hr. Drude nimmt auf jeder der einem Molekül eigenen Spiralen eine große Anzahl von Elektronen frei beweglich an; aber da diese Elektronen voneinander unabhängig und ihre Elongationen unendlich klein, also merklich geradlinig sind, so erhellt, daß der Schraubencharakter zwar in den Formeln, nicht aber in deren Begründung zum Ausdruck kommt. In der Tat könnte man, ohne die Ver-

1) W. Voigt, Wied. Ann. **69**. p. 301. 1899.
2) P. Drude, Optik, Leipzig 1900. p. 368 u. f.
3) P. Drude, Gött. Nachr. 1904, p. 1.

hältnisse innerhalb einer Wellenebene zu ändern, die merklich geradlinigen Stücke der Spiralbahnen, welche je ein Elektron tragen, voneinander schneiden und innerhalb der Wellenebene beliebig dislozieren, wodurch der Schraubencharakter sich völlig aufheben ließe. Deshalb glaube ich, daß die Drudesche Hypothese der Ergänzung durch die Annahme bedarf, daß auf den Schraubenbahnen sich die Elektronen nur in *Paaren* befinden, die je durch eine starre Linie in diametral entgegengesetzten Lagen gehalten werden. In dieser kleinen Modifikation könnte ich der Drudeschen Deutung vollständig beistimmen.

Ein Experimentum crucis, welches zwischen dem Pocklingtonschen (oder älteren Drudeschen) und meinem (oder dem neueren Drudeschen) Erklärungssystem zu entscheiden vermöchte, ist mir nicht bekannt. Allerdings gibt es eine merkwürdige Erscheinung[1]), welche das erstere System zuläßt, das letztere negiert. In hemimorphen Kristallen sind nach dem ersteren entgegengesetzte Richtungen optisch ungleichwertig, nach dem letzteren nicht. Ich habe durch eine Interferenzmethode nach dieser Ungleichwertigkeit gesucht, aber ein absolut negatives Resultat erhalten. Indessen entscheidet eine solche Beobachtung nicht definitiv, da der Effekt vorhanden, aber sehr klein sein kann.

Ein eigentümlicher Zwiespalt bestand bisher zwischen Theorie und Beobachtung bezüglich der konischen Refraktion bei aktiven zweiachsigen Kristallen. Hr. Weder[2]) hat die Frage bei Zugrundelegung einer einkonstantigen Theorie eingehend untersucht und kommt zu dem Resultat, daß aktive Kristalle weder als die innere noch die als äußere bezeichnete konische Refraktion zeigen dürfen; aber die Beobachtung mit natürlichem Licht gibt bei den von Lloyd[3]) benutzten Anordnungen bei aktiven Kristallen die bekannten Lichtringe, im Falle der *inneren* konischen Refraktion auch mit dem von Poggendorff[4]) entdeckten dunkeln Kreis darin, genau wie bei inaktiven Kristallen.

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1904. p. 195.

2) O. Weder, Die Lichtbewegung in zweiachsigen aktiven Kristallen, (Diss.) Stuttgart 1896.

3) H. Lloyd, Trans. of the Ir. Ac. 17. p. 145. 1837.

4) J. C. Poggendorff, Pogg. Ann. 48. p. 461. 1839.

Hr. Pocklington spricht in der Einleitung seiner Arbeit auch von der konischen Refraktion, beschränkt sich aber an der betreffenden Stelle auf die Fokaleigenschaften der Wellenfläche in der Nähe der optischen Achsen, ohne eingehende Folgerungen für die genannten Erscheinungen unter Berücksichtigung der experimentellen Anordnungen zu ziehen.

Ich hielt es für um so angemessener, diese Frage genauer zu untersuchen, als ich bei der Beobachtung der inneren konischen Refraktion am Rohrzucker mit polarisiertem Licht eine kleine, aber ganz deutliche Abweichung der Erscheinung von dem Habitus derselben bei nichtaktiven Kristallen bemerkt hatte. Derartige unerwartete Abweichungen liefern wertvolle Prüfsteine für die Theorie, und es scheint mir, daß dieselbe sich der neuen Erfahrung gegenüber vollständig bewährt hat.

Diese Untersuchung machte eine genauere Analyse des Vorganges nötig, durch den die innere konische Refraktion faktisch zustande kommt. Diese Analyse ergab, daß die gebräuchliche Vorstellung einer Berichtigung bedarf, und diese Berichtigung findet ihre Bestätigung durch die (sehr einfache) Erklärung des Poggendorffschen Kreises, der meines Wissens noch nicht gedeutet worden war.

Die im folgenden gegebenen theoretischen Entwickelungen haben wesentlich den Zweck, die Erklärung bestimmter Erscheinungen oder die Formeln für bestimmte Messungen zu liefern. Wenn ich also auch im Eingang die größte Allgemeinheit walten lasse, indem ich alle Kristallgruppen in Betracht ziehe, so enthalte ich mich weiterhin doch so allgemeiner Entwickelungen bezüglich der Normalen- und Strahlenfläche, wie sie Hr. Weder gibt. Für die Untersuchung der interessantesten Verhältnisse in der Nähe der optischen und Strahlenachsen sind geeignete Annäherungsformeln vorteilhafter, als allgemeine und strenge; die irrigen Resultate, die Hr. Weder hier erhalten hat, rühren vielleicht zum Teil von seiner Methode her.

Der eigentlichen Theorie schicke ich zwei Paragraphen von allgemeinerer Bedeutung voraus. Es ist schon in den ältesten Erklärungssystemen der Rotationspolarisation zum Ausdrucke gebracht, daß die Ableitung dieser Erscheinungen die Möglichkeit linearer Beziehungen zwischen den Komponenten eines *polaren* und eines *axialen* Vektors voraus-

setzt. So führt die Theorie von Cauchy[1]) in die Ausdrücke für die Beschleunigungen der *Verrückungen* Glieder ein, die mit *Rotationswinkeln* proportional sind. Aber solche Beziehungen sind nach dem Grundgesetz der Kristallphysik nur möglich in Medien von bestimmten Symmetrieverhältnissen. Der erste Paragraph hat die Aufgabe, für alle 32 Kristallgruppen die in ihnen möglichen linearen Beziehungen zwischen den Komponenten eines polaren und eines axialen Vektors aufzustellen. Damit wird denn auch die fundamentale Frage erledigt, welche Kristallgruppen überhaupt und in welcher Weise eine jede von ihnen optische „Aktivität" zeigen können. Eine ähnliche Überlegung, aber nicht ganz so weitgehend, ist von Gibbs[2]) angestellt.

Der zweite Paragraph beschäftigt sich mit der Bedeutung und den Eigenschaften, welche die Koeffizienten dieser linearen Beziehungen besitzen. Hierbei kommen insbesondere Sätze über die Komponenten eines Tensortripels in Betracht, die sich bei der eigentlichen Theorie nützlich erweisen.

Bei dieser selbst habe ich mich mit Vorteil der schon bei der Untersuchung absorbierender Kristalle[3]) angewendeten Methode bedient, das Koordinatensystem in der Wellenebene festzulegen und die Kristalle dagegen zu drehen. Es ist das eine kleine Abweichung von dem gewöhnlichen Verfahren, die, wie früher, so auch jetzt sich nützlich erwiesen hat. Für die Untersuchung der Verhältnisse der Lichtstrahlen habe ich besonders deren Definition durch den Energiefluß benutzt. Aus diesem Grunde empfahl es sich, die Betrachtung auf merklich durchsichtige Körper zu beschränken und alle Formeln in *reeller* Form zu schreiben; denn bekanntlich gehen bei nicht lineären Formeln die Vorteile der Einführung komplexer Lösungen zum größten Teil verloren.

1. Allgemeinste Formen der lineären Beziehungen zwischen polaren und axialen Vektorkomponenten für die 32 Kristallgruppen.

Die lineären Beziehungen zwischen den Komponenten X, Y, Z eines *polaren* und denjenigen A, B, C eines *axialen* Vektors, deren

1) Cauchy, Compt. rend. 15. p. 916. 1842.
2) W. Gibbs, Americ. Journ. of Science (3) 23. p. 460. 1882.
3) W. Voigt, Ann. d. Phys. 9. p. 367. 1902.

spezielle Gestalten für die verschiedenen Kristallgruppen wir zunächst ableiten wollen, schreiben wir in der Form

$$(1)\quad \begin{cases} X = a_{11} A + a_{12} B + a_{13} C, \\ Y = a_{21} A + a_{22} B + a_{23} C, \\ Z = a_{31} A + a_{32} B + a_{33} C. \end{cases}$$

Für die Anwendung derselben ist zu beachten, daß in bezug auf alle Drehungen des Koordinatensystems axiale Vektorkomponenten sich genau ebenso verhalten, wie polare, daß aber bei einer Inversion einer Koordinatenachse von polaren Vektoren die *parallelen* Komponenten ihre Vorzeichen umkehren, die *normalen* dieselben beibehalten, während sich axiale Vektorkomponenten gerade umgekehrt verhalten.

Unter Benutzung dieser Regeln erhält man leicht die folgenden Hilfssätze:

Ein Symmetriezentrum (C) verlangt das Verschwinden aller a_{hk}.

Eine zweizählige Symmetrieachse parallel Z (Symbol A_z^2) bedingt das Konstantensystem

$$a_{11},\ a_{12},\ 0;\quad a_{21},\ a_{22},\ 0;\quad 0,\ 0,\ a_{33};$$

eine ebenso gelegene drei-, vier- oder sechszählige Achse (Symbol A_z^3, A_z^4, A_z^6) dagegen das System

$$a_{11},\ a_{12},\ 0;\quad -a_{12},\ a_{11},\ 0;\quad 0,\ 0,\ a_{33}.$$

Eine Symmetrieebene normal zur Z-Achse (Symbol E_z) hat zur Folge

$$0,\ 0,\ a_{13};\quad 0,\ 0,\ a_{23};\quad a_{31},\ a_{32},\ 0;$$

eine (zweizählige) Spiegelachse parallel der Z-Achse (Symbol S_z) dagegen

$$a_{11},\ a_{12},\ 0;\quad a_{12},\ -a_{11},\ 0;\quad 0,\ 0,\ 0.$$

Die Kombination dieser Gesetze liefert nun ohne weiteres die Konstantenschemata für die 32 kristallographischen Gruppen, die durch die in Klammer beigesetzten Symbole für die Symmetrieelemente charakterisiert sind.[1])

1) Vgl. auch W. Voigt, Kompendium 2. p. 802. Leipzig 1896. Dort ist indessen die Spiegelachse in Gruppe 19 und 20 unrichtig in Rechnung gesetzt, auch in Gruppe 8 a_{21} mit $-a_{12}$ vertauscht.

I. Triklines System.

1. Holoedrie (C) alle $a_{hk} = 0$;
2. Hemiedrie (keine Symmetrie) alle a_{hk} möglich.

II. Monoklines System.

3. Holoedrie (C, A_z^2 oder C, E_z) alle $a_{hk} = 0$;
4. Hemiedrie (E_z) $0, 0, a_{13}$; $0, 0, a_{23}$; $a_{31}, a_{32}, 0$;
5. Hemimorphie (A_z^2) $a_{11}, a_{12}, 0$; $a_{21}, a_{22}, 0$; $0, 0, a_{33}$.

III. Rhombisches System.

6. Holoedrie (C, A_z^2, A_x^2 oder C, A_z^2, E_x) alle $a_{hk} = 0$;
7. Hemiedrie (A_z^2, A_x^2) $a_{11}, 0, 0$; $0, a_{22}, 0$; $0, 0, a_{33}$;
8. Hemimorphie (A_z^2, E_x) $0, a_{12}, 0$; $a_{21}, 0, 0$; $0, 0, 0$.

IV. Rhomboedrisches System.

9. Holoedrie (C, A_z^3, A_x^2 oder C, A_z^3, E_x) alle $a_{hk} = 0$;
10. Enantiomorphe Hemiedrie (A_z^3, A_x^2)
$a_{11}, 0, 0$; $0, a_{11}, 0$; $0, 0, a_{33}$;
11. Hemimorphe Hemiedrie (A_z^3, E_x) $0, a_{12}, 0$; $-a_{12}, 0, 0$; $0, 0, 0$;
12. Paramorphe Hemiedrie (C, A_z^3) alle $a_{hk} = 0$;
13. Tetartoedrie (A_z^3) $a_{11}, a_{12}, 0$; $-a_{12}, a_{11}, 0$; $0, 0, a_{33}$.

V. Tetragonales System.

14. Holoedrie (C, A_z^4, A_x^2 oder C, A_z^4, E_x) alle $a_{hk} = 0$;
15. Enantiomorphe Hemiedrie (A_z^4, A_x) $a_{11}, 0, 0$; $0, a_{11}, 0$; $0, 0, a_{33}$;
16. Hemimorphe Hemiedrie (A_z^4, E_x) $0, a_{12}, 0$; $-a_{12}, 0, 0$; $0, 0, 0$;
17. Paramorphe Hemiedrie (C, A_z^4) alle $a_{hk} = 0$;
18. Tetartoedrie (A_z^4) $a_{11}, a_{12}, 0$; $-a_{12}, a_{11}, 0$; $0, 0, a_{33}$;

---

19. Hemiedrie mit Spiegelachse (S_z, A_x^2)
$a_{11}, 0, 0$; $0, -a_{11}, 0$; $0, 0, 0$;
20. Tetartoedrie mit Spiegelachse (S_z)
$a_{11}, a_{12}, 0$; $a_{12}, -a_{11}, 0$; $0, 0, 0$.

VI. Hexagonales System.

21. Holoedrie (C, A_z^6, A_x^2 oder C, A_z^6 E_x) alle $a_{hk} = 0$;
22. Enantiomorphe Hemiedrie (A_z^6, A_x^2) $a_{11}, 0, 0$; $0, a_{11}, 0$; $0, 0, a_{33}$;
23. Hemimorphe Hemiedrie (A_z^6, E_x) $0, a_{12}, 0$; $-a_{12}, 0, 0$; $0, 0, 0$;
24. Paramorphe Hemiedrie (C, A_z^6) alle $a_{hk} = 0$;
25. Tetartoedrie (A_z^6) $a_{11}, a_{12}, 0$; $-a_{12}, a_{11}, 0$; $0, 0, a_{33}$;

---

im Kristall benutzt. Bei durchsichtigen Kristallen, wo für jede Farbe nur *ein* Tensortripel in Betracht kommt, fallen sie mit den optischen Achsen zusammen; in absorbierenden Kristallen spielen *zwei* Tensortripel und demgemäß zwei Paare derartiger Richtungen, die ich als Polarisations- und Absorptionsachsen bezeichnet habe, eine Rolle, und Analoges gilt, wie sich zeigen wird, bei aktiven Kristallen.

Die Tensorkomponenten A, B, C, A', B', C' nehmen besonders einfache Formen an, wenn man sie nach einem Achsenkreuz X, Y, Z nimmt, das eine bestimmte Orientierung gegen die Normalen N_1, N_2 besitzt.

Die Z-Achse sei beliebig, doch zeichnen wir sie (Fig. 1, die wie alle analogen weiteren auf einer Kugel vom Radius Eins entworfen gedacht ist) der Bequemlichkeit halber in den Oktanten, um den herum die als positiv gewählten Seiten von T_1, T_2, T_3 sich wie X, Y, Z folgen. Ihre Winkel mit N_1 und N_2 seien n_1 und n_2. Dann halbiere die XZ-Ebene den Winkel zwischen den Ebenen ZN_1 und ZN_2, welcher T_3 einschließt, die YZ-Ebene also den Nebenwinkel.

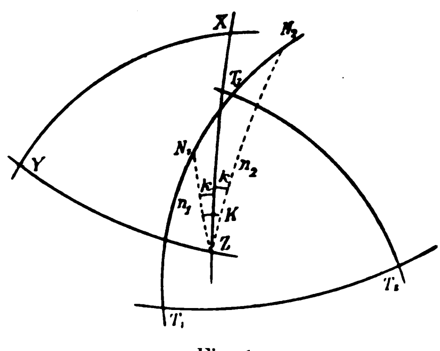


Fig. 1.

Unter diesen Voraussetzungen gilt, wenn

$$\angle N_1 Z N_2 = K = 2k$$

gesetzt wird,

$$(8)\quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}(T_1 + T_3) + \frac{1}{2}(T_1 - T_3)\cos(n_1 + n_2), \\ B = \frac{1}{2}(T_1 + T_3) + \frac{1}{2}(T_1 - T_3)\cos(n_1 - n_2), \\ C = \frac{1}{2}(T_1 + T_3) - \frac{1}{2}(T_1 - T_3)(\cos n_1 \cos n_2 - \sin n_1 \sin n_2 \cos K) \\ \quad = \frac{1}{2}(T_1 + T_3) - \frac{1}{2}(T_1 - T_3)\big(\cos(n_1 + n_2)\cos^2 k \\ \qquad\qquad + \cos(n_1 - n_2)\sin^2 k\big), \\ A' = -\frac{1}{2}(T_1 - T_3)\sin k \sin(n_1 - n_2), \\ B' = -\frac{1}{2}(T_1 - T_3)\cos k \sin(n_1 + n_2), \\ C' = 0. \end{cases}$$

Für ein Achsensystem X_0, Y_0, Z, das durch eine positive Drehung um den Winkel φ um die Z-Achse aus X, Y, Z hervorgeht, gilt nach allgemeinen Prinzipien

$$
(9) \quad \begin{cases} A_0 = A c^2 + B s^2 + 2 C' c s, \\ B_0 = A s^2 + B c^2 - 2 C' c s, \quad C_0 = C, \\ A_0' = A' c - B' s, \quad B_0' = A' s + B' c, \\ C_0' = -(A - B) c s + C' (c^2 - s^2), \end{cases}
$$

wobei $\cos\varphi$ in c, $\sin\varphi$ in s abgekürzt ist. Aus den ersten beiden Formeln folgt

$$
(10) \qquad A_0 + B_0 = A + B,
$$

die Summe der ersten beiden Komponenten des Tensortripels wird also durch Drehung des Achsensystems um die Richtung der dritten Komponente nicht beeinflußt.

3. Die Differentialgleichungen für aktive Kristalle.

Die allgemeinsten Ansätze für die Theorie der aktiven Kristalle lauten nach meinem Vorschlag, wenn

$K(X, Y, Z)$ die elektrischen Kräfte,

$\mathfrak{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ „ „ Polarisationen,

$R(A, B, C)$ die magnetischen Kräfte,

$\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ „ „ Polarisationen,

$\mathfrak{k}_h(\mathfrak{x}_h, \mathfrak{y}_h, \mathfrak{z}_h)$ und $\mathfrak{r}_h(\mathfrak{a}_h, \mathfrak{b}_h, \mathfrak{c}_h)$ die Teilpolarisationen

sind, die auf Elektronenbewegungen beruhen, und v die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, α, β, γ, δ, ε Konstanten bezeichnen, und $\partial\varphi/\partial t$ in φ' akgekürzt wird

$$
(11) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}' = v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right), \dots \\ \mathfrak{X}' = v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right), \dots \end{cases}
$$

$$
(12) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = X + \Sigma\, \mathfrak{x}_h, \dots \\ \mathfrak{A} = A + \Sigma\, \mathfrak{a}_h, \dots \end{cases}
$$

$$
(13) \quad \begin{cases} \alpha^h_{11}\, \mathfrak{x}_h + \beta^h_{11}\, \mathfrak{x}_h' + \gamma^h_{11}\, \mathfrak{x}_h'' + \alpha^h_{12}\, \mathfrak{y}_h + \beta^h_{12}\, \mathfrak{y}_h' + \gamma^h_{12}\, \mathfrak{y}_h'' \\ + \alpha^h_{13}\, \mathfrak{z}_h + \beta^h_{13}\, \mathfrak{z}_h' + \gamma^h_{13}\, \mathfrak{z}_h'' + \delta^h_{11}\, A' + \delta^h_{12}\, B' + \delta^h_{13}\, C' = e_h X, \dots \\ \mathfrak{a}_h = \frac{1}{e_h}(\delta^h_{11}\, \mathfrak{x}_h' + \delta^h_{21}\, \mathfrak{y}_h' + \delta^h_{41}\, \mathfrak{z}_h'), \dots \end{cases}
$$

Zwischen den Konstanten α, β, γ finden die Beziehungen statt

$$(14) \qquad \alpha^h_{mn} = \alpha^h_{nm}, \quad \beta^h_{mn} = \beta^h_{nm}, \quad \gamma^h_{mn} = \gamma^h_{nm},$$

aber für die δ gelten nach dem Schema auf p. 651 und 652 die analogen Formeln im allgemeinen *nicht.*

Um aus dem System (11) bis (13) die Gleichung der Energie zu bilden, hat man die sechs Formeln (11) mit A, B, C X, Y, Z zusammenzufassen, die Beziehungen (12) zu berücksichtigen und die Produkte $X \mathfrak{x}'_h, \ldots, A \mathfrak{a}'_h, \ldots$ nach (13) zu berechnen. Die linke Seite der aus (11) gebildeten Gleichung besitzt dann die Form eines Differentialquotienten nach der Zeit, dessen Argument als die Energie der Volumeneinheit aufzufassen ist, plus einer quadratischen Form, welche die auf Zeit- und Volumeneinheit bezogene Absorption darstellt; die rechte Seite ist dieselbe, die in der Energiegleichung für den leeren Raum auftritt; sie liefert also den Poyntingschen Energiestrom in der gewöhnlichen Form, was wir für spätere Anwendungen hervorheben.

Das von Hrn. Drude vorgeschlagene System Gleichungen unterscheidet sich von dem obigen nur dadurch, daß in den Formeln (13) die magnetischen Kräfte A, B, C durch die Polarisationen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ersetzt sind. Da beide Größen sich nur um Glieder erster Ordnung in den nach der Erfahrung äußerst kleinen Aktivitätskonstanten δ_{hk} unterscheiden, so sind ersichtlich die beiden Ansätze nur um Glieder *zweiter* Ordnung verschieden, also, da dergleichen der Beobachtung nicht zugänglich sind, einander praktisch gleichwertig. Daß der Drudesche Ansatz gleichfalls der Energiegleichung genügt, liegt daran, daß die Funktion

$$(\delta^h_{11} \mathfrak{a}'_h + \delta^h_{12} \mathfrak{b}'_h + \delta^h_{13} \mathfrak{c}'_h) \mathfrak{x}'_h + \ldots$$

wegen der in (13) angegebenen Werte der $\mathfrak{a}_h$, $\mathfrak{b}_h$, $\mathfrak{c}_h$ für sich ein Differentialquotient nach der Zeit ist.

Da nach (11) die Polarisationen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N}$ transversal schwingen, wird man passend die Diskussion von Geschwindigkeit und Polarisationszustand an sie anknüpfen; ich bevorzuge $\mathfrak{N}$, weil diese Größe die *optische* Polarisation ganz direkt angibt. Für die Diskussion des Energieflusses kommen da-

gegen die Kräfte K und R in Betracht, deren Werte wir demgemäß bereits hier gleichfalls hervorheben.

Wir wollen uns auf das Gebiet verschwindender Absorption beschränken und daher die Konstanten β vernachlässigen. Man kann dann bei Vernachlässigung der in den d_{hk} quadratischen Glieder für *reelle* periodische Lösungen aus dem Vorstehenden die folgenden Beziehungen ableiten, die bei merklicher Absorption nur für komplexe Lösungen gelten:

$$(15) \begin{cases} X = \mathfrak{X}\,\Theta_{11} + \mathfrak{Y}\,\Theta_{12} + \mathfrak{Z}\,\Theta_{13} + \vartheta(\mathfrak{A}'\,d_{11} + \mathfrak{B}'\,d_{12} + \mathfrak{C}'\,d_{13}), \ldots \\ A = \mathfrak{A} - \vartheta(\mathfrak{X}'\,d_{11} + \mathfrak{Y}'\,d_{21} + \mathfrak{Z}'\,d_{31}), \ldots \end{cases}$$

worin die $\Theta_{hk} = \Theta_{kh}$ wie die d_{hk} Funktionen der Periode τ sind, die hier nicht entwickelt zu werden brauchen, und $\vartheta = \tau/2\pi$ der Bequemlichkeit halber aus den d_{hk} ausgesondert ist. Diese Ausdrücke stimmen damit überein, daß nach dem zu den Formeln (11) bis (13) Gesagten

$$A\mathfrak{A}' + B\mathfrak{B}' + C\mathfrak{C}' + X\mathfrak{X}' + Y\mathfrak{Y}' + Z\mathfrak{Z}'$$

ein Differentialquotient nach der Zeit sein muß. Für die Energie der Volumeneinheit bei periodischen Schwingungen ergibt sich der Wert

$$\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{X}^2\,\Theta_{11} + \mathfrak{Y}^2\,\Theta_{22} + \mathfrak{Z}^2\,\Theta_{33} + 2\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}\,\Theta_{23} + 2\,\mathfrak{Z}\,\mathfrak{X}\,\Theta_{31} + 2\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\Theta_{12} \\ + \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2).$$

Da $\Theta_{hk} = \Theta_{kh}$ ist, so stellen die sechs Θ Tensorkomponenten dar; für die d_{hk} gelten analoge Beziehungen nicht, sie führen also auf ein Tensortripel und einen Vektor.

Beiden Tensortripeln ordnen wir Achsenpaare von der in § 2 besprochenen Art der N_1, N_2 bei; wir bezeichnen sie bez. mit A_1, A_2 und D_1, D_2 und nennen sie (wie schon bei früherer Gelegenheit) *optische* oder *Polarisations-* und *Rotationsachsen.* Ihre gegenseitige Lage ist allgemein nicht bestimmt, für Kristallgruppen mit Symmetrien folgt sie aus dem Schema auf p. 651 und 652.

4. Fortpflanzung ebener homogener Wellen.

Wir betrachten das Fortschreiten einer ebenen Welle und legen die Z-Achse in die Wellennormale (Fig. 2). Die Winkel ZA_1, ZA_2 nennen wir U_1, U_2, die Winkel ZD_1, ZD_2 dagegen

W_1, W_2. Die XZ-Ebene halbiere den Winkel $A_1 Z A_2 = I$, dann ist $\Theta_{12} = 0$; die Ausdrücke für andere spezielle Θ_{hk}

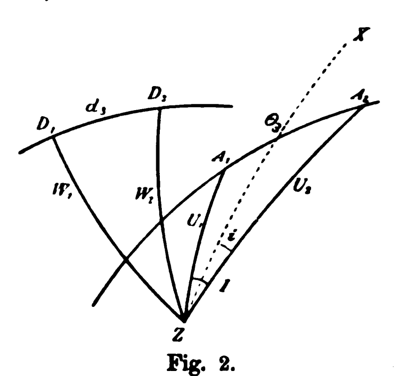


Fig. 2.

und d_{hk} werden unten angegeben werden. Ferner folgt aus (11) $\mathfrak{C} = 0$, $\mathfrak{Z} = 0$.

Unsere Formeln (15) nehmen somit die Gestalt an

$$(16)\quad \begin{cases} X = \mathfrak{X}\,\Theta_{11} + \vartheta(\mathfrak{A}' d_{11} + \mathfrak{B}' d_{12}), \\ Y = \mathfrak{Y}\,\Theta_{22} + \vartheta(\mathfrak{A}' d_{21} + \mathfrak{B}' d_{22}), \\ Z = \mathfrak{X}\,\Theta_{31} + \mathfrak{Y}\,\Theta_{32} + \vartheta(\mathfrak{A}' d_{31} + \mathfrak{B}' d_{32}); \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} A = \mathfrak{A} - \vartheta(\mathfrak{X}' d_{11} + \mathfrak{Y}' d_{21}), \\ B = \mathfrak{B} - \vartheta(\mathfrak{X}' d_{12} + \mathfrak{Y}' d_{22}), \\ C = \quad - \vartheta(\mathfrak{X}' d_{13} + \mathfrak{Y}' d_{23}). \end{cases}$$

Hierzu kommt nach (11), falls n den Brechungsindex bezeichnet,

$$(18)\quad \mathfrak{X} = nB, \quad \mathfrak{Y} = -nA; \quad \mathfrak{A} = -nY, \quad \mathfrak{B} = nX.$$

Die Elimination von A, B, X, Y aus diesen Formeln liefert

$$(19)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = n(\mathfrak{B} - \vartheta(\mathfrak{X}' d_{12} + \mathfrak{Y}' d_{22})), \\ \mathfrak{Y} = -n(\mathfrak{A} - \vartheta(\mathfrak{X}' d_{11} + \mathfrak{Y}' d_{21})), \\ \mathfrak{A} = -n(\mathfrak{Y}\,\Theta_{22} + \vartheta(\mathfrak{A}' d_{21} + \mathfrak{B}' d_{22})), \\ \mathfrak{B} = n(\mathfrak{X}\,\Theta_{11} + \vartheta(\mathfrak{A}' d_{11} + \mathfrak{B}' d_{12})), \end{cases}$$

und bei erneuter Elimination von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ unter Weglassung der Glieder zweiten Grades in bezug auf die d_{hk}

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}(1 - n^2\Theta_{22}) + \vartheta\,\mathfrak{A}' d_{21}\, n(1 - n^2\Theta_{22}) \\ \qquad = -\vartheta\,\mathfrak{B}'\, n(n^2\Theta_{22}\, d_{11} + d_{22}), \\ \mathfrak{B}(1 - n^2\Theta_{11}) + \vartheta\,\mathfrak{B}' d_{12}\, n(n^2\Theta_{11} - 1) \\ \qquad = \vartheta\,\mathfrak{A}'\, n(d_{11} + n^2\Theta_{11}\, d_{22}). \end{cases}$$

In diesen Formeln tritt wiederholt $n^2 \Theta_{11}$ und $n^2 \Theta_{22}$ in eins der d_{hk} multipliziert auf. Nun sind Θ_{11} und Θ_{22} die Werte von $1/n^2$ für die betrachtete Welle in dem Kristall bei verschwindender Aktivität, d. h. bei verschwindenden d_{hk}; man bleibt also jedenfalls innerhalb der bereits benutzten Annäherung, wenn man in den mit einem d_{hk} proportionalen Gliedern für die eine Welle im aktiven Kristall $n^2 \Theta_{11}$, für die andere $n^2 \Theta_{22}$ gleich Eins setzt.

Indessen ist es bisher wegen der Ungenauigkeit der Beobachtungen, die auf den d_{hk} beruhen, und der im allgemeinen geringen Größe des Verhältnisses $(\Theta_{11} - \Theta_{22})/(\Theta_{11} + \Theta_{22})$ praktisch unbedenklich, noch einen Schritt weiter zu gehen und in den Faktoren eines d_{hk} den Unterschied von Θ_{11} und Θ_{22} zu ignorieren und somit *zugleich* $n^2 \Theta_{11}$ und $n^2 \Theta_{22}$ mit Eins zu vertauschen. Hier erhält man dann

$$(21)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}(1 - n^2 \Theta_{22}) = -\,\vartheta\, \mathfrak{B}' n (d_{11} + d_{22}), \\ \mathfrak{B}(1 - n^2 \Theta_{11}) = +\,\vartheta\, \mathfrak{A}' n (d_{11} + d_{22}). \end{cases}$$

Die letzte Vernachlässigung ist übrigens ersichtlich nicht nötig für Richtungen, in denen $\Theta_{11} = \Theta_{22}$ ist, d. h. für die Polarisationsachsen; auch verschwinden d_{12} und d_{21} identisch im Falle einachsiger enantiomorpher Kristalle.

Die Formeln (21) sagen bekanntlich bezüglich des Polarisationszustandes aus, daß die beiden Wellen, die sich längs der Z-Achse fortpflanzen, elliptisch in entgegengesetzter Richtung schwingen; die Ellipsen haben die X- und Y- zu Hauptachsen und sind in Annäherung einander ähnlich. In den Polarisationsachsen, wo $\Theta_{11} = \Theta_{22}$, werden sie zu Kreisen. Das Gesetz des Brechungsindex lautet

$$(22)\qquad (1 - n^2 \Theta_{11})(1 - n^2 \Theta_{22}) = +\, n^2 (d_{11} + d_{22})^2.$$

Wird das Tensortripel der Θ_{hk} mit $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$, das der d_{hk} mit d_1, d_2, d_3 bezeichnet, so ist nach (8), (9) und (10)

$$(23)\qquad \begin{cases} \Theta_{11} = \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_3) + \frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_3)\cos(U_1 + U_2), \\ \Theta_{22} = \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_3) + \frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_3)\cos(U_1 - U_2), \\ d_{11} + d_{22} = (d_1 + d_3) + (d_1 - d_3)\cos W_1 \cos W_2. \end{cases}$$

Es ergibt sich sonach, daß in der eingeführten Annäherung der in den d_{hk} enthaltene *Vektor* auf das Verhalten der Ge-

schwindigkeit und Polarisation ebener Wellen ganz ohne Einfluß ist. Die hemimorphen Gruppen 11, 16, 23 des Schemas auf p. 651 u. 652 fallen z. B. sonach bezüglich der Erscheinungen, die man unter dem Namen der Aktivität gemeinhin zusammenfaßt, völlig aus, da bei ihnen die d_{hk} nur einen Vektor ergeben.

Im übrigen erkennt man, daß auch in der eingeführten ersten Annäherung die Gesetze der Polarisation und der Geschwindigkeit keineswegs eine Symmetrie nach dem Tensortripel Θ_1, Θ_2, Θ_3 (das bei nichtaktiven Kristallen die Symmetrieachsen darstellt) ergeben. Der Parameter $d_{11}+d_{22}$ verläuft symmetrisch in bezug auf das Tripel d_1, d_2, d_3, und dieses kann alle möglichen Lagen gegen das erstere einnehmen. Die Diskussion der den einzelnen Kristallgruppen entsprechenden Verhältnisse ist an der Hand des Schemas auf p. 651 u. 652 leicht auszuführen, soll aber unterbleiben. Dagegen mögen zwei spezielle Fälle, über die ich Beobachtungen angestellt habe, herausgegriffen werden.

5. Anwendung auf einachsige enantiomorphe Kristalle; Probleme für die Beobachtung.

Bei einachsigen Kristallen gilt, wenn die Θ_3-Achse die ausgezeichnete ist, jedenfalls $\Theta_1=\Theta_2$ und $d_1=d_2$, während die Richtungen von Θ_3 und d_3 zusammenfallen; für die enantiomorphen Gruppen verschwindet außerdem der rotatorische Vektor; es sind somit für das benutzte Koordinatensystem d_{23}, d_{32} und d_{12}, d_{21} gleich Null, $d_{13}=d_{31}=-\frac{1}{2}(d_1-d_3)\sin 2U$, wobei U den gemeinsamen Wert von U_1, U_2, W_1, W_2 darstellt. Dagegen ist

$$(24)\qquad \begin{cases} \Theta_{11}=\Theta_1\cos^2 U+\Theta_3\sin^2 U, \quad \Theta_{22}=\Theta_1, \\ d_{11}+d_{22}=d_1(1+\cos^2 U)+d_3\sin^2 U. \end{cases}$$

Für die Richtung der Hauptachse ist

$$\Theta_{11}=\Theta_{22}=\Theta_1, \quad d_{11}+d_{22}=2\,d_1,$$

also nach (22)

$$(1-n^2\Theta_1)=\pm 2\,n\,d_1,$$

wobei rechts für n auch ein mittlerer Brechungsindex gesetzt werden darf. Hieraus folgt statt (21) für das *obere* Zeichen

$$\mathfrak{A}=-\vartheta\mathfrak{B}' \text{ bez. } \mathfrak{B}=\vartheta\mathfrak{A}',$$

für das *untere*

$$\mathfrak{B}=-\vartheta\mathfrak{A}' \text{ bez. } \mathfrak{A}=\vartheta\mathfrak{B}';$$

erstere Beziehung gibt die rechts oder negativ, letztere die links oder positiv rotierende Welle. Es gilt also

(25) $$n_l^2 \Theta_1 = 1 + 2 n d_1, \quad n_r^2 \Theta_1 = 1 - 2 n d_1,$$

somit

$$n_l^2 - n_r^2 = 4 n d_1 / \Theta_1,$$

oder in gleicher Annäherung

$$n_l - n_r = 2 n^2 d_1 = 2 \delta_1,$$

wobei $n^2 d_h$ in (ein neues Symbol) δ_h abgekürzt ist.

Für die Drehung der Polarisationsebene nach rechts auf einem Wege l ergibt sich in bekannter Weise

(26) $$\varrho = \frac{\pi l}{\lambda}(n_l - n_r) = \frac{2 \pi l \delta_1}{\lambda},$$

unter λ die Wellenlänge in Luft verstanden. Die Beobachtung von ϱ bestimmt also unmittelbar den einen Parameter d_1 oder δ_1.

In Richtungen normal zur Hauptachse, wo Θ_{11} und Θ_{22} die maximal verschiedenen Werte Θ_3 und Θ_1 annehmen, kann man aus (22) die zwei Wurzeln

(27) $$1 - n_o^2 \Theta_1 = \frac{(d_1 + d_3)^2}{\Theta_1 - \Theta_3}, \quad 1 - n_e^2 \Theta_3 = \frac{(d_1 + d_3)^2}{\Theta_3 - \Theta_1}$$

schließen; hieraus folgt dann für die ordinäre und die extraordinäre Welle

$$-\frac{\vartheta \mathfrak{B}_o'}{\mathfrak{A}_o} = \frac{d_1 + d_3}{n_o(\Theta_1 - \Theta_3)}, \quad -\frac{\vartheta \mathfrak{A}_e'}{\mathfrak{B}_e} = \frac{d_1 + d_3}{n_e(\Theta_1 - \Theta_3)},$$

Ausdrücke, die einander gleich werden, wenn man, wie p. 659, in mit einem d_{hk} multiplizierten Gliedern den Unterschied zwischen n_o und n_e ignoriert. Setzt man dann

$$-\vartheta \mathfrak{B}_o' / \mathfrak{A}_o = -\vartheta \mathfrak{A}_e' / \mathfrak{B}_e = Q,$$

wobei Q das Achsenverhältnis der Schwingungsellipsen angibt, so rotiert bei positivem Q die ordinäre Welle rechts, die extraordinäre Welle links. Das Vorzeichen von Q bestimmt sich nach obigen Formeln durch dasjenige von $(d_1 + d_3)/(\Theta_1 - \Theta_3)$; bei positiven Kristallen ist $\Theta_1 > \Theta_3$, also Q von demselben Vorzeichen wie $d_1 + d_3$, bei negativen gilt das Umgekehrte. In der oben eingeführten Annäherung kann man schließlich auch schreiben

(28) $$Q = \frac{(d_1 + d_3) n^2}{2(n_3 - n_1)} = \frac{\delta_1 + \delta_3}{2(n_3 - n_1)},$$

woraus erhellt, daß die Beobachtung der Elliptizität der Schwingungen an normal zur Hauptachse fortgepflanzten Wellen den Parameter $d_1 + d_3$ oder $\delta_1 + \delta_3$ abzuleiten gestattet. Derartige Beobachtungen bieten, wie schon in der Einleitung hervorgehoben ist, auch deshalb ein Interesse, weil gewisse theoretische Ansätze die Elliptizität in Richtungen normal zur Hauptachse gleich Null ergeben, andere mit nur *einer* Konstante operieren, also $d_1 = d_3$ oder $\delta_1 = \delta_3$ setzen, woraus dann die Beziehung

$$\varrho \lambda = 4 \pi Q (n_3 - n_1) \tag{29}$$

folgt, die ein Gegenstand der Prüfung ist.

6. Über die Bestimmung der Elliptizitäten von Wellen, die in Quarz normal zur Hauptachse fortschreiten.

Daß derartige Wellen nicht lineär polarisiertes Licht führen, hat jeder Beobachter spüren müssen, der bei starken Lichtintensitäten mit dem Babinet-Soleil-Kompensator gearbeitet hat; auch mit den bestgearbeiteten Instrumenten ist es nicht möglich, volle Dunkelheit zu erzielen. Daß nicht konstruktive Fehler (unrichtige Orientierungen der Teile) die Ursache sind, ergibt sich daraus, daß auch eine einzelne Quarzplatte, parallel der Hauptachse geschnitten, zwischen gekreuzten Nicols das Feld stets ein wenig aufhellt.

Allerdings sind, was auch die Formel (28) bei der nach (26) erwiesenen Kleinheit des Parameters δ_1 vermuten läßt, die Schwingungsellipsen sehr gestreckt, und die Messung des Achsenverhältnisses bietet schon an sich eine gewisse Schwierigkeit. Dazu kommt, daß jede Spannung in dem Kristall die Beobachtung zu entstellen vermag, und auch an die gute Bearbeitung des Präparates hohe Anforderungen gestellt werden müssen.

Die Beobachtungen geschahen an zwei Platten aus einem rechts- und einem linksdrehenden Quarz von ca. 4 mm Dicke, die nebeneinander gekittet und gemeinsam planparallel abgeschliffen waren. Die rechtsdrehende Platte erwies sich als ziemlich rein, die linksdrehende enthielt Störungen und konnte nur zu Kontrollbeobachtungen benutzt werden. Hr. Professor Liebisch stellte mir ein ausgezeichnetes, nach seiner Angabe gebautes und dem hiesigen mineralogischen Institut gehöriges

Polarisationsspektrometer mit Glimmerkompensator für die Messung freundlichst zur Verfügung. Als Lichtquelle diente eine Natriumflamme, in der ein Gemisch aus Leuchtgas und Sauerstoff brannte.

Die Polarisatoren wurden genauestens auf die Drehungsachse des Spektrometers als Normalrichtung justiert. Dies geschah in der Weise, daß ein sehr guter Glan-Thomson-Nicol auf dem Tischchen des Instrumentes mit angenähert horizontaler Polarisationsebene befestigt und mit Hilfe des Gauss-Okulars auf das Beobachtungs- und Spaltrohr justiert wurde. Dann wurde der Analysator auf größte Helligkeit gestellt und nunmehr mit dem Polarisator die beobachtete Intensität (wiederholt) auf Null gebracht.

Danach wurde das Tischchen mit dem Hilfsnicol um genau 180° gedreht und die Beobachtung wiederholt. Das Mittel aus beiden Bestimmungen lieferte die Position des Polarisators, bei der seine Polarisationsrichtung mit der Drehachse parallel war. Nach Beseitigung des Hilfsnicols ließ sich dann der Analysator auf den richtig gestellten Polarisator justieren.

Von der Genauigkeit dieser Bestimmung, die mit Nernst-Licht ausgeführt werden konnte, hängt für die Zuverlässigkeit der Resultate sehr viel ab. In der Theorie der Beobachtungen tritt nämlich neben der Elliptizität Q der untersuchten Wellen der Winkel auf, der die Orientierung der Quarzplatte gegen die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes bestimmt; jede Ungenauigkeit in dessen Definition wirkt somit auf die eigentlich gesuchte Größe Q ein.

Die Theorie der Beobachtungen soll hier nicht im einzelnen auseinandergesetzt werden.[1]) Es genügt, die Endformeln anzugeben, welche den Zusammenhang der verschiedenen in Betracht kommenden Größen veranschaulichen.

Ist Z die Hauptachse des Kristalles und HZ die Plattenebene, ist ferner $H^0 Z^0$ ein zweites Koordinatenkreuz in der Ebene von HZ, dessen Z^0-Achse mit der Drehachse des Spektrometers und, nach dem oben Gesagten, daher auch mit der Polarisationsrichtung der einfallenden Welle koinzidiert, und bezeichnet α das Azimut beider Systeme im Sinne der Fig. 3,

1) Vgl. dazu W. Voigt, Gött. Nachr. 1904. p. 171 u. f.

dann entsteht aus der einfallenden, geradlinig, parallel Z^0 polarisierten Welle beim Durchgang durch die Platte eine elliptisch polarisierte, und es gilt für das Amplitudenverhältnis a/b der beiden Komponenten nach H^0 und Z^0 und für die Verzögerung Δ der ersteren gegen die letztere

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{a^2}{b^2} = 4(Q^2 + \alpha^2)\sin^2\varepsilon, \\ \operatorname{tg}\Delta = \dfrac{Q\sin\varepsilon + \alpha\cos\varepsilon}{-Q\cos\varepsilon + \alpha\sin\varepsilon}. \end{cases}$$

Fig. 3.

Dabei bezeichnet ε die Verzögerung der links gegen die rechtsrotierende Welle beim Austritt aus der Platte, die sich in bekannter Weise aus den Geschwindigkeiten berechnet. Der Zusammenhang zwischen dem Charakter der Wellen als ordinäre oder extraordinäre und der Rotationsrichtung ist p. 661 erörtert. Bei Quarz stimmt der Sinn der Drehung der Polarisationsebene parallel der Hauptachse mit dem Sinn der Rotation der ordinären Welle überein. Da zugleich die ordinäre Welle die schnellere ist, so ist bei rechtsrotierendem Quarz ε positiv.

Setzt man unter Einführung zweier Hilfsgrößen μ und ϑ

$$(31)\qquad Q = \mu\cos\vartheta,\quad \alpha = \mu\sin\vartheta,$$

so resultiert

$$(32)\quad \frac{a}{b} = 2\mu\sin\varepsilon,\ \operatorname{tg}\Delta = -\operatorname{tg}(\varepsilon+\vartheta),\ \text{also}\ \Delta = m\pi - (\varepsilon+\vartheta),$$

wobei m eine beliebige ganze Zahl bedeutet, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit für das Folgende gleich Null gesetzt werden darf.

Ist durch die Beobachtung ε, a/b und Δ bestimmt, so ergeben sich Q und α nach den Formeln

$$(33)\quad Q = \frac{a}{2b\sin\varepsilon}\cos(\varepsilon+\Delta),\quad \alpha = \frac{-a}{2b\sin\varepsilon}\sin(\varepsilon+\Delta).$$

Bei der Beobachtung mit Glimmerkompensator werden die Winkel der Polarisationsebene P der schnelleren Welle im Glimmer und des Analysators A gegen die H^0-Richtung (die bei der oben beschriebenen Justierung der Nicols direkt gefunden wird) abgelesen. Wir nennen sie φ und χ und setzen

$\chi - \varphi = \psi$. Dann gibt die bekannte Theorie des Glimmerkompensators, falls δ den Gangunterschied des Glimmers bezeichnet, die beiden Beziehungen

$$(34) \qquad \frac{a}{b} = \sqrt{\psi^2 + \varphi^2 + 2\,\psi\,\varphi\cos\delta}, \quad \operatorname{tg}\varDelta = \frac{\psi\sin\delta}{\varphi + \psi\cos\delta}.$$

Die Beobachtung von φ und ψ liefert also bei bekanntem δ die Werte von a/b und $\varDelta$, deren Einsetzung in (33) dann Q und α bestimmen.

Bei der Schwierigkeit der Beobachtungen genügen für δ und ε angenähert richtige Werte. δ ist für den benutzten Glimmerkompensator von Hrn. Horn[1]) bestimmt und kann auf 84° (in Winkelmaß) geschätzt werden. ε ist für die untersuchte rechtsdrehende Quarzplatte mittels eines Quarzkeilkompensators hier im Institut von Hrn. Houstoun gemessen und bis auf ein irrelevantes Vielfaches von 2π zu 65° gefunden.

Für die Beobachtungen wurde die Quarzplatte mit Hilfe des Gaussschen Okulares normal zur Fernrohrachse gestellt und um letztere so gedreht, daß bei der Nullstellung von Analysator und Kompensator die beobachtete Intensität möglichst klein war, die Hauptachse Z des Quarzes also nahezu mit der Polarisationsrichtung Z^0 des einfallenden Lichtes zusammenfiel und demgemäß α einen kleinen Wert erhielt. Die Beobachtungen am Analysator und Kompensator zur Bestimmung von Q und α wurden dann jedesmal wiederholt, nachdem das Präparat mit Kreis und Tischchen um genau 180° gedreht, also der Winkel α in $-\alpha$ übergeführt war. Dieses Verfahren gab durch Vergleichung der erhaltenen α eine Art von Kontrolle für die Zuverlässigkeit der Beobachtung.

7. Resultate.

Ich teile zunächst einige Beobachtungen mit der *rechtsdrehenden* Quarzplatte mit, ohne indessen die einzelnen Ablesungen anzugeben. Die römischen Zahlen unterscheiden die bei verschiedenen Aufstellungen des Präparates, die arabischen

---

1) G. Horn, N. Jahrb. f. Min. 12. Beil.-Bd. p. 288. 1899.

die bei derselben Aufstellung nach einer Umdrehung gemachten Messungen.

$$\text{I.}\quad 1.\quad \varphi_1 = -3{,}3', \quad \chi_1 = +7{,}5', \quad \psi_1 = 10{,}8',$$
$$2.\quad \varphi_2 = -8{,}8', \quad \chi_2 = -0{,}9', \quad \psi_2 = 7{,}9'.$$

Hieraus folgt

$$\Delta_1 = -78^0, \quad \Delta_2 = -45^0, \quad \frac{a_1}{b_1} = 0{,}0032_0, \quad \frac{a_2}{b_2} = 0{,}0032_6,$$

also schließlich

$$Q_1 = 0{,}0017_2, \quad \alpha_1 = \quad 0{,}00039 = +1{,}4',$$
$$Q_2 = 0{,}0017_0, \quad \alpha_2 = -0{,}00058 = -2'.$$

Die entgegengesetzte Gleichheit von α_1 und α_2 ist hier — da 1′ nicht mehr sicher ist — als vollkommen erreicht zu betrachten.

$$\text{II.}\quad 1.\quad \varphi_1 = -13{,}5', \quad \chi_1 = -6', \quad \psi_1 = +7{,}5',$$
$$2.\quad \varphi_2 = +3', \quad \chi_2 = +13', \quad \psi_2 = +10'.$$

$$\Delta_1 = -30{,}5^0, \quad \Delta_2 = -112^0, \quad \frac{a_1}{b_1} = 0{,}0042, \quad \frac{a_2}{b_2} = 0{,}0031,$$

also

$$Q_1 = 0{,}0019, \quad \alpha_1 = -0{,}00128 = -4{,}4',$$
$$Q_2 = 0{,}0012, \quad \alpha_2 = +0{,}00125 = +4{,}3'.$$

Dieser Zahlenreihe liegen weniger Ablesungen zugrunde; das Resultat für Q ist also unsicherer. Immerhin weicht der mittlere Wert 0,00155 von dem vorstehend erhaltenen 0,0017 nur wenig ab.

$$\text{III.}\quad 1.\quad \varphi_1 = -7{,}6', \quad \chi_1 = +1{,}8', \quad \psi_1 = 9{,}4',$$
$$2.\quad \varphi_2 = -6', \quad \chi_2 = +3', \quad \psi_2 = 9'.$$

Die Beobachtungen über φ und ψ sind hier so nahe gleich, daß α sehr klein sein muß. Man kann daher in (30_1) α^2 neben Q^2 vernachlässigen und direkt mit der Formel

$$Q = \frac{a}{2\, b \sin \varepsilon}$$

und den Mittelwerten von φ und ψ rechnen. Man erhält hieraus

$$\varphi = -6{,}8', \quad \psi = 9{,}2',$$

also

$$\frac{a}{b} = 0{,}0031_4, \quad Q = 0{,}00173.$$

Mit dem *links*drehenden Quarz habe ich, weil seine teilweise Unreinheit ein vollständiges Auslöschen des Lichtes und somit eine genaue Einstellung nicht gestattete, nur wenige Beobachtungen gemacht, die aber immerhin nicht ohne Interesse sind, weil sie den möglichen Verdacht, daß es sich bei den vorstehenden Messungen überhaupt nicht um ein regelmäßiges Phänomen, sondern etwa um die Wirkung innerer Spannungen in dem Kristall handelte, im voraus widerlegen. Ein solcher Verdacht ist zwar schon an sich wenig begründet, weil Spannungen lineäre Polarisation innerhalb eines Kristalles nicht in elliptische überführen; aber ein direkter Nachweis, daß die Beobachtung an einem rechts- und einem linksdrehenden Quarz Erscheinungen liefert, die in der Weise sich qualitativ unterscheiden und quantitativ übereinstimmen, wie die Theorie es verlangt, ist doch in jedem Falle von erheblichem Gewicht.

Eine Betrachtung der Rechnungen von p. 664 zeigt nun, daß die Umkehrung der Rotationsrichtung keine andere Änderung hervorbringt, als die Vertauschung von Q mit $-Q$ und von ε mit $-\varepsilon$.

Die Vorzeichenänderung von Q ist in (33_1) mit der von ε durch den Nenner $\sin\varepsilon$ direkt verbunden; demgemäß ist die einzige Wirkung der Umkehrung der Drehungsrichtung, die von der Theorie verlangt wird, daß so, wie früher $-\varepsilon$ zwischen Δ_1 und Δ_2 (nahezu in die Mitte) fallen muß, Gleiches jetzt für $+\varepsilon$ gelten muß. Dies hat sich nun in der Tat gezeigt. Eine leidliche Beobachtungsreihe mit dem Linksquarz hat gegeben

$$1.\quad \varphi_1 = \quad 0, \quad \chi_1 = -19', \quad \psi_1 = -19',$$
$$2.\quad \varphi_2 = -6{,}5', \quad \chi_2 = -18', \quad \psi_2 = -11{,}5'.$$

Hieraus ergibt sich $\Delta_1 = +84^0$, $\Delta_2 = +56^0$, was dem oben Gesagten entspricht. Ferner folgt

$$\frac{a_1}{b_1} = 0{,}0055\,, \quad \frac{a_2}{b_2} = 0{,}0040\,,$$

also schließlich

$$Q_1 = -0{,}0028_5\,, \quad \alpha_1 = +0{,}00099 = 3{,}4',$$
$$Q_2 = -0{,}0021_8\,, \quad \alpha_2 = -0{,}000346 = -1{,}2'.$$

Die Differenz von α_1 und $-\alpha_2$ übertrifft hier wenig die Beobachtungsfehler; der mittlere Wert von $Q = -0{,}0025$ stimmt in

der absoluten Größe so weit mit dem früheren ($Q = +0{,}0017$ ca.) überein, daß man die Beobachtung mit der nicht ganz reinen Platte auch als eine Stütze des früheren Resultates betrachten kann. Für numerische Folgerungen soll es nicht benutzt werden.

Für die Berechnung ist außer dem erhaltenen Resultat $Q = 0{,}0017$ ca. noch heranzuziehen der bekannte Wert der Drehung der Polarisationsebene parallel der Hauptachse, der pro Millimeter 21,7° beträgt und nach (26) $2\delta_1 = n_l - n_r = 0{,}000071$ liefert, ferner der Wert $n_3 - n_1 = 0{,}0091$. Für $\delta_1 + \delta_3$ folgt hieraus der Wert 0,000031, der deutlich zeigt, daß die einkonstantigen Theorien (die $\delta_1 = \delta_3$, also $2\delta_1 = \delta_1 + \delta_3$ verlangen) durch die Beobachtung widerlegt werden.

δ_1 findet sich $= 0{,}000035$; $\delta_3 = -0{,}000004$, also so klein, daß bei der Unsicherheit der Beobachtungen kaum sein Vorzeichen ganz sicher ist. Man wird sagen dürfen, daß ein verschwindender Wert von δ_3 den bisherigen Messungen nicht widerspricht.

Die vorstehenden Resultate sind in guter Übereinstimmung mit einer Bestimmung von Q, die Hr. Houstoun[1]) kürzlich in dem hiesigen Institut ausgeführt hat, indem er bei einem Babinet-Soleil-Kompensator die Auslöschungspositionen, welche bei verschiedenen Azimuten der gekreuzten Nicols eintreten, beobachtete. Er fand $Q = 0{,}0016$; da aber bei dieser Bestimmung vorausgesetzt ist, daß die Teile des Kompensators streng richtig aufeinander orientiert sind, so wird die ausgezeichnete Übereinstimmung vielleicht zum Teil zufällig sein.

8. Über das optische Verhalten hemimorpher einachsiger Kristalle.

Es ist auf p. 660 hervorgehoben worden, daß Kristalle der genannten Gruppen bezüglich der Geschwindigkeit und der Polarisationsverhältnisse der in ihnen fortgepflanzten Wellen Einwirkungen der Aktivitätsglieder erfahren, die von höherer Ordnung, also (wenn man diese Glieder von der Ordnung annimmt, wie sie an enantiomorphen Kristallen beobachtet sind) der Wahrnehmung nicht zugänglich sind.

Dies Resultat wird nun eigentümlicherweise gerade durch

1) R. A. Houstoun, Phil. Mag. (6) 9. p. 12. 1905.

diejenigen Glieder bedingt, welche die von mir vorgeschlagene Theorie (die nach p. 656 mit Drudes neuerer übereinstimmt) von dem von Hrn. Pocklington (und früher von Hrn. Drude) gemachten Ansatz unterscheidet. Die letztgenannten Erklärungssysteme liefern bei hemimorphen einachsigen Kristallen das merkwürdige Resultat verschiedener Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen, — eine Dissymmetrie, die nach den Symmetrieverhältnissen der behandelten Körper an sich viel Wahrscheinlichkeit hat.

Aus diesem Grunde schien mir, trotz der Aussage der vorstehenden Theorie, eine orientierende Beobachtung ein Interesse zu bieten. Zum Nachweis kleiner Geschwindigkeitsdifferenzen sind die Interferenzmethoden unvergleichlich, und eine solche empfahl sich sonach auch zur Aufsuchung einer Geschwindigkeitsdifferenz in den beiden Richtungen der Hauptachse eines einachsigen hemimorphen Kristalles.

Derjenige Kristall, der sich in erster Linie für derartige Untersuchungen empfiehlt, ist natürlich Turmalin; indessen dauerte es ziemlich lange, bis ich in den Besitz eines Präparates kam, das die Beobachtung (die ja in der Richtung der stärksten Absorption geschehen mußte) gestattete. Aus einem ungewöhnlich hellen brasilianischen Turmalin stellte mir die Firma Steeg & Reuter in Kirdorf eine Doppelplatte von der Form |‾|‾| her, deren beide Hälften normal zur Hauptachse geschnitten, in verwendeter Stellung zusammengekittet und dann gemeinsam planparallel geschliffen waren, so daß nun normal auffallendes Licht die eine Hälfte parallel der +, die andere parallel der − Hauptachse durchsetzte. Dies Präparat wurde aufrecht auf einen Schlitten gesetzt, der mit einer Schraube in der Richtung normal zur Achse des Beobachtungsfernrohres verschoben werden konnte; mit dem Fernrohr wurden die Interferenzstreifen beobachtet, welche durch ein Paar $1^1/_2$ mm voneinander entfernter Spalten und ein Kollimatorrohr hervorgerufen wurden. Das Turmalinpräparat wurde sukzessive in drei Stellungen gebracht; in der ersten lagen beide Spalten vor der linken Halbplatte, in der dritten vor der rechten, in der mittleren lag die eine Spalte vor der linken, die andere vor der rechten Halbplatte. Der Schliff des Präparates war so gut, daß bei einer Verschiebung die

Interferenzstreifen nur in dem Augenblick verschwanden, wo die eine Spalte auf die Grenzlinie beider Hälften traf, und zwanzigstel Streifenbreiten mit Sicherheit gemessen werden konnten. Aber die Positionen der Streifen zeigten bei den genannten drei Stellungen des Präparates keine Differenzen von einem solchen Betrage. Da nun die Dicke des Präparates gleich 2 mm war, der mittlere Brechungsindex des Turmalin 1,63 ist und bei der Beobachtung die *doppelte* Differenz der Geschwindigkeiten parallel der + und der — Hauptachse zur Geltung kommt, so überschlägt man leicht, daß jene (einfache) Differenz den Wert von 1/160000 des absoluten Wertes nicht übersteigen kann. Bis auf diesen Betrag erweist also die Beobachtung die Gleichheit der Geschwindigkeiten parallel den beiden Achsenrichtungen des Turmalin.

Der negative Erfolg des die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im Turmalin betreffenden Experimentes kann nach oben Gesagtem nicht überraschen; es handelt sich nunmehr darum, ob es andere Erscheinungen gibt, bei denen die den hemimorphen Kristallen spezifischen Glieder sich nicht gegenseitig zerstören. Da nach Obigem die Vorgänge der einfachen Fortpflanzung ausgeschlossen sind, kommen hierfür nur diejenigen der Reflexion und Brechung in Betracht.

Nach p. 656 ändert sich durch die den hemimorphen Kristallen individuellen Zusatzglieder der Ausdruck für den Poyntingschen Energiefluß nicht; es ist demnach kein Grund vorhanden, die gewöhnlichen elektromagnetischen Grenzbedingungen zu erweitern; die Erhaltung der Energie in der Grenzfläche zwischen zwei Medien ist ohne dies gewährleistet. Man wird sonach die Bedingung beibehalten, daß die zur Grenze parallelen Komponenten der elektrischen und der magnetischen Kraft stetig durch die Grenzfläche gehen.

Von vornherein ist wahrscheinlich, und die Rechnung bestätigt es, daß die stärkste Wirkung der auf Hemimorphie beruhenden Glieder dann eintreten wird, wenn die reflektierende Ebene normal zur ausgezeichneten Achse steht. Hier gestaltet sich auch die Rechnung besonders einfach und ergibt folgendes bemerkenswerte Resultat:

Bei der Reflexion an einer normal zur Hauptachse an einem einachsigen hemimorphen Kristalle geschliffenen Ebene

wird einfallendes lineär polarisiertes Licht in elliptisches verwandelt, und zwar von verschiedener Umlaufsrichtung, je nachdem die innere Normale der Fläche mit der einen oder der anderen Seite der kristallographischen Hauptachse zusammenfällt.

Die im allgemeinen komplizierten Gesetze für die Elliptizität vereinfachen sich, wenn der Einfall unter *dem* Winkel stattfindet, der bei verschwindender Aktivität, d. h. verschwindenden d_{hk}, den Polarisationswinkel der betreffenden Grenzfläche darstellen würde, für den also in diesem Falle die magnetische Komponente normal zur Einfallsebene verschwinden würde. Hier wird nämlich die gegenseitige Verzögerung der beiden reflektierten Komponenten $= \pm \frac{1}{2} \pi$, die Schwingungsellipse hat die eine Hauptachse in der Einfallsebene.

Da die Komponente normal zur Einfallsebene bei der Reflexion sehr stark geschwächt wird, so hat man, um die beiden reflektierten Komponenten vergleichbar zu machen, die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes sehr nahe normal zur Einfallsebene zu legen. Man kann hierdurch das reflektierte Licht beliebig nahe kreisförmig schwingend machen und hätte dann theoretisch zur Aufsuchung der oben signalisierten Erscheinung nur den Rotationssinn für zwei einander gegenüberliegende Flächen normal zur Hauptachse zu bestimmen.

In Wirklichkeit liegen die Verhältnisse komplizierter, einmal weil alle künstlich hergestellten Flächen Oberflächenschichten besitzen, durch deren Wirkung allein schon einfallendes lineär polarisiertes Licht elliptisch reflektiert wird, sodann weil es nicht möglich ist, den Polarisationswinkel völlig genau einzuhalten. Man muß sich deshalb darauf beschränken, zu untersuchen, ob bei möglichst gleicher Beschaffenheit der beiden Flächen und möglichst gleichen und dem Polarisationswinkel recht nahen Einfallswinkeln die Elliptizitäten des reflektierten Lichtes sich so verschieden verhalten, wie es dem Hinzutritt einer entgegengesetzten Verzögerung von nahe $\pm \frac{1}{2} \pi$ (welche auf der Aktivität beruhen würde) zu der beiderseitig gleichen (von der Oberflächenschicht herrührenden) entspricht.

Das Programm der Beobachtung ist hiermit festgestellt; die Hoffnung auf Erfolg war freilich gering, nachdem alle früheren Versuche, die theoretisch vorhergesagte Einwirkung

der Aktivität des Quarzes auf das an ihm reflektierte Licht nachzuweisen, ergebnislos geblieben waren. Es war nicht wahrscheinlich, daß unter *analogen Verhältnissen*, d. h. in Bereichen geringer Absorption angestellte Messungen der Elliptizität des an einem hemimorphen Kristall reflektierten Lichtes ein besseres Resultat liefern sollten. Ganz anders lägen die Verhältnisse, wenn hemimorphe Kristalle mit großer selektiver Absorption zur Verfügung stünden. Denn der in die Endformeln eingehende Parameter der Aktivität enthält im Nenner ein Aggregat, das in der Nähe eines Absorptionsstreifens äußerst klein werden kann. In solchen Bereichen nimmt also der Parameter einen ausnahmsweise großen Wert an, so daß die von der Theorie signalisierten Erscheinungen sehr deutlich werden und sogar die oben vernachlässigten Glieder zweiter Ordnung merkliche Wirkungen ergeben könnten. Aber dergleichen Kristalle habe ich bisher nicht erhalten können und habe mich daher vorläufig darauf beschränken müssen, zu versuchen, ob unter ungünstigeren Bedingungen durch möglichst hoch gesteigerte Genauigkeit der Beobachtung ein Resultat zu erzielen wäre.

Die sehr zahlreichen und sorgsamen Beobachtungen sind mit dem Liebisch-Fueßschen Polarisationsspektrometer an der oben beschriebenen Turmalindoppelplatte angestellt, die zu diesem Zwecke auf der einen (vorderen) Fläche nochmals hochpoliert, auf der Rückseite aber mattgeschliffen und geschwärzt wurde. Um die Oberflächenschicht nach Möglichkeit zu beseitigen, wurde die Platte wiederholt mit dem Wernickeschen Gelatineverfahren[1]) behandelt. Indessen gelang es trotz vieler aufgewandter Mühe nicht, eine Verschiedenheit in der Elliptizität der auf den beiden Plattenhälften reflektierten Wellen *sicher* zu stellen. Die Erscheinung, die nach dem Vorstehenden gewiß als höchstwahrscheinlich vorhanden betrachtet werden darf, ist jedenfalls so fein, daß sie von der Wirkung des nicht absolut gleichen Oberflächenzustandes der beiden Plattenhälften nahezu verdeckt wird; jedes Abwischen der Platte mit einem reinen Leinen veränderte das Beobachtungsresultat derartig, daß sichere Schlüsse nicht möglich waren, zumal es sich

1) W. Wernicke, Wied. Ann. 30. p. 461. 1886.

schließlich um *sehr* kleine Differenzen großer gemessener Zahlen handelte. Ich sehe demgemäß davon ab, die Methode und die Resultate der Messung genauer zu schildern.

9. Allgemeine Bemerkungen über die Theorie der Lichtstrahlen in Kristallen.

Zur Untersuchung des Verhaltens der Lichtstrahlen in Kristallen bieten sich zwei Methoden, die man als geometrisch und physikalisch bezeichnen könnte. Die erste, ältere, findet den einer Wellenebene zugehörigen Strahl, indem sie den Schnittpunkt der betreffenden Ebene mit zwei Nachbarebenen aufsucht, die sämtlich diejenigen Positionen haben, die sie nach der Zeiteinheit erreicht haben würden, wenn sie *vor* derselben den Koordinatenanfang in sich enthalten hätten. Der Radiusvektor nach diesem Schnittpunkt soll dann nach Größe und Richtung die der gegebenen Wellenebene zugehörige Strahlengeschwindigkeit darstellen.

Die physikalische Grundlage dieses Verfahrens ist bekanntlich die Erfahrungstatsache, daß das Licht sich in nicht zu feinen Strahlenbündeln merklich geradlinig von einer punktförmigen Lichtquelle aus fortpflanzt. In hinreichender Entfernung von der Lichtquelle können die in dem Bündel befindlichen Teile der Wellenfläche als eben angesehen werden, und, wenn man die Annahme hinzufügt, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen höchstens in sehr kleiner Entfernung von der Lichtquelle nicht konstant ist, so erscheint die hinreichend großen Zeiten (also überwiegend konstanten Ausbreitungsgeschwindigkeiten) entsprechende Wellenfläche als die Enveloppe der Positionen aller möglichen ebenen Wellen, die gleichzeitig mit der Wellenfläche den leuchtenden Punkt verlassen hatten. Damit ist die obige Definition gegeben, aber man wird die Grundlagen derselben nicht als ganz befriedigend bezeichnen können.

Die zweite, neuere Methode geht von der Vorstellung des *Energieflusses* durch die Wellenebene aus und setzt seine Richtung der Strahlrichtung gleich, während sie die Strahlgeschwindigkeit durch den Quotienten aus Energiefluß und Energiedichte definiert.

Die zweite Definition hat vor der ersteren unzweifelhaft voraus, daß sie nicht eine unsichere Erfahrungstatsache, sondern einen klaren, unmittelbar einleuchtenden physikalischen Gedanken zum Ausgangspunkt nimmt, wobei die gegen die ganze Theorie des Energieflusses erhobenen Bedenken nicht außer acht gelassen zu werden brauchen. Daß die Energieströmung im allgemeinen nach Richtung und Größe oszilliert, bringt keine wesentliche Schwierigkeit, da man bei der Kleinheit der Oszillationsperiode annehmen darf, wir könnten nur *mittlere* Richtungen und Intensitäten wahrnehmen.

Fataler ist, daß sich die Bestimmungsstücke des Strahles als Ausdrücke zweiten Grades in den Schwingungskomponenten ergeben, denn damit entfällt für den Strahl die Gültigkeit des Superpositionsprinzipes, das die ganze übrige Optik beherrscht. Eine einfallende und eine reflektierte, oder eine ordinäre und eine extraordinäre Welle zusammen liefern nur *einen* Energiestrom, der sich auch nicht als Superposition zweier nur je einer Welle zugehöriger Ströme darstellt, sondern Anteile enthält, die von *beiden* Wellen abhängen. Es existiert hier also nicht einmal die *analytische* Berechtigung, den einfallenden und den reflektierten, den ordinären und den extraordinären Strahl gesondert zu betrachten, ganz abgesehen von der Schwierigkeit, daß die analytische Zerlegung in Komponenten noch gar nichts darüber aussagt, daß die Teile sich bei der Fortpflanzung räumlich sondern. Hierin steht also die neue Definition der älteren unbedingt nach. Es scheint nötig zur Erklärung der Tatsachen die Annahme hinzuzufügen, daß der Austritt der Energieströmungen verschiedener in einem Raume R koexistierender Wellen nach einem Raume R_1, wo sie gesondert verlaufen, ebenso geschieht, als ob die den einzelnen Wellen zugehörigen Energieströme in R sich gegenseitig nicht beeinflußt hätten.

Diese Annahme läßt sich in manchen Fällen direkt einigermaßen plausibel machen. Durchkreuzen sich z. B. zwei Wellenzüge (1) und (2), die parallel der XY-Ebene fortschreiten, normal zur XY-Ebene polarisiert und durch Ebenen normal zur XY-Ebene begrenzt sind, so ist der Energiestrom in dem Raum $(1+2)$ durch eine beliebige Ebene E normal zur XY-Ebene gegeben durch $v(C_1 + C_2)(S_1 + S_2)/4\pi$, wobei S_1 und S_2 die elektrischen

Kräfte parallel zur Schnittlinie der XY- mit der E-Ebene bezeichnen. In den Räumen (1) und (2) gilt dagegen je nur der Wert $v C_1 S_1 / 4 \pi$ und $v C_2 S_2 / 4 \pi$.

Wendet man dies auf die Grenze $\beta\gamma$ (Fig. 4) an und setzt voraus, daß die Komponenten S transversal sind, so wird auf der Seite des Raumes (1 + 2) der Energiestrom den Wert haben $v(C_1 + C_2) S_1 / 4 \pi$, auf der Seite des Raumes (1) hingegen $v C_1 S_1 / 4 \pi$.

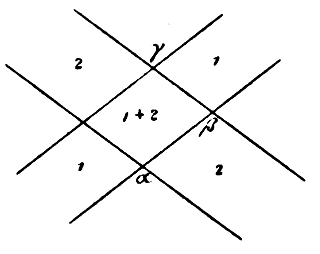


Fig. 4.

Sind die Wellen inkohärent, so wird an jeder Stelle von $\beta\gamma$ im *zeitlichen* Mittelwert $C_2 S_1$ verschwinden; sind sie kohärent, so wird das zeitliche Mittel von $C_2 S_1$ zwar an jeder Stelle sein Vorzeichen bewahren, aber der *räumliche* Mittelwert über ein Stück der Grenze, das groß gegen die Wellenlänge ist, wird verschwinden. So ergibt sich in beiden Fällen ein gewisser Mittelwert der Energieströmung zu beiden Seiten der Grenze $\beta\gamma$ als gleich.

Schwieriger liegt die Sache in dem Falle, wenn eine Welle durch eine kleine Öffnung auf die Oberfläche eines Kristalles fällt. Hier ist die Sonderung der ordinären und der extraordinären Energieströmung schwer verständlich, zumal sich durch Annäherung an eine optische Achse die Geschwindigkeitsdifferenz beliebig herabdrücken läßt. Immerhin wird in Fällen, wo Strahlenbündel auf dem ganz überwiegenden Teile ihres Weges gesondert sind, die Anwendung der zweiten Definition unbedenklich sein.

Was schließlich das gegenseitige Verhältnis der beiden Definitionen angeht, so ist ein allgemeiner Beweis für ihre Gleichwertigkeit auf Grund allein der Gleichungen (11) bei ganz beliebigen nur lineären Beziehungen zwischen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ einerseits, den A, B, C, X, Y, Z und ihren Differentialquotienten nach der Zeit andererseits meines Wissens nie versucht. Wahrscheinlich besteht eine strenge Gleichwertigkeit gar nicht allgemein, sondern nur bei durchsichtigen inaktiven Kristallen. Ich habe auch für aktive durchsichtige Kristalle keine eingehende Untersuchung über diese Frage angestellt.

Eine angenäherte Gleichwertigkeit dürfte aber nach den beiderseitigen Grundlagen stattfinden.

Bei den folgenden Betrachtungen über konische Refraktion habe ich beide Methoden angewandt, die *erste* bei einer nur qualitativen Abschätzung, dagegen bei der genaueren Analyse, die eine neue Erscheinung nötig machte, die *zweite*, die sich zu solchen Zwecken bequemer erweist.

10. Über die richtige Auffassung der gemeinhin auf konische Refraktion zurückgeführten Erscheinungen.

Daß die von Hrn. Weder aus der Theorie gefolgerten Resultate bezüglich der Erscheinungen der konischen Refraktion der Erfahrung nicht entsprechen, ist schon in der Einleitung hervorgehoben. Nach jenen Resultaten sollen aktive Kristalle weder das Lloydsche Phänomen der *inneren* noch das der *äußeren* konischen Refraktion zeigen, während die Beobachtung, wenigstens unter Benutzung *natürlichen* Lichtes, bei Rohrzucker, wie ich mich überzeugt habe, genau dieselbe Erscheinung liefert, wie z. B. bei Aragonit.

Der Widerspruch beruht nur zum Teil auf den irrigen Vorstellungen, zu denen Hr. Weder bezüglich der Wellenfläche aktiver zweiachsiger Kristalle gelangt; in der Frage der *inneren* konischen Refraktion spielt auch, und hauptsächlich, ein anscheinend verbreiteter Irrtum über die Deutung der bekannten von Lloyd entdeckten Erscheinung mit, die in Wahrheit mit der *theoretischen* konischen Refraktion direkt nichts zu tun hat.

Um gleich vorweg zu erwähnen, worum es sich hier handelt, sei daran erinnert, daß nach der Theorie in inaktiven Kristallen das Verhalten der Strahlen, die zu einer Wellennormale gehören, sich völlig *unstetig* ändert, wenn die Wellennormale in eine optische Achse rückt. Bei jedem noch so kleinen Winkel zwischen beiden gehören der Wellennormale *nur zwei* Strahlen zu, im Falle geometrischer Koinzidenz hingegen ein Strahlen*kegel*.

Nun vermögen wir auf keine Weise in eine einzige ebene Welle ein endliches Lichtquantum zu konzentrieren, selbst in Wellensysteme, deren Normalen einen unendlich kleinen Kegel erfüllen, können wir nur unendlich wenig Energie zusammendrängen.

Was also aus einer Welle wird, die *geometrisch* genau parallel einer optischen Achse fortschreitet, hat nie ein Beobachter gesehen und wird nach menschlichem Ermessen nie ein Beobachter sehen. Die von Lloyd beobachtete Erscheinung kommt demgemäß natürlich auch nicht durch die Wirkung der theoretischen konischen Refraktion zustande; sie ist die Wirkung der Wellen eines Bündels, deren Normale einen feinen Kegel mit der optischen Achse als Kegelachse erfüllen, und deren jeder *nur zwei* Strahlen zugehören. Die Richtigkeit dieser Auffassung, — die ja an sich ohne weiteres einleuchtet — wird drastisch bewiesen einmal durch den von Poggendorff entdeckten dunkeln Kreis in dem Lichtring der sogenannten inneren konischen Refraktion, der gerade da liegt, wo sich die Wirkung der *eigentlichen* konischen Refraktion geltend machen sollte, und sodann durch die Tatsache, daß aktive Kristalle, die nach der Theorie keine konische Refraktion besitzen, die Lloydsche Erscheinung mit dem Poggendorffschen Kreis (im *natürlichen* Lichte) ganz ebenso zeigen, wie inaktive.

Ich werde diese Verhältnisse zunächst durch die geometrische Anschauung plausibel machen und sodann durch die analytische Entwickelung genauer erläutern, die zugleich die Erklärung der folgenden *neuen* Erscheinung liefert, die ich beobachtete, als ich versuchte, ob sich nicht bei einfallendem *polarisierten* Lichte ein Unterschied zwischen der Lloydschen Erscheinung bei aktiven und bei inaktiven Kristallen ergäbe.

11. Eine Eigentümlichkeit der Erscheinung der sogenannten inneren konischen Refraktion bei aktiven Kristallen.

Stellt man die Beobachtung über sogenannte innere konische Refraktion an einem *nicht*aktiven Kristall mit lineär polarisiertem Licht an, so wird an zwei Stellen der beiden hellen (durch den Poggendorffschen Kreis getrennten) Ringe, die auf *demselben* Radius liegen, die Lichtintensität vernichtet. *Bei einem aktiven Kristall liegen die Auslöschungsstellen in beiden Ringen nicht auf demselben Radius, sondern sie sind ein wenig gegeneinander verschoben.*

Bei Zucker zeigt die Achse, die der kleineren Rotationspolarisation entspricht, diese Verschiebung nur eben wahrnehmbar; bei der Achse mit größerer Rotationspolarisation

ist sie außerordentlich merklich. Hier ist die dunkle Stelle im inneren Ringe in positiver Richtung um vielleicht 10° gegen die im äußeren Ringe verschoben, und da die merklich dunkle Stelle eine Breite von derselben Größenordnung hat, auch zwischen den benachbarten Enden der hellen Ringe ein wenig Licht zu sehen ist, so entsteht das Bild einer etwas deformierten und zwar links gewundenen Spirale, statt zweier konzentrischer Ringe. Diese Erscheinung ist sehr auffallend und von jedem Beobachter, dem ich sie zeigte, sogleich bemerkt. Die korrespondierende Erscheinung für die andere Achse ist nicht so leicht wahrzunehmen; der Wickelungssinn der Spirale erscheint entgegengesetzt. Bei Drehung der Polarisationsebene wandern die dunkeln Stellen um den Kreis und scheinen hierbei ihre relative Lage nicht merklich zu verändern. Rechts-Weinsäure zeigt eine sehr schöne und reine, nach rechts gewundene Spirale.

Selbstverständlich muß man bei der Beobachtung Sorge tragen, daß die Verteilung des einfallenden Lichtes *regelmäßig* stattfindet, daß also vor Einschaltung des Nicols die beiden Kreise in ihrer ganzen Ausdehnung gleiche Helligkeit besitzen.

Ich habe es nicht für überflüssig gehalten, die Theorie daraufhin zu befragen, ob sie die Erscheinung erklärt. So unbedeutend das Phänomen ist, so kann es, als völlig unerwartet, doch einen Prüfstein für das Erklärungssystem bieten.

12. Die Wellenfläche aktiver zweiachsiger Kristalle. Geometrische Diskussion der konischen Refraktionen.

In der oben genannten Arbeit hat Hr. Pocklington eine Skizze von dem Schnitt der Wellenfläche eines zweiachsigen *magnetisch*-aktiven Kristalles angegeben, ohne Genaueres über die Grundlagen seiner Zeichnung mitzuteilen. Da immerhin der theoretische Ansatz, den Hr. Pocklington für magnetisch-aktive Kristalle benutzt, von dem von mir für natürlich-aktive aufgestellten abweicht, so hielt ich es für nützlich, die Frage erneut zu untersuchen, zumal auch eine Vorstellung über wirkliche quantitative Beziehungen zu gewinnen, nötig schien.

Da die Diskussion der sehr umständlichen analytischen Beziehungen, welche die Wellenfläche S mit der Normalenfläche N in Beziehung setzen, wenig anschauliche Resultate

versprach, habe ich einfach für eine Reihe willkürlich gewählter Parameterwerte die Schnittkurve für die Normalenfläche mit der Ebene der Polarisationsachsen gezeichnet und mit Hilfe dieser Kurven, als Enveloppe der Normalen auf den Endpunkten der Radienvektoren, die Schnittkurve der Strahlen- oder Wellenfläche konstruiert. Da sich in dem maßgebenden kleinen Gebiet $d_{11} + d_{22}$ nach seiner Bedeutung nicht erheblich ändern wird (es sei denn, daß eine der Rotationsachsen D_1, D_2 der einen optischen Achse sehr nahe liegt, was wir ausschließen), und die Art der Veränderlichkeit mit Kristallgruppe und Individuum variiert, so habe ich $d_{11} + d_{22}$ dabei als konstant behandelt und mich damit also der theoretischen Behandlung Hrn. Weders angenähert.

Die erhaltenen Resultate stimmen im wesentlichen mit der Skizze überein, die Hr. Pocklington gibt. Um die be-

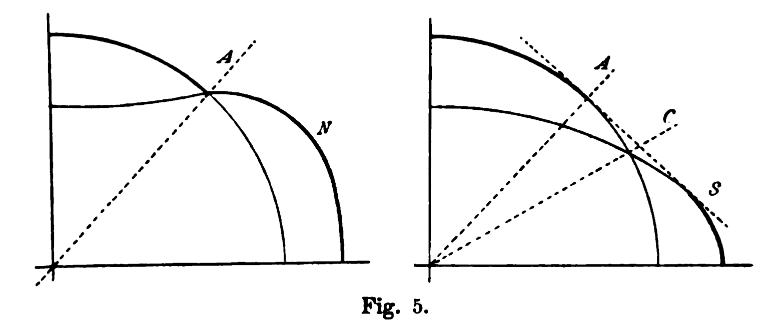


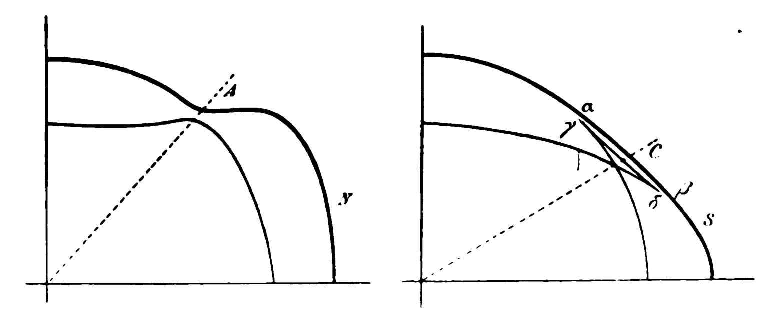
Fig. 5.

treffenden Kurven zu verstehen, hat man sich daran zu erinnern, daß, wenn man, wie gewöhnlich, die beiden Hüllen der Normalenfläche N eines *nichtaktiven* Kristalles je der ordinären und der extraordinären Welle (— etwa die äußere der ordinären, die innere der extraordinären —) zuteilt, damit nicht auch die beiden Hüllen der Wellenfläche S den entsprechenden Strahlen beigeordnet werden. Der äußeren (ordinären) Hülle von N entspricht nämlich die äußere Hülle von S *abzüglich* der vier einspringenden Kegelstücke, die durch die Berührungskreise der zu den optischen Achsen A normalen Wellenebenen begrenzt werden. Der inneren (extraordinären) Hülle von N entspricht die innere Hülle von S *zuzüglich* der betreffenden kegeligen Stücke. Die erstere Wellenfläche

hat also vier kreisförmige Löcher, und allen Richtungen, die aus *diesen* austreten, entspricht kein ordinärer Strahl; die letztere Wellenfläche hat vier Ansätze in Form eines Trompetentrichters, und allen Richtungen, die durch deren Öffnung austreten, entsprechen zwei extraordinäre Strahlen, aber kein ordinärer. In den Figg. 5 sind die einander entsprechenden Teile der Schnittkurven von *N* und *S* durch gleiche Stricharten hervorgehoben.

Die Normalenfläche *N* für *aktive* Kristalle entsteht aus der für inaktive, indem man die beiden Hüllen der letzteren in den optischen Achsen voneinander löst und die entstandenen Spitzen abrundet, wie das Fig. 6a andeutet.

Die Wellenfläche *S* der aktiven Kristalle endlich unterscheidet sich dadurch von dem beschriebenen Typus für in-



Figg. 6a u. b.

aktive, daß die Löcher der äußeren Wellenfläche mit einer schwach nach außen konvexen, die Trichteröffnungen der inneren mit einer schwach nach außen konkaven Fläche geschlossen, und die beiden Hüllen außerdem noch ein wenig voneinander abgerückt werden, so daß das in Fig. 6b angegebene Bild der beiden Schnittkurven entsteht. Ich habe mich davon überzeugt, daß auch für sehr starke Rotationspolarisation die Zusatzflächen nur äußerst wenig von Ebenen abweichen.

Die direkte Anschauung zeigt, daß keine der beiden Kurven von einer Geraden in zwei Punkten, keine der beiden Oberflächen also von einer zur Figur normalen Ebene in einer Kurve berührt wird. Innere konische Refraktion im strengen

Sinne des Wortes ist hiernach also bei einem aktiven Kristall nicht möglich.

Indessen lehrt gleichfalls die direkte Anschauung, weshalb trotzdem bei aktiven Kristallen die Lloydsche Erscheinung in derselben Weise auftritt, wie bei inaktiven. Man hat nur wieder davon auszugehen, daß bei den betreffenden Beobachtungen Systeme von Lichtwellen benutzt werden, deren Wellennnormalen einen Kegel erfüllen, dessen Achse in eine Polarisationsachse fällt.

Die Wellenebene normal zur Kegelachse berührt die beiden Wellenflächen in Punkten, die der Strahlenachse C nahe liegen. Gehen wir von dieser Ebene zu den Nachbarebenen über, so rücken die ihnen entsprechenden Berührungspunkte der beiden Wellenflächen mit wachsendem Neigungswinkel wegen der geringen Krümmung der Flächenstücke um C äußerst schnell von C fort. Das heißt: die an sich geringe Intensität, die ein sehr feiner Normalenkegel um A_1 enthält, wird in einen *großen* Strahlenkegel um C ausgebreitet und für die Beobachtung unmerklich.

Die Strahlen rücken erst dann wieder dichter zusammen, wenn die Neigung der Wellennormalen so groß ist, daß die Berührungsstellen die durch $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ in der Fig. 6b markierten Grenzen erreicht haben, wo die Krümmung der Fläche stärker wird. Die äußeren Teile des Normalenkegels geben also zu zwei strahlenerfüllten Kegelflächen Veranlassung, von denen der weitere der äußeren (ordinären), der engere der inneren (extraordinären) Wellenfläche entspricht; der erstere wird durch Berührungspunkte der äußeren Fläche außerhalb der Grenze $\alpha\beta$, und der letztere durch solche der inneren Fläche auf dem kegeligen Stück innerhalb der Grenze $\gamma\delta$ bestimmt. Es erscheinen demgemäß dieselben beiden hellen Ringe, getrennt durch den Poggendorffschen Kreis, die bei nichtaktiven Kristallen beobachtet werden.

Was die sogenannte *äußere* konische Refraktion angeht, so wird diese bekanntlich bei inaktiven Kristallen auf das Auftreten der Doppelpunkte in der Wellenfläche S zurückgeführt, in denen einem Radiusvektor oder Strahl unendlich viele Tangential- oder Wellenebenen entsprechen. Da diese Doppelpunkte nach Fig. 6b in der inneren Hülle der Wellen-

fläche *aktiver* Kristalle gleichfalls auftreten, so liegt hier jedenfalls ein Grund zu einem verschiedenen Verhalten aktiver und inaktiver Kristalle nicht vor. Daß das nach dem Lloydschen Verfahren beobachtete Phänomen der äußeren konischen Refraktion aber im wesentlichen auf dem singulären Verhalten des zur Strahlenachse parallelen Strahles *nicht* beruht, wird die genauere Analyse des Vorganges weiter unten zeigen.

13. Die Energieströmung in einem aktiven Kristall, insbesondere in der Nähe einer optischen Achse.

Wir wenden uns nun zu der genaueren analytischen Untersuchung der Vorgänge in der Nähe der Polarisationsachsen, bei der wir uns, wie oben gesagt, der Definition der Strahlen mit Hilfe der Energieströmung bedienen. Die Komponenten U, V, W dieser Strömung sind bekanntlich in den früheren Bezeichnungen gegeben durch

$$(35) \qquad \left\{ \begin{aligned} U &= \frac{v}{4\pi}(YC - ZB), \quad V = \frac{v}{4\pi}(ZA - XC), \\ W &= \frac{v}{4\pi}(XB - YA). \end{aligned} \right.$$

Wir setzen nun zunächst

$$(36) \qquad \mathfrak{B} = \vartheta\, Q\, \mathfrak{A}', \text{ wo } |Q| < 1;$$

diese Annahme entspricht einer Welle, die als *ordinär* bezeichnet werden darf, da sie für $Q=0$ in eine Schwingung $\parallel X$ übergeht. Für $Q>0$ ist sie rechts rotierend, für $Q<0$ links.

Aus (16) und (17) folgt dann, wenn wieder in den mit einem d_{hk} proportionalen Gliedern $n^2\Theta_{11}$ und $n^2\Theta_{22}$ mit Eins vertauscht werden,

$$(37) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \mathfrak{A}(1 + n\,Q\,d_{11}) + n\,\vartheta\,\mathfrak{A}'\,d_{21}, \\ B &= \vartheta\,\mathfrak{A}'(Q + n\,d_{22}) + n\,Q\,\mathfrak{A}\,d_{12}, \\ C &= n(Q\,\mathfrak{A}\,d_{13} + \vartheta\,\mathfrak{A}'\,d_{23}); \\ X &= \vartheta\,\mathfrak{A}'\,[n_o\,Q\,\Theta_{11} + (d_{11} + d_{22})], \\ Y &= -\,\mathfrak{A}\,[n_o\,\Theta_{22} + Q\,(d_{11} + d_{22})], \\ Z &= -\,\mathfrak{A}\,[n_o\,\Theta_{32}(1 + n\,Q\,d_{11}) - n^2\,Q\,\Theta_{31}\,d_{12} + Q\,d_{32}] \\ &\quad + \vartheta\,\mathfrak{A}'\,[n_o\,\Theta_{31}(Q + n\,d_{22}) - n^2\,\Theta_{32}\,d_{21} + d_{31}]. \end{aligned} \right.$$

Nahe den Polarisationsachsen sind die Differenzen $n^2\Theta_{11} - 1$ und $n^2\Theta_{22} - 1$ wirklich Größen von der Ordnung der d_{hk};

Θ_{31} und Θ_{32} sind größer, aber immerhin klein. Wir können sonach ihre Produkte in eines der d_{hk} in der letzten Formel in einer etwas roheren Annäherung gleichfalls fortlassen und schreiben

$$(38) \qquad Z = -\mathfrak{A}(n_o \Theta_{32} + Q d_{32}) + \vartheta \mathfrak{A}'(n_o \Theta_{31} Q + d_{31}).$$

Mit diesen Werten sind die Energieströmungen zu bilden. Sie enthalten Glieder mit den Faktoren $\mathfrak{A}^2$, $\vartheta^2 \mathfrak{A}'^2$ und $\vartheta \mathfrak{A} \mathfrak{A}'$, sind also periodisch. Als beobachtbar können nur die zeitlichen Mittelwerte $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ gelten, und für diese gibt eine einfache Rechnung, wenn M die Amplitude von $\mathfrak{A}$ ist, in der früheren Annäherung:

$$(39) \qquad \begin{cases} \bar{U}_o = -\dfrac{v M^2 Q}{8\pi}(n_o Q \Theta_{31} + 2 d_{31}), \\ \bar{V}_o = -\dfrac{v M^2}{8\pi}(n_o \Theta_{32} + 2 Q d_{32}), \\ \bar{W}_o = \dfrac{v M^2}{8\pi}[n_o(Q^2 \Theta_{11} + \Theta_{22}) + 3 Q(d_{11} + d_{22})]. \end{cases}$$

Wir setzen zweitens

$$(40) \qquad \mathfrak{A} = \vartheta Q \mathfrak{B}', \text{ wo } |Q| < 1;$$

dies gibt die extraordinäre Welle, die für $Q > 0$ links rotiert. Man erhält die hier geltenden Ausdrücke für A, B, C, X, Y, Z aus (37), wenn man darin $\mathfrak{A}$ mit $\vartheta Q \mathfrak{B}'$, $\vartheta \mathfrak{A}'$ mit $-\mathfrak{B} Q$ und zugleich Q mit $-1/Q$, also $\mathfrak{A} Q$ mit $-\vartheta \mathfrak{B}'$ und $\vartheta Q \mathfrak{A}'$ mit $+\mathfrak{B}$, außerdem auch n_o mit n_e vertauscht.

Bezeichnet man noch die Amplitude von $\mathfrak{B}$ in dieser Welle durch N, so erhält man für die mittleren Strömungskomponenten der extraordinären Welle

$$(41) \qquad \begin{cases} \bar{U}_e = -\dfrac{v N^2}{8\pi}(n_e \Theta_{31} - 2 Q d_{31}), \\ \bar{V}_e = -\dfrac{v N^2 Q}{8\pi}(n_e Q \Theta_{32} - 2 d_{32}), \\ \bar{W}_e = \dfrac{v N^2}{8\pi}[n_e(\Theta_{11} + Q^2 \Theta_{22}) - 3 Q(d_{11} + d_{22})]. \end{cases}$$

Für Θ_{32} und Θ_{31} folgt gemäß den allgemeinen Ausdrücken für A' und B' in (8) nach Fig. 2

$$(42) \qquad \begin{cases} \Theta_{32} = -\tfrac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_3)\sin i \sin(U_1 - U_2), \\ \Theta_{31} = -\tfrac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_3)\cos i \sin(U_1 + U_2); \end{cases}$$

in großer Nähe der optischen Achse A_1 ist U_2 konstant und sehr groß gegen U_1, es haben also Θ_{32} und Θ_{31} hier die Formen

(43) $$\Theta_{32} = P \sin i, \quad \Theta_{31} = - P \cos i,$$

wobei P als konstant gelten kann und positiv ist, wenn, wie wir annehmen wollen, $\Theta_1 > \Theta_3$. Die Ausdrücke für Θ_{11} und Θ_{22} sind in (23) gegeben; für die nächste Umgebung einer optischen Achse unterscheiden sie sich nur unmerklich von Θ_2.

$d_{11} + d_{22}$ ist gleichfalls in (23) ausgedrückt; d_{32} und d_{31} lassen sich durch Kombination der Formeln (4), (8), (9) ziemlich umständlich berechnen. Wenn, wie wir hier wieder annehmen, die Rotationsachsen D_1, D_2 einen beträchtlichen Winkel mit A_1 einschließen, können $d_{11} + d_{22}$, d_{32} und d_{31} in der unmittelbaren Umgebung der Achse A_1 als *konstant gelten.*

Was den Wert von Q angeht, so erhält man mit Hilfe der Ansätze $\mathfrak{B} = \vartheta Q \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A} = \vartheta Q \mathfrak{B}'$ für die ordinäre und die extraordinäre Welle sogleich aus (21)

$$Q_o (1 - n_o^2 \Theta_{11}) = n_o (d_{11} + d_{22}), \quad Q_e (1 - n_e^2 \Theta_{22}) = - n_e (d_{11} + d_{22}),$$

und aus (22)

(44) $$n^2 = \frac{\Theta_{11} + \Theta_{22}}{2 \Theta_{11} \Theta_{22}} \mp \sqrt{\frac{n^2 (d_{11} + d_{22})^2}{\Theta_{11} \Theta_{22}} + \left(\frac{\Theta_{11} - \Theta_{22}}{2 \Theta_{11} \Theta_{22}}\right)^2},$$

wobei das obere Zeichen der ordinären, das untere der extraordinären Welle entspricht. Dabei können überall für die in $(d_{11} + d_{22})$ multiplizierten n mittlere Werte, z. B. $1 / \sqrt{\Theta_2}$ eingesetzt werden.

Die Kombination liefert, wenn außerhalb der Differenz $(\Theta_{11} - \Theta_{22})$ überall Θ_{11} und Θ_{22} mit Θ_2 vertauscht wird,

(45) $$Q = \frac{2 (d_{11} + d_{22}) \sqrt{\Theta_2}}{- (\Theta_{11} - \Theta_{22}) + \sqrt{4 (d_{11} + d_{22})^2 \Theta_2 + (\Theta_{11} - \Theta_{22})^2}}.$$

Dabei ist nach (23)

(46) $$\Theta_{11} - \Theta_{22} = - (\Theta_1 - \Theta_3) \sin U_1 \sin U_2,$$

was in der Nähe der Achse A_1, wo wir U für U_1 schreiben, die Form $- p\, U$ hat, unter p eine Konstante verstanden.

Q, das für $U = 0$ zu Eins wird, nimmt also bei kleinem $d_{11} + d_{22}$ mit wachsendem U rapide ab und wird bald unmerklich.

14. Diskussion einer ersten Annäherung.

Für eine nur qualitative ungefähre Einsicht des Verhaltens in der nächsten Umgebung der Polarisationsachsen ist es zulässig, auch noch die Glieder erster Ordnung in den d_{hk} zu vernachlässigen — eine Annahme, die natürlich nur bei nicht zu kleinen Q, also bei merklichen Elliptizitäten, d. h. in großer Nähe einer Polarisationsachse zulässig ist. Bezeichnen wir dann die Winkel, welche die Projektionen der Energieströmung auf die XZ- und die YZ-Ebene mit der Z-Achse einschließen, durch a und b, so wird

$$(47)\quad \begin{cases} a_o = \dfrac{\bar{U}_o}{\bar{W}_o} = -\dfrac{Q^2\,\Theta_{31}}{Q^2\,\Theta_{11}+\Theta_{22}}, & b_o = \dfrac{\bar{V}_o}{\bar{W}_o} = -\dfrac{\Theta_{32}}{Q^2\,\Theta_{11}+\Theta_{22}}, \\ a_e = \dfrac{\bar{U}_e}{\bar{W}_e} = -\dfrac{\Theta_{31}}{\Theta_{11}+Q^2\,\Theta_{22}}, & b_e = \dfrac{\bar{V}_e}{\bar{W}_e} = -\dfrac{Q^2\,\Theta_{32}}{\Theta_{11}+Q^2\,\Theta_{22}}. \end{cases}$$

Die Wirkung der Aktivität ist hier nur noch in dem für die Größe der Elliptizität maßgebenden Term Q enthalten. In sehr großer Nähe der Achse A_1 setzen wir nach Obigem

$$\Theta_{31} = -P\cos i,\quad \Theta_{32} = +P\sin i,\quad \Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_2$$

und haben so

$$(48)\quad \begin{cases} a_o = +\dfrac{Q^2 P\cos i}{(1+Q^2)\,\Theta_2}, & b_o = -\dfrac{P\sin i}{(1+Q^2)\,\Theta_2}, \\ a_e = +\dfrac{P\cos i}{(1+Q^2)\,\Theta_2}, & b_e = -\dfrac{Q^2 P\sin i}{(1+Q^2)\,\Theta_2}. \end{cases}$$

Diese a und b sind zugleich die (sehr kleinen) Koordinaten des Schnittpunktes der Energieströmungen mit einer Kugel vom Radius Eins relativ zum Schnittpunkt der Z-Achse, aber sie beziehen sich auf das p. 654 eingeführte Koordinatenkreuz, dessen X-Achse mit der Ebene $A_1 A_2$ den Winkel i einschließt.

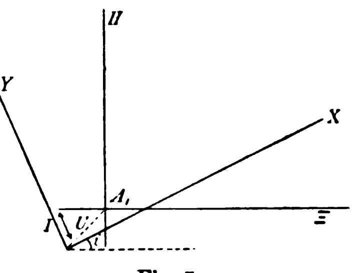


Fig. 7.

Es ist vorteilhafter, ein Ξ H-Kreuz einzuführen, dessen Ξ-Achse in die Ebene der Polarisationsachsen $A_1 A_2$ fällt, und das seinen Anfang in der Spur der Achse A_1 hat (vgl. Fig. 7). Bezeichnen wir die Koordinaten

der Spur der Energieströmung gegen diese Achsen durch ξ und η, so haben wir

$$(49)\quad \begin{cases} \xi = a\cos i - b\sin i - U\cos I, \\ \eta = a\sin i + b\cos i - U\sin I. \end{cases}$$

Hieraus folgen für den ordinären und den extraordinären Strahl bei Einführung von zwei Abkürzungen R_o und R_e die Gleichungen:

$$(50)\quad \begin{cases} \xi_o - \frac{P}{2\Theta_3} = R_o \cos I, \quad \eta_o = R_o \sin I, \quad R_o = \frac{P(Q^2-1)}{2\Theta_3(Q^2+1)} - U, \\ \xi_e - \frac{P}{2\Theta_3} = R_e \cos I, \quad \eta_e = R_e \sin I, \quad R_e = \frac{P(1-Q^2)}{2\Theta_3(Q^2+1)} - U. \end{cases}$$

Diese Formeln bestimmen für die Umgebung einer Polarisationsachse zu jeder durch U und I bestimmten Richtung der Wellennormale Z die Lage der dazugehörigen Energieströmungen. Man braucht dazu, wie oben gesagt, nur die Ξ H-Ebene als Tangentenebene an einer Kugel vom Radius Eins zu betrachten und die Punkte, welche durch U, I einerseits und durch ξ, η andererseits gegeben sind, mit dem Kugelmittelpunkt zu verbinden.

In dem betrachteten Bereich kann P als konstant, Q als Funktion von U allein gelten; letzteres gilt somit auch für R_o und R_e. Quadrieren und addieren wir je die ersten Formeln jeder Zeile in (50), so erhalten wir hiernach zwei von I freie Beziehungen, die lauten

$$(51)\quad \left(\xi_o - \frac{P}{2\Theta_3}\right)^2 + \eta_o^2 = R_o^2, \quad \left(\xi_e - \frac{P}{2\Theta_3}\right)^2 + \eta_e^2 = R_e^2;$$

d. h.: umkreist die Wellennormale in konstantem Winkelabstand eine Polarisationsachse, so umkreist in der eingeführten Annäherung sowohl der ordinäre, wie der extraordinäre Strahl den Vektor nach dem Punkt $\xi = P/2\Theta_3$, $\eta = 0$ gleichfalls in konstantem Winkelabstand; der von ihm in der Ξ H-Ebene beschriebene Kreis hat bez. den Radius R_o und R_e.

Ehe wir diese allgemeinen Formeln diskutieren, wird es nützlich sein, ihre Aussagen für *nicht*aktive Kristalle zu betrachten.

15. Anwendung auf die Theorie der sogenannten konischen Refraktionen bei inaktiven Kristallen. Der Poggendorffsche Kreis.

Für nichtaktive Kristalle ist $Q = 0$ zu setzen, es wird also in (50)

$$|R_o| = \frac{P}{2\,\Theta_2} + U, \quad |R_e| = \frac{P}{2\,\Theta_2} - U; \tag{52}$$

d. h., trägt man auf der Ξ-Achse die Strecke $A_1 C_1 = P/2\,\Theta_2$ ab, so werden, während die Spur der Wellennormale den Kreis vom Radius U umläuft, die Spuren des ordinären und des extraordinären Strahles die beiden Kreise um C_1 durchlaufen, welche den ersteren Kreis von außen und von innen berühren. Einem Bündel Wellennormalen, das zwischen zwei Kreisen um A_1 vom Radius U und $U + d\,U$ liegt, entsprechen zwei Bündel Strahlen, die zwischen den Kreisen vom Radius R_o und $R_o + d\,U$ einerseits, R_e und $R_e - d\,U$ andererseits, um C_1 als Zentrum, liegen.

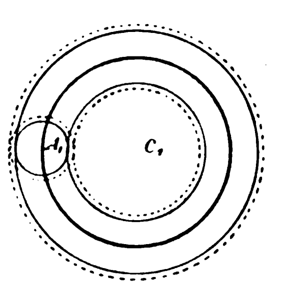


Fig. 8.

Dieses Resultat ist von Wichtigkeit für das Verständnis der Lloydschen Erscheinung, die man gemeinhin auf die Zerlegung einer parallel der optischen Achse fortschreitenden Welle in einen Strahlenkegel zurückführt. Es ist schon p. 677 erörtert, daß diese Auffassung des Phänomens eine irrige ist. Vorstehendes gibt die vollständige Erklärung des Wahrnehmbaren, einschließlich des Poggendorffschen dunkeln Kreises.

In der Tat, die Wellen, deren Normalen einen unendlich feinen Kegel um A_1 erfüllen, führen nur unendlich wenig Energie mit sich; die ihnen entsprechenden Strahlen, die den stark ausgezogenen Kreis um C_1 in der Figur erfüllen, werden also erst recht keine wahrnehmbare Intensität liefern, — *dieser Kreis wird dunkel sein.* Bei konstanter Energiedichte in dem Normalenkegel werden Ringe um A_1 von gleicher Breite um so mehr Energie enthalten, je größer ihr Radius ist; es werden sonach auf den Kreisen um C_1 die Intensitäten von dem ausgezogenen Kreis nach außen bez. nach innen zunehmen, d. h.,

es werden zwei helle Ringe entstehen, die durch eine dunkle Zone geschieden sind.

Nimmt, wie das bei der gewöhnlichen Anordnung der Beobachtung stattfindet, die Intensität in dem einfallenden Kegel nach außen zu ab, so werden auch die Ringe um C_1 nach außen bez. innen *allmählich* an Helligkeit abnehmen.

Hierdurch ist die Lloydsche Erscheinung der sogenannten innern konischen Refraktion wohl vollständig aufgeklärt. Wir machen auch noch eine Anwendung der obigen Formeln auf den Fall der *äußeren* konischen Refraktion, da sie das Phänomen von einer etwas anderen Seite beleuchten, als die gewöhnliche Behandlung. Wir schreiben dazu die Gleichungen (50) für $Q = 0$

$$(53)\quad \begin{cases} \xi_o = \frac{P}{2\Theta_2} - \left(\frac{P}{2\Theta_2} + U\right)\cos I, & \eta_o = -\left(\frac{P}{2\Theta_2} + U\right)\sin I, \\ \xi_e = \frac{P}{2\Theta_2} + \left(\frac{P}{2\Theta_2} - U\right)\cos I, & \eta_e = +\left(\frac{P}{2\Theta_2} - U\right)\sin I, \end{cases}$$

und stellen uns dazu die Frage, ob es Wellennormalen gibt, die, selbst *außerhalb* der Ebene der optischen Achsen liegend, Strahlen *in* dieser Ebene veranlassen.

Hiermit ist festgesetzt, daß η_o oder η_e verschwinden sollen, obgleich $\sin I$ nicht verschwindet. Für $P > 0$, d. h. $\Theta_1 > \Theta_3$ läßt sich die Anforderung, da U als absolute Größe gilt, nur durch den *extraordinären* Strahl erfüllen, und zwar für diejenigen Wellennormalen, für die

$$(54)\qquad U = P/2\,\Theta_2$$

ist, d. h., deren Spuren in unserer Darstellung einen Kreis vom Radius $P/2\,\Theta_2$ um den Punkt A_1, die also selbst den entsprechenden Kegelmantel um die Achse A_1 erfüllen. Die Spur des dieser Schar von Wellennormalen zugehörigen Strahles ist durch $\xi = P/2\,\Theta_2$, $\eta = 0$ gegeben, sie fällt also in den Punkt C_1, der in der benutzten Annäherung die eine Strahlenachse markiert. Diesem Strahl gehört also die Schar von Wellennormalen zu, deren Spur den stark ausgezogenen Kreis um A_1 liefert.

Extraordinäre Wellen, deren Normalen die *beiden* Kreise vom Radius $U = (P/2\,\Theta_2) \pm u$ um A_1 erfüllen, liefern Strahlen,

die auf *einem* Kreis vom Radius u um C_1 liegen; in der Tat liefert die Substitution für U

$$(55)\quad \begin{cases} \xi_e = \dfrac{P}{2\,\Theta_2} \mp u\cos I, \quad \eta_e = \mp u\sin I, \\ \text{also} \\ \left(\xi_e - \dfrac{P}{2\,\Theta_2}\right)^2 + \eta_e^2 = u^2. \end{cases}$$

Ordinäre Wellen mit gleicher Normalenrichtung liefern Strahlen, welche Kreise um C_1 von den Radien $P/\Theta_2 \mp u$ erfüllen, denn es gilt

$$(56)\quad \xi_o = \frac{P}{2\,\Theta_2} - \left(\frac{P}{\Theta_2} \pm u\right)\cos I, \quad \eta_o = -\left(\frac{P}{\Theta_2} \pm u\right)\sin I,$$

also

$$(57)\quad \left(\xi_o - \frac{P}{2\,\Theta_2}\right)^2 + \eta_o^2 = \left(\frac{P}{\Theta_2} \pm u\right)^2.$$

Diese Kreise sind in Fig. 9 punktiert eingetragen.

Die vorstehenden analytisch abgeleiteten Resultate sind selbstverständlich in genauester Übereinstimmung mit dem, was die geometrische Anschauung liefert, gehen aber darüber hinaus.

Sie geben u. a. direkte Aufklärung darüber, warum bei der Erscheinung der sogenannten äußeren konischen Refraktion ein Analogon zu dem Poggendorffschen dunkeln Kreis nicht beobachtet wird. Die Fig. 9 zeigt deutlich, daß bei der gebräuchlichen Anordnung die Intensität sich über den aus dem Kristall austretenden Kegelmantel von Strahlen nahezu gleichmäßig verteilt; denn repräsentiert der kleine Kreis um C_1 das im Kristall verlaufende Strahlenbündel, so liegt zwischen den äußersten Kreisen um A_1 das Normalenbündel sowohl für die eintretende, wie für die austretende Welle, und in beiden ist die Intensitätsverteilung die gleiche.

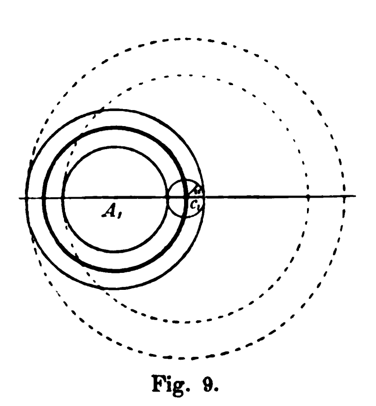


Fig. 9.

Freilich trägt zu der Erscheinung der streng parallel der Strahlenachse verlaufende Strahl nur Unmerkliches bei; was

man wahrnimmt, beruht *durchaus* auf Strahlen, die kein singuläres Verhalten besitzen, d. h. denen nicht unendlich viele, sondern nur zwei Wellennormalen zugehören.

16. Die Theorie der sogenannten konischen Refraktionen bei aktiven Kristallen.

Wenden wir uns nun zu den aktiven Kristallen zurück, so ergeben die Werte

$$(58)\qquad R_o = \frac{P(Q^2-1)}{2\,\Theta_2(Q^2+1)} - U, \quad R_e = \frac{P(1-Q^2)}{2\,\Theta_2(1+Q^2)} - U$$

für die Radien der Kreise, welche die Strahlen bei Umkreisung der Achse A_1 durch die Wellennormale im Abstand U durchlaufen, ein bemerkenswert abweichendes Resultat.

Für verschwindendes U, d. h. in dem Falle, daß sich die Wellennormale nicht aus der Achse A_1 entfernt, ist $Q = \pm 1$, also sowohl R_o, wie R_e gleich Null; d. h., einer Wellenebene, die parallel einer Polarisationsachse fortschreitet, entspricht bei aktiven Kristallen nicht ein Strahlenkegel, sondern ein Paar von zwei einzelnen Strahlen, die in der hier benutzten Annäherung in diejenige Richtung fallen, in der bei dem nicht aktiven Kristall die Achse der theoretischen inneren konischen Refraktion bez. die Strahlenachse liegt.

Mit wachsendem U entstehen Kreise um den Punkt C_1, deren Radien für den ordinären Strahl innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Formeln (58) dauernd zunehmen, hingegen für den extraordinären Strahl zuerst zunehmen bis zu einem Maximum, dann wieder abnehmen, Null erreichen und von neuem zunehmen. In der Tat sind die Radien durch die *absoluten* Werte von R_o und R_e bestimmt, und man erkennt leicht, daß diese wegen $P > 0$ und $Q^2 < 1$ den angegebenen Verlauf nehmen.

Da Q nach (45) mit wachsendem U sehr schnell abnimmt, so rührt, wenn ein System von Wellenebenen betrachtet wird, dessen Normalen einen engen Kegel um die Achse A_1 erfüllen, das ganze System von Strahlen, welches merklichen Werten Q entspricht, von einem System von Wellen mit äußerst kleinem U her; die in ihnen enthaltene Intensität ist also sehr gering und wegen der Ausbreitung über ein immerhin merkliches

Gebiet unmerklich. Da aber die Formeln (58) Q nur quadratisch neben Eins enthalten, so wird ihre Bedeutung für einigermaßen kleines Q sich nicht merklich von derjenigen der für inaktive Kristalle geltenden Formeln (52) unterscheiden. Es erklärt sich sonach die anscheinende Gleichheit des Lloydschen Phänomens der inneren konischen Refraktion bei aktiven und inaktiven Kristallen.

Noch einfacher erkennt man die Gleichwertigkeit der Verhältnisse für den Fall der äußeren konischen Refraktion; denn für die der Strahlenachse nahen Strahlen ist Q im allgemeinen so klein, daß die Elliptizität der Schwingungen nur von ganz unbedeutender Einwirkung auf die Erscheinung ist. Es können somit die Überlegungen von p. 688 einfach auf aktive Kristalle übertragen werden.

17. Die Polarisationsverhältnisse der sogenannten konischen Refraktionen bei inaktiven Kristallen.

Wir wenden uns schließlich noch zu der Betrachtung der Polarisationsverhältnisse bei den auf konische Refraktion zurückgeführten Erscheinungen, die erneut zu untersuchen sind, nachdem oben gezeigt ist, daß sich die beobachteten Erscheinungen in anderer Weise erklären, als bisher angenommen.

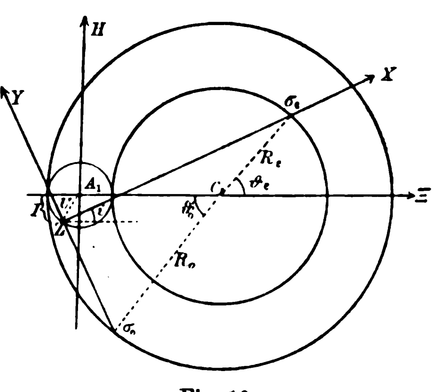


Fig. 10.

Für inaktive Kristalle erledigt sich die Frage sehr leicht durch Betrachtung von Fig. 10. Z ist die Spur einer Wellennormale, σ_o, σ_e sind diejenigen der zugehörigen Strahlen; die (magnetische) Polarisation des ersteren liegt in der XZ-, die des letzteren in der YZ-Ebene.

Legen wir den Ort der Z-Achse auf dem Kreis vom Radius U durch den Winkel I, die Orte von σ_o und σ_e auf

den Kreisen von den Radien R_o und R_e durch die Winkel ϑ_o' und ϑ_e fest, so ergibt sich leicht

$$(59)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} i = \dfrac{R_o(1-\cos\vartheta_o') - U(1-\cos I)}{R_o \sin\vartheta_o' - U\sin I}, \\ \operatorname{ctg} i = \dfrac{R_e(1+\cos\vartheta_e) + U(1+\cos I)}{R_e\sin\vartheta_e + U\sin I}. \end{cases}$$

Die erste Formel können wir der zweiten noch mehr konform gestalten, wenn wir

$$i = j - \frac{\pi}{2}, \quad I = J - \pi, \quad \vartheta_o' = \vartheta_o - \pi$$

setzen; sie nimmt dann die Gestalt an

$$(60)\qquad \operatorname{ctg} j = \frac{R_o(1+\cos\vartheta_o) - U(1+\cos J)}{R_o\sin\vartheta_o - U\sin J}.$$

Hieraus folgt, wie die Rechnung zeigt,

$$j = \tfrac{1}{2}\vartheta_o$$

und die zweite Formel (59) ergibt

$$i = \tfrac{1}{2}\vartheta_e.$$

Beachtet man, daß i und j die Azimute der Polarisationen im ordinären und extraordinären Strahl gegen die ΞZ-Ebene darstellen, so erkennt man, daß auf allen Punkten eines Radius von C_1 aus die gleichen Azimute stattfinden. Bei der sogenannten inneren konischen Refraktion sind alle in einer Ebene durch die Strahlenachse gelegenen Strahlen nach derselben Richtung polarisiert, bei Anwendung einfallenden lineär-polarisierten Lichtes müssen also korrespondierende Stellen des äußeren und des inneren Ringes ausgelöscht werden.

18. Das singuläre Verhalten aktiver Kristalle.

Bei aktiven Kristallen gelten, solange wir uns auf die erste rohe Annäherung beschränken, dieselben geometrischen Überlegungen, nur tritt an Stelle der Richtung der lineären Polarisation die Richtung der größeren Achse der elliptischen Schwingung. Es müßten hiernach also bei einfallendem lineär-polarisierten Licht bei aktiven Kristallen gleichfalls korrespondierende Stellen des inneren und des äußeren Ringes maximal verdunkelt werden. Dem widerspricht aber nach p. 677 die Beobachtung, woraus folgt, daß hier die Wahrnehmung weiter reicht, als die erste Annäherung der Theorie.

Die Formeln der zweiten Annäherung sind bereits in (39) und (41) angegeben. Man erkennt leicht, daß die bisher vernachlässigten Glieder mit einem der d_{hk}, da sie innerhalb des betrachteten Bereiches im allgemeinen nur langsam variieren, die bisher gezogenen Folgerungen nur unbedeutend korrigieren; wir beschränken uns darauf, klarzustellen, was sie in bezug auf die Polarisationsverhältnisse aussagen.

Hierbei wollen wir, da die Beobachtungen immer nur in Abständen von dem Poggendorffschen Kreis möglich sind, in denen die Schwingungsellipsen schon ziemlich gestreckte Form besitzen, es sich auch nicht um numerische Beziehungen handeln kann, Q so klein annehmen, daß die mit Q^2 multiplizierten Glieder vernachlässigt werden können; auch wollen wir, da Θ_{11} und Θ_{22} stets viel größer sind als Θ_{31} und Θ_{32}, in den Ausdrücken für $\overline{W}_o$ und $\overline{W}_e$ neben Θ_{11} und Θ_{22} die Terme $3\,Q(d_{11} + d_{22})$ vernachlässigen, die übrigens auch für die zu ziehenden Folgerungen nicht ins Gewicht fallen.

So erhalten wir statt (47)

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} a_o &= -\frac{2\,Q\,d_{31}}{n_o\,\Theta_{22}}, & b_o &= -\frac{n_o\,\Theta_{32} + 2\,Q\,d_{32}}{n_o\,\Theta_{22}}, \\ a_e &= -\frac{n_e\,\Theta_{31} - 2\,Q\,d_{31}}{n_e\,\Theta_{11}}, & b_e &= +\frac{2\,Q\,d_{32}}{n_e\,\Theta_{11}}, \end{aligned}\right.$$

und bei Einführung der Abkürzungen von (43) und zwei weiteren Bezeichnungen p_1 und p_2

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} a_o &= -\frac{p_1}{\Theta_2}, & b_o &= -\frac{P\sin i + p_2}{\Theta_2}, \\ a_e &= +\frac{P\cos i + p_1}{\Theta_2}, & b_e &= p_2. \end{aligned}\right.$$

Dies genügt bereits, um die speziell gestellte Frage zu beantworten.

Bei Vernachlässigung der kleinen Glieder p_1 und p_2 würden nach dem Früheren die Spuren der beiden zur Wellennormale Z gehörigen Strahlen in Fig. 11 die Punkte (σ_o) und (σ_e) sein. Die Korrektionen bringen eine Verschiebung in dem in der Figur angegebenen Sinne nach σ_o und σ_e hervor, ohne die Polarisationsazimute zu ändern.

Es ergibt sich daraus, daß die Stellen auf den beiden hellen Ringen, welche gleichen Azimuten entsprechen, jetzt nicht mehr einander gegenüberliegen, sondern ein wenig auseinandergerückt sind, genau wie das die Beobachtung gezeigt hat.

Nicht vorauszusagen wäre theoretisch gewesen, daß die kleine Verschiebung wahrnehmbar sein könnte; die Entdeckung derselben vor Befragung der Theorie zeigt, daß bei schwacher Doppelbrechung und starker Rotationspolarisation die Glieder d_{31} und d_{32} neben Θ_{31} und Θ_{32} merklich sein können.

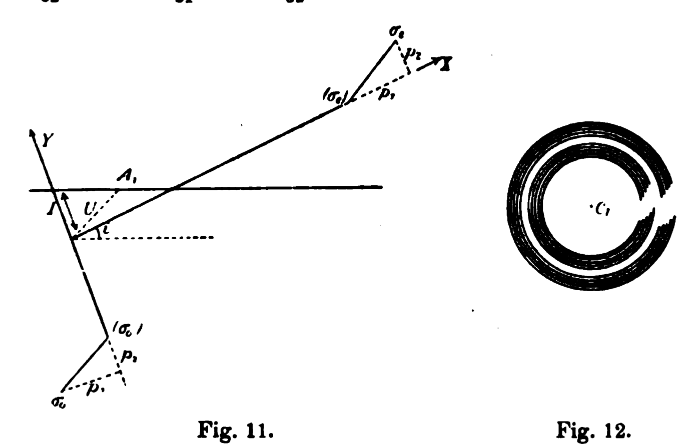


Fig. 11. Fig. 12.

Da p_1 und p_2 mit Q proportional sind, und diese Größe mit der Entfernung vom dunkeln Kreis abnimmt, so muß auch die Verschiebung im gleichen Sinne abnehmen; man erkennt, daß das *Negativ* der Erscheinung bei einfallendem lineär polarisierten Lichte nach der Theorie etwa so aussehen muß, wie Fig. 12 angibt; die Formeln scheinen also auch die beobachtete *Spiral*form der Lichterscheinung gut wiederzugeben.

Abschließend sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die Parameter d_{31} und d_{32} verschwinden, wenn die Tensoren des Tripels d_1, d_2, d_3 untereinander gleich sind, und kein rotatorischer Vektor existiert — die von Hrn. Weder verfolgte Theorie würde das beschriebene Phänomen also nicht erklären. Umgekehrt sind d_{31} und d_{32} besonders groß, wenn die d_1, d_2, d_3 verschiedene Vorzeichen haben. Die Beobachtung des entgegengesetzten Sinnes der Rotationspolarisation nach den beiden Polarisationsachsen weist darauf hin, daß dies bei Zucker stattfindet, und dieser Umstand wird bei dem Zustandekommen einer merklichen Wirkung ins Gewicht fallen.

Göttingen, September 1905.

(Eingegangen 11. Oktober 1905.)

2. *Die Verwendung von Mikrophonkontakten für telegraphische Relais und zum Nachweis schwacher Ströme;*
von Chr. Jensen und H. Sieveking.

Vor einigen Jahren wurde Jensen auf den Gedanken gebracht, das Mikrophonprinzip auf ein besonders empfindliches *telegraphisches* Relais anzuwenden und zu versuchen, ob sich nicht auch der Gedanke eines *telephonischen* Relais verwirklichen ließe.

Dabei war der erste Gesichtspunkt der, durch Anbringung von Mikrophonkontakten aus Kohle oder anderen geeigneten Materialien an einem gewöhnlichen Relais die Betätigung durch einen *sehr* schwachen Linienstromkreis zu erzielen. Es sollte nämlich der Ortsstromkreis die Kontakte dauernd durchfließen und durch die Wirkung des Linienstromes verstärkt werden infolge vermehrter Innigkeit der Mikrophonkontakte, und nicht wie bei der üblichen Form des Relais ein- und ausgeschaltet werden. Dieser Gedanke liegt nahe, wenn man die eminente Empfindlichkeit des Mikrotasimeters kennt.

Der zweite Gesichtspunkt war die Konstruktion eines telephonischen Relais durch Anbringung von Mikrophonkontakten auf der Membran des Empfängertelephons. Dadurch sollten die Schwankungen der Stromstärke im Linienstromkreis übertragen werden auf einen dauernden Ortsstromkreis und verstärkt wiedergegeben werden.

Wir mußten jedoch bald erfahren, daß diese Idee eines telephonischen Relais keineswegs neu war, daß zahlreiche Lösungen versucht, sogar manche diesbezügliche Patente namentlich in Amerika erteilt waren, daß aber fast alle Bemühungen geringen oder gar keinen praktischen Erfolg gehabt hatten, woran die Schwierigkeit des Problems an sich Schuld sein dürfte.[1]

---

1) Vgl. Lockwood, El. World. 28. p. 592—597, 626—627 u. 660 bis 661. 1896.

Hier seien erwähnt:

1. Die Versuche von M. B. Enzmann[1]), welcher zum Telegraphieren schnell aufeinanderfolgende Ströme wechselnder Richtung benutzte, um die Membran eines von ihm konstruierten Telephonrelais in Schwingungen zu versetzen und dadurch den Mikrophonkontakt beim Telephonrelais weniger[2]) innig zu machen als im Ruhezustande.

Durch die entsprechende Widerstandsvermehrung in diesem Kreis erhält der im Nebenschluß liegende Empfangsapparat einen stärkeren Ortsstrom und spricht an.

2. Das Relais von Cuttriss[3]), welches die telegraphische Übertragung undulierender Ströme durch lange überseeische Kabel gestattet.

Eine vom undulierenden Linienstrom durchflossene Drahtrolle schwingt in einem starken magnetischen Feld. Die Seele des Apparates bilden zwei in zwei sich ergänzenden Lokalstromkreisen liegende Spiralen aus äußerst feinen Kohlefäden[4]), welche die Zurückführung in die Ruhelage bewirken und beim Dehnen bez. Zusammenziehen ganz enorme Widerstandsänderungen erfahren, so daß dadurch das Ansprechen des Empfangsapparates bewirkt wird.

3. Das Relais von H. Lubliner[5]), welcher 1889 ein Patent (D.R.P. 50319) erhielt auf eine Konstruktion, bei welcher der Lokalstrom durch die Bewegung einer Magnetnadel unterbrochen oder aber regulierbar geschwächt wurde, in welch letzterem Fall der Widerstand durch Lockerung des Mikrophonkontaktes eine solche Veränderung erlitt, daß nun der im Lokalstromkreis liegende Empfänger betätigt wurde.

1) M. B. Enzmann, Lum. él. **33**. p. 326—329; Elektrotechn. Zeitschr. **10**. p. 455—456. 1889; **11**. p. 103—104. 1889; Dingl. Polytechn. Journ. **275**. p. 26; Fortschr. d. El. **3**. p. 489.

2) Vgl. D. E. Hughes, Phil. Mag. (5) **6**. p. 44—50 und A. Oberbeck, Wied. Ann. **13**. p. 224. 1881.

3) Ch. Cuttriss, Él. Rev. **31**. p. 8—9; Lum. él. **43**. p. 532; **45**. p. 78—79; Fortschr. d. El. p. 127, 326, 758. 1892.

4) Vgl. Ch. Cuttriss, Elektrotechn. Zeitschr. **13**. p. 52. 1892; Fortschr. d. Phys. **48**. I. p. 442.

5) H. Lubliner, Zeitschr. f. Instrumentenk. p. 370. 1890; Elektrotechn. Zeitschr. p. 231. 1890; Fortschr. d. El. p. 131. 1890.

4. Ein Kohlenrelais von Th. A. Edison.[1]) Bei diesem wird die Stärke des Lokalstromes regulierbar verändert durch den mit Kohle versehenen Anker eines gewöhnlichen Elektromagneten, dessen Schenkel derart ausgehöhlt sind, daß die Kohle des Ankers die in die Höhlungen der Schenkel eingelegte Kohle berührt. Selbstverständlich liegen die Windungen des Elektromagneten im Linien-, die mikrophonischen Kontakte im Ortsstromkreis. Dieses Relais soll sehr zuverlässig und sehr empfindlich gewesen sein.

Was nun unsere eigenen Versuche betrifft, so dürfte das dabei benutzte Relais von den bisher genannten wohl dem Edisonschen am nächsten stehen. Wir haben die Platinkontakte eines Relais durch Kontakte aus Bogenlampenkohle ersetzt. Es ist uns später zu Ohren gekommen, daß bereits in den achtziger Jahren von der bayrischen Telegraphenverwaltung Versuche mit einem dem unserigen ziemlich entsprechenden Relais angestellt worden sind, bei denen sich eine sehr große Empfindlichkeit herausstellte, daß aber die Verwendung an der Unmöglichkeit einer konstanten Einstellung auf eine bestimmte Ruhelage scheiterte. Wir haben uns eifrig bemüht, genaueres zu erfahren, jedoch ohne Erfolg. Die ersten Versuche, bei denen noch bei $^1/_{50}$ Milliamp. Stromstärke im Linienstromkreis ein recht sicheres Ansprechen erfolgte, fanden, wie angedeutet, in Hamburg (zusammen mit Hrn. G. Holst) statt und zwar mit einem alten Schwanenhalsrelais. Um nach Möglichkeit den Einfluß von Erschütterungen zu vermeiden, wurde das Relais auf eine dicke Gummiunterlage gestellt. Die nächsten Versuche wurden in Karlsruhe angestellt mit einem in Fig. 1 skizzierten Relais, bei welchem die Kohlenkontakte vertikal nebeneinander angebracht sind. Zum Abhalten von Erschütterungen bez. Luftströmungen kamen zunächst Gummistutzen und Glasglocke zur Verwendung. Später trat eine Aufhängung an die Stelle. Auch hier ergab die Verwendung von $^1/_{50}$ Milliampère recht sichere Resultate; die Verwendung von $^1/_{25}$ Milliampère gestattete ein vorzügliches Arbeiten, und wir glaubten, jedenfalls erst einmal die Sache weiter untersuchen zu sollen.

---

1) Th. A. Edison, Fortschr. d. El. p. 542. 1890; Off. Gaz. 52 p. 1118; Elektrotechn. Zeitschr. p. 524. 1890.

So wurden schließlich in Hamburg von uns beiden mit dem in Fig. 1 abgebildeten Karlsruher Relais, welches uns wegen der Nebeneinanderlagerung der Kohlenkontakte Vorteile gegenüber dem anderen zu bieten schien, gemeinschaftliche Untersuchungen angestellt und zwar zunächst mit einem Milliampèremeter im Lokalstromkreise, bei welchem bei den ersten Versuchen nur die Ausschläge beobachtet wurden, während hernach das Kohlenkontaktrelais vielfach nur als Zwischenrelais fungierte, indem der genügend abgelenkte Milliampèremeterzeiger einen dritten Stromkreis schloß, der eine elektrische Klingel betätigte. Die Kontakte bestanden aus Bogenlampenkohle, welche mit sehr feinem Schmirgelpapier (dem feinsten im gewöhnlichen Gebrauch befindlichen) geglättet war, da rauhe Kohle sehr unsichere Resultate gibt.

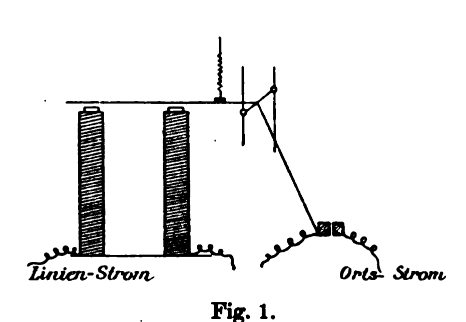


Fig. 1.

Da es sicherlich nicht ohne Interesse ist, zu wissen, was diese Methode leistet bez. nicht leistet, geben wir zunächst in möglichster Kürze ein getreues Bild der gewonnenen Erfahrungen, worauf es uns überhaupt am meisten ankommt.

Besonders günstige Resultate erhielten wir bei Verwendung eines Linienstromes von $^1/_{20}$ bis $^1/_{25}$ Milliamp. So gaben wir bei einer der ersten Versuchsreihen 900 rasch aufeinander folgende Zeichen mit dem Milliampèremeterzeiger, ohne daß inzwischen eine Regulierung des Kontaktes nötig wurde. Es darf allerdings nicht verschwiegen werden, daß der Zeiger mehrfach trotz Unterbrechung des Linienstromes nicht in die Anfangslage zurückkehrte, was dann nur durch Blasen gegen die Kontaktstelle oder aber durch Unterbrechung des Ortsstromkreises zu erreichen war.

Ein andermal ergab die Verwendung eines Linienstromes von $^1/_{150}$ Milliamp. eine Reihe recht beträchtlicher Druckänderungen, ja einmal gelang es uns sogar bei Verwendung eines Linienstromes von $^1/_{500}$ Milliamp. ein deutliches Zucken des

Zeigers zu konstatieren — in vielfach hintereinander wiederholter Beobachtung —, ja wir haben sogar einmal eine Stellung gehabt, wo der nämliche Linienstrom den Zeiger von 6 bis auf 9 Milliamp. brachte. Derartige Bedingungen gingen allerdings bald von selber verloren und waren äußerst schwer oder überhaupt gar nicht wieder zu finden, während es bei späteren Versuchen bei Verwendung von zwischen $^1/_{25}$ und $^1/_{50}$ Milliamp. liegenden Linienströmen nur nötig war, die Kontakte einmal ordentlich einzuregulieren; es war dann für Zeichengebung stundenlang keine Regulierung nötig, wenn der Apparat nicht auf unvorsichtige Weise oder des Ausprobierens wegen mit Absicht gestört wurde. So haben wir sogar sieben Tage hintereinander eine Anzahl von verschiedenen Beobachtungen (insgesamt ca. 1100) ausgeführt, ohne daß eine Neuregulierung nötig war. Es wurde entweder die Innigkeit des Kontaktes durch Variierung der Linienstromstärke verändert oder aber bei wenig verändertem Linienstromkreis die Stärke des durch die Mikrophonkontakte fließenden Stromes variiert. Am Schlusse dieses Zeitraumes wurde so gegen den Apparat gestoßen, daß eine Neuregulierung des Kontaktes nötig wurde. Diese Beobachtungen wurden bislang nicht weiter ausgewertet, weil es uns in diesem Fall in erster Linie darauf ankam, zu konstatieren, wie lange bei Vermeidung direkter Stöße der Kontakt ohne Neuregulierung in gebrauchsfähigem Zustande bleibt. Wir wollen durchaus nicht in Abrede stellen, daß der Versuch vielleicht oder sogar wahrscheinlich ganz anders ausgefallen wäre, wenn wir — jedes Anstoßen an den Apparat ausgeschlossen — die ganzen Tage hindurch unausgesetzt das Relais durch den Linienstrom betätigt hätten, so daß also lange Zeit ein relativ starker Strom durch die Kontakte geflossen wäre. Hatten wir doch bald erkannt, daß das durch die Änderung im Zustande des Kontaktes bedingte Nichtzurückgehen des Zeigers bei Unterbrechung des Linienstromes in erster Linie durch das lange Hindurchfließen des Stromes bedingt war. Das „Backen“ von Kohlekontakten bei Anwendung stärkerer Ströme ist bekannt (vgl. Elektrotechn. Zeitschr. **16.** p. 205 über das Kohlengriesmikrophon); diese Erscheinung setzte uns aber doch in Erstaunen, da es sich doch immer nur um schwache Ströme handelte. Wir hätten dann allerdings durch

passende Regulierung des Druckes und vor allem durch Verwendung einer möglichst geringen elektromotorischen Kraft im Ortsstromkreise dafür Sorge getragen, daß der Strom in diesem Kreise jedenfalls nicht über wenige Milliampère hinausging, da wir zur Genüge die schädlichen Wirkungen einer zu großen, an die Kontakte angelegten elektromotorischen Kraft kennen gelernt hatten. Natürlich vermeidet man möglichst jeden anderen Widerstand außer dem der Kontakte, wenn es einem auf möglichst große Stromschwankungen im Ortsstromkreise bei der Betätigung des Relais ankommt.

Nach Berücksichtigung des eben besprochenen schädlichen Einflusses sind unsere Versuche mehr und mehr recht ermutigend ausgefallen, und wir konnten uns der Hoffnung hingeben, daß sich mit der Zeit bei möglichster Vermeidung von Erschütterungen, bei passendem auf die Kontakte ausgeübten Anfangsdruck, bei geeigneter elektromotorischer Kraft im Ortsstromkreis auch längere Zeit hindurch ein durchaus sicheres Funktionieren des Relais mit etwa zwischen $^1/_{25}$ und $^1/_{50}$ Milliampère liegenden Linienströmen würde ermöglichen lassen. Wir verkennen dabei natürlich keineswegs, daß sich die Dinge im Experimentierzimmer ganz anders ausnehmen als in der Praxis, glauben aber immerhin, daß die Versuchsergebnisse eine Veröffentlichung rechtfertigen, welche wir auch deswegen vornehmen, um vielleicht weitere Versuche in dieser Richtung zu veranlassen.

Zur Vermeidung bez. Einschränkung der Erschütterungen verwandten wir zunächst der Einfachheit halber eine gewöhnliche Aufhängung, indem ein Holzbrett von 30×30 cm Flächenausdehnung, auf welchem das Relais stand, mit vier Schnüren, von denen je zwei konvergierten, an einem bei der Zimmerdecke vorbeigeführten steifen Leitungsdraht befestigt war, wobei der senkrechte Abstand des Brettes von der Decke ungefähr 3 m betrug. Die am Relais befestigten Stromzuführungsdrähte tauchten in Quecksilber, so daß die Aufhängung frei pendeln konnte in kleinen Grenzen und keine Erschütterungen übertragen werden konnten.

Bei den Versuchen, deren Ergebnisse die Tabb. I, II u. III p. 702—707 zeigen, haben wir dafür gesorgt, daß nicht gar zu starke und zu lange andauernde Ströme durch die Kontakte

flossen, wenn auch die angewandten Ströme noch immer um ein Beträchtliches größer waren, als sie etwa nötig sein würden, um mit Hilfe dieses ersten Ortsstromes ein zweites, weniger empfindliches Relais zu schließen. Jedenfalls aber ist es bei allen diesen Messungen weder nötig gewesen, den Kontakt nachzuregulieren, noch den Nebenstrom auf Momente auszuschalten oder gegen die Kontaktstelle zu blasen. Trotzdem haben hier die Widerstände bei Betätigung mit der nämlichen Linienstromstärke nicht während einer ganzen Versuchsreihe den nämlichen Wert behalten, indes war eine stetige Änderung derselben nicht zu konstatieren. Jede der drei Tabellen entspricht einer Versuchsreihe; vor jeder derselben wurde reguliert, um mit verschiedenen Anfangswiderständen zu arbeiten. Sonst aber waren, abgesehen davon, daß bei den Tabb. I u. II entsprechenden Beobachtungen die erwähnte Aufhängung benutzt wurde, wogegen bei den übrigen Versuchen das Relais direkt auf dem Tische stand, die Versuchsbedingungen (elektromotorische Kraft im Ortsstromkreise etc.) die nämlichen. Die Reihenfolge der einzelnen Versuche einer Beobachtungsreihe geschah in der Weise, daß das Relais zunächst mit dem stärksten und darauf durch stufenweises Einschalten von 1000, 2000, 3000 ... etc. bis 10000 Ω mit immer schwächer werdenden Linienströmen betätigt wurde; diese Reihenfolge wurde im ganzen zehnmal wiederholt. Die im Linienstromkreis angewandte elektromotorische Kraft belief sich auf 0,2 Volt, so daß die Stromstärken der Reihe nach annähernd $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^1/_{15}$, $^1/_{20}$, $^1/_{25}$, $^1/_{30}$, $^1/_{35}$, $^1/_{40}$, $^1/_{45}$ und $^1/_{50}$ Milliamp. betrugen, annähernd, weil der nachher bestimmte Widerstand der Relaisspule (im Betrag von 185 Ω) noch in Rechnung zu ziehen ist.

Um ein anschauliches Bild von der Sicherheit der einzelnen Einstellungen zu gewinnen, haben wir bei den einzelnen in den Tabellen I, II und III mitgeteilten Versuchsreihen die Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert genommen. Dies wiederholt sich bei jeder Reihe zehnmal. Aus diesen zehn Werten ist der Durchschnittswert genommen und ebenso aus den zehn Mittelwerten. Schließlich ist das Verhältnis genannter Durchschnittswerte zueinander prozentisch angegeben worden. Die so gewonnenen Zahlen werden in der Tab. IV als Schwankungsgröße bezeichnet.

Tabelle I (mit Aufhängung).

Nr.	Widerstand bei 1185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 2185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 3185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 4185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 5185 Ω im Linienstromkreis	
	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais
I	44,6	20,0	47,0	32,7	47,0	35,5	45,8	36,2	47,0	35,5
II	44,6	20,0	45,8	27,8	48,3	36,2	47,0	37,8	47,0	37,8
III	42,4	18,0	42,4	24,8	48,5	30,9	39,6	29,8	47,0	36,2
IV	41,4	18,0	41,4	23,7	42,4	29,8	40,5	28,2	43,5	32,1
V	39,6	16,0	39,6	22,3	41,4	26,4	41,4	29,8	41,4	33,4
VI	39,6	17,4	38,7	21,7	39,6	27,8	42,4	31,5	40,5	30,9
VII	42,4	18,3	42,4	25,6	42,4	27,8	43,5	32,1	43,5	34,0
VIII	39,6	18,7	40,5	22,0	38,7	25,6	42,4	27,3	42,4	29,3
IX	44,6	18,3	44,6	21,4	45,8	30,3	45,8	34,0	45,8	36;2
X	44,6	19,7	44,6	26,4	44,6	30,3	44,6	33,4	47,0	34,7
Σ =	423,4	184,4	427,0	248,4	438,7	300,6	433,0	320,1	445,1	340,1
M =	42,34	18,44	42,70	24,84	43,87	30,06	43,30	32,01	44,51	34,01

Tabelle I (Fortsetzung).

Nr.	Widerstand bei 6185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 7185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 8185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 9185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 10185 Ω im Linienstromkreis	
	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais
I	47,0	37,0	47,0	37,0	44,6	36,2	44,6	38,7	44,6	37,8
II	47,0	37,8	47,0	32,8	45,8	37,0	45,8	37,8	44,6	37,8
III	41,4	33,4	41,4	33,4	43,5	37,0	43,5	37,8	44,6	39,6
IV	43,5	33,4	38,7	30,9	40,5	33,4	41,4	34,8	42,4	36,2
V	41,4	34,0	42,4	34,7	42,4	35,5	41,4	36,2	43,5	34,7
VI	41,4	32,7	42,4	34,0	42,4	35,5	42,4	35,5	42,4	36,2
VII	44,6	35,5	44,6	35,5	42,4	34,0	35,5	28,8	35,5	30,8
VIII	42,4	32,7	38,7	32,7	44,6	36,2	44,6	36,2	42,4	35,5
IX	47,0	37,0	47,0	37,8	47,0	38,7	42,4	35,5	42,4	36,2
X	47,0	36,2	47,0	37,0	45,8	38,7	45,8	37,8	44,6	37,8
Σ =	442,7	349,7	436,2	345,8	439,0	362,2	427,4	359,1	427,0	362,1
M =	44,27	34,97	43,62	34,58	43,90	36,22	42,74	35,91	42,70	36,21

Tabelle III (ohne Aufhängung).

Nr.	Widerstand bei 1185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 2185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 3185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 4185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 5185 Ω im Linienstromkreis	
	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais
I	87,8	46,9	87,8	57,5	92,1	71,0	92,1	76,9	88,9	75,3
II	92,1	48,2	87,8	59,4	80,2	55,7	83,8	63,5	87,8	71,0
III	96,9	41,3	96,9	59,4	102,1	68,3	108,0	76,9	108,0	76,9
IV	121,9	45,7	121,9	68,3	121,9	80,2	130,2	92,1	130,2	96,9
V	114,5	43,4	114,5	65,9	121,9	76,9	130,2	87,8	130,2	96,9
VI	163,6	45,7	163,6	76,9	163,6	92,1	163,6	102,1	163,6	114,5
VII	196,9	49,5	196,9	80,2	196,9	102,1	246,9	114,5	282,6	130,2
VIII	108,0	42,3	121,9	65,9	130,2	80,2	150,6	96,9	163,6	108,0
IX	178,7	48,2	282,6	71,0	246,9	73,8	282,6	102,1	282,6	130,2
X	198,6	42,1	196,9	71,0	139,7	80,2	145,0	92,1	150,6	101,2
$\Sigma =$	1359,0	453,3	1470,8	675,5	1395,5	780,5	1533,0	904,9	1588,1	1002,0
$M =$	135,90	45,33	147,08	67,55	139,55	78,05	153,30	90,49	158,81	100,20

Tabelle III (Fortsetzung).

Nr.	Widerstand bei 6185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 7185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 8185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 9185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 10185 Ω im Linienstromkreis	
	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais
I	94,5	83,8	92,1	83,8	83,8	75,3	87,8	80,2	87,8	80,2
II	92,1	76,9	89,9	76,9	92,1	80,2	96,9	88,8	96,9	87,8
III	108,0	89,9	111,1	94,4	114,5	96,9	114,5	99,4	114,5	102,1
IV	130,2	102,1	134,8	108,0	130,2	108,0	139,7	114,5	108,0	96,9
V	139,7	105,0	139,7	111,1	138,7	114,5	145,0	118,1	145,0	125,9
VI	170,8	118,2	178,7	130,2	178,7	139,7	178,7	144,0	178,7	148,4
VII	282,6	139,7	282,6	150,6	282,6	163,6	282,6	170,8	330,2	178,7
VIII	219,1	130,2	246,9	150,6	163,6	121,9	163,6	121,9	219,1	170,8
IX	246,9	150,6	246,9	163,6	246,9	178,7	246,9	178,7	246,9	196,9
X	163,6	114,5	178,7	121,9	196,9	139,7	246,9	163,6	282,6	196,9
$\Sigma =$	1647,5	1110,9	1701,4	1191,1	1629,0	1218,5	1702,6	1275,0	1809,7	1384,6
$M =$	164,75	111,09	170,14	119,11	162,90	121,85	170,26	127,50	180,97	138,46

Tabelle I (mit Aufhängung).

Nr.	Widerstand bei 1185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 2185 Ω im Linienstromkreis		**Widerstand bei 3185 Ω im Linienstromkreis**		**Widerstand bei 4185 Ω im Linienstromkreis**		**Widerstand bei 5185 Ω im Linienstromkreis**	
	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	**Vor Betätigung des Relais**	**Nach Betätigung des Relais**	**Vor Betätigung des Relais**	**Nach Betätigung des Relais**	**Vor Betätigung des Relais**	**Nach Betätigung des Relais**
I	44,6	20,0	47,0	32,7	47,0	35,5	45,8	36,2	47,0	35,5
II	44,6	20,0	45,8	27,8	48,3	36,2	47,0	37,8	47,0	37,8
III	42,4	18,0	42,4	24,8	43,5	30,9	39,6	29,8	47,0	36,2
IV	41,4	18,0	41,4	23,7	42,4	29,8	40,5	28,2	43,5	32,1
V	39,6	16,0	39,6	22,3	41,4	26,4	41,4	29,8	41,4	33,4
VI	39,6	17,4	38,7	21,7	39,6	27,8	42,4	31,5	40,5	30,9
VII	42,4	18,3	42,4	25,6	42,4	27,8	43,5	32,1	43,5	34,0
VIII	39,6	18,7	40,5	22,0	38,7	25,6	42,4	27,3	42,4	29,3
IX	44,6	18,3	44,6	21,4	45,8	30,3	45,8	34,0	45,8	36;2
X	44,6	19,7	44,6	26,4	44,6	30,3	44,6	33,4	47,0	34,7
Σ =	423,4	184,4	427,0	248,4	433,7	300,6	433,0	320,1	445,1	340,1
M =	42,34	18,44	42,70	24,84	43,37	30,06	43,30	32,01	44,51	34,01

Tabelle I (Fortsetzung).

Nr.	Widerstand bei 6185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 7185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 8185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 9185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 10185 Ω im Linienstromkreis	
	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais
I	47,0	37,0	47,0	37,0	44,6	36,2	44,6	38,7	44,6	37,8
II	47,0	37,8	47,0	32,8	45,8	37,0	45,8	37,8	44,6	37,8
III	41,4	33,4	41,4	33,4	43,5	37,0	43,5	37,8	44,6	39,6
IV	43,5	33,4	38,7	30,9	40,5	33,4	41,4	34,8	42,4	36,2
V	41,4	34,0	42,4	34,7	42,4	35,5	41,4	36,2	43,5	34,7
VI	41,4	32,7	42,4	34,0	42,4	35,5	42,4	35,5	42,4	36,2
VII	44,6	35,5	44,6	35,5	42,4	34,0	35,5	28,8	35,5	30,3
VIII	42,4	32,7	38,7	32,7	44,6	36,2	44,6	36,2	42,4	35,5
IX	47,0	37,0	47,0	37,8	47,0	38,7	42,4	35,5	42,4	36,2
X	47,0	36,2	47,0	37,0	45,8	38,7	45,8	37,8	44,6	37,8
Σ =	442,7	349,7	436,2	345,8	439,0	362,2	427,4	359,1	427,0	362,1
M =	44,27	34,97	43,62	34,58	43,90	36,22	42,74	35,91	42,70	36,21

Tabelle II (mit Aufhängung).

Nr.	Widerstand bei 1185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 2185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 3185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 4185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 5185 Ω im Linienstromkreis	
	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais
I	330,3	33,4	397,0	41,4	397,0	49,6	997,0	59,2	997,0	80,3
II	397,0	42,7	397,0	42,4	397,0	54,1	487,0	63,7	663,7	92,2
III	497,0	31,5	497,0	39,6	497,0	51,0	497,0	72,2	397,0	102,3
IV	497,0	30,3	497,0	43,5	497,0	52,6	497,0	97,0	497,0	108,1
V	497,0	28,2	497,0	35,5	497,0	77,0	497,0	84,0	497,0	92,2
VI	497,0	26,4	497,0	34,7	497,0	73,9	497,0	87,9	497,0	102,3
VII	497,0	25,6	497,0	33,4	497,0	77,0	497,0	87,9	497,0	102,3
VIII	497,0	26,4	663,7	35,5	663,7	73,9	663,7	87,9	663,7	97,0
IX	663,7	26,9	663,7	34,7	663,7	80,3	663,7	87,9	663,7	97,0
X	663,7	27,3	663,7	34,7	663,7	80,3	663,7	92,2	663,7	102,2
Σ =	5036,7	298,7	5270,1	375,4	5270,1	669,7	5960,1	819,9	6036,8	975,9
M =	503,67	29,87	527,01	37,54	527,01	66,97	596,01	81,99	603,68	97,59

Tabelle II (Fortsetzung).

Nr.	Widerstand bei 6185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 7185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 8185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 9185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 10185 Ω im Linienstromkreis	
	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais
I	797,0	102,3	797,0	108,1	797,0	119,8	797,0	119,8	797,0	130,3
II	397,0	108,1	497,0	114,6	330,3	119,8	397,0	119,8	330,3	130,0
III	497,0	108,1	497,0	114,6	497,0	119,8	397,0	130,3	282,7	130,3
IV	397,0	119,8	397,0	130,3	497,0	130,3	397,0	139,9	397,0	139,9
V	497,0	102,3	397,0	108,1	330,3	114,6	397,0	130,3	397,0	130,3
VI	497,0	108,1	497,0	114,6	397,0	114,6	397,0	114,6	282,7	114,6
VII	497,0	114,6	497,0	114,6	497,0	119,8	497,0	119,8	497,0	119,8
VIII	997,0	108,1	997,0	114,6	997,0	109,8	497,0	119,8	497,0	119,8
IX	663,7	102,3	663,7	114,6	663,7	114,6	497,0	114,6	497,0	119,8
X	663,7	114,6	663,7	119,8	663,7	126,1	663,7	130,3	663,7	139,9
Σ =	5903,4	1088,3	5903,4	1158,9	5670,0	1189,2	4986,7	1239,2	4641,4	1274,7
M =	590,34	108,83	590,34	115,39	567,00	118,92	493,67	123,92	464,14	127,47

Tabelle III (ohne Aufhängung).

Nr.	Widerstand bei 1185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 2185 Ω im Linienstromkreis		**Widerstand bei 3185 Ω im Linienstromkreis**		**Widerstand bei 4185 Ω im Linienstromkreis**		**Widerstand bei 5185 Ω im Linienstromkreis**	
	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	**Vor Betätigung des Relais**	**Nach Betätigung des Relais**	**Vor Betätigung des Relais**	**Nach Betätigung des Relais**	**Vor Betätigung des Relais**	**Nach Betätigung des Relais**
I	87,8	46,9	87,8	57,5	**92,1**	**71,0**	**92,1**	**76,9**	**88,9**	**75,8**
II	92,1	48,2	87,8	59,4	**80,2**	**55,7**	**88,8**	**68,5**	**87,8**	**71,0**
III	96,9	41,3	96,9	59,4	**102,1**	**68,8**	**108,0**	**76,9**	**108,0**	**76,9**
IV	121,9	45,7	121,9	68,3	**121,9**	**80,2**	**130,2**	**92,1**	**130,2**	**96,9**
V	114,5	43,4	114,5	65,9	**121,9**	**76,9**	**130,2**	**87,8**	**130,2**	**96,9**
VI	163,6	45,7	163,6	76,9	**163,6**	**92,1**	**163,6**	**102,1**	**163,6**	**114,5**
VII	196,9	49,5	196,9	80,2	**196,9**	**102,1**	**246,9**	**114,5**	**282,6**	**130,2**
VIII	108,0	42,3	121,9	65,9	**130,2**	**80,2**	**150,6**	**96,9**	**163,6**	**108,0**
IX	178,7	48,2	282,6	71,0	**246,9**	**73,8**	**282,6**	**102,1**	**282,6**	**130,2**
X	198,6	42,1	196,9	71,0	**139,7**	**80,2**	**145,0**	**92,1**	**150,6**	**101,2**
Σ =	1359,0	453,3	1470,8	675,5	**1395,5**	**780,5**	**1533,0**	**904,9**	**1588,1**	**1002,0**
M =	135,90	45,33	147,08	67,55	**139,55**	**78,05**	**153,30**	**90,49**	**158,81**	**100,20**

Tabelle III (Fortsetzung).

Nr.	Widerstand bei 6185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 7185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 8185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 9185 Ω im Linienstromkreis		Widerstand bei 10185 Ω im Linienstromkreis	
	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais	Vor Betätigung des Relais	Nach Betätigung des Relais
I	94,5	83,8	92,1	83,8	83,8	75,3	87,8	80,2	87,8	80,2
II	92,1	76,9	89,9	76,9	92,1	80,2	96,9	83,8	96,9	87,8
III	108,0	89,9	111,1	94,4	114,5	96,9	114,5	99,4	114,5	102,1
IV	130,2	102,1	134,8	108,0	130,2	108,0	139,7	114,5	108,0	96,9
V	139,7	105,0	139,7	111,1	138,7	114,5	145,0	118,1	145,0	125,9
VI	170,8	118,2	178,7	130,2	178,7	139,7	178,7	144,0	178,7	148,4
VII	282,6	139,7	282,6	150,6	282,6	163,6	282,6	170,8	330,2	178,7
VIII	219,1	130,2	246,9	150,6	163,6	121,9	163,6	121,9	219,1	170,8
IX	246,9	150,6	246,9	163,6	246,9	178,7	246,9	178,7	246,9	196,9
X	163,6	114,5	178,7	121,9	196,9	139,7	246,9	163,6	282,6	196,9
Σ =	1647,5	1110,9	1701,4	1191,1	1629,0	1218,5	1702,6	1275,0	1809,7	1384,6
M =	164,75	111,09	170,14	119,11	162,90	121,85	170,26	127,50	180,97	138,46



Tabelle IV.

a.

Widerstand im Linienstromkreis	Mittel der Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert	Mittelwert vor Betätigung
∞	1,83 Ω	42,34 Ω
∞	2,24	42,70
∞	2,47	43,37
∞	2,04	43,30
∞	2,25	44,51
∞	2,25	44,27
∞	2,90	43,62
∞	1,66	43,90
∞	2,12	42,74
∞	1,68	42,70
	Σ = 21,44 Ω	433,45 Ω
	M = 2,14	43,34

Schwankungsgröße = 4,9 %

b.

Widerstand im Linienstromkreis	Mittel der Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert	Mittelwert vor Betätigung
∞	64,01 Ω	503,67 Ω
∞	82,01	527,01
∞	82,01	527,01
∞	120,81	596,01
∞	126,68	603,68
∞	152,01	590,34
∞	152,01	590,34
∞	170,03	567,00
∞	96,67	493,67
∞	126,20	464,14
	Σ = 1172,45 Ω	5462,87 Ω
	M = 117,24	546,29

Schwankungsgröße = 21,4 %

c.

Widerstand im Linienstromkreis	Mittel der Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert	Mittelwert vor Betätigung
∞	38,84 Ω	185,89 Ω
∞	50,33	147,08
∞	37,78	139,54
∞	46,63	153,30
∞	51,43	158,79
∞	52,07	164,74
∞	56,62	170,14
∞	50,83	162,90
∞	54,80	170,26
∞	70,97	180,98
	Σ = 510,28 Ω	1583,63 Ω
	M = 51,03	158,36

Schwankungsgröße = 32,2 %

d.

Widerstand im Linienstromkreis	Mittel der Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert	Mittelwert nach Betätigung
1185 Ω	0,93 Ω	18,44 Ω
2185	2,63	24,84
3185	2,58	30,06
4185	2,69	32,01
5185	2,07	34,01
6185	1,73	34,97
7185	1,82	34,58
8185	1,30	36,22
9185	1,81	35,91
10185	1,63	36,21
	Σ = 19,19 Ω	317,25 Ω
	M = 1,92	31,72

Schwankungsgröße = 6,1 %

Zu Tab. I (mit Aufhängung)

e.

Widerstand im Linienstromkreis	Mittel der Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert	Mittelwert nach Betätigung
1185 Ω	3,68 Ω	29,87 Ω
2185	3,35	37,54
3185	12,12	66,97
4185	10,17	81,99
5185	5,85	97,59
6185	4,50	108,83
7185	3,86	115,39
8185	4,47	118,92
9185	7,02	123,92
10185	7,18	127,47
	Σ = 62,15 Ω	908,49 Ω
	M = 6,22	90,85

Schwankungsgröße = 6,8 %

Zu Tab. II (mit Aufhängung)

f.

Widerstand im Linienstromkreis	Mittel der Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert	Mittelwert nach Betätigung	Schwankungsgröße
1185 Ω	2,42 Ω	45,32 Ω	5,34 %
2185	5,94	67,53	8,97
3185	8,92	78,05	11,42
4185	11,37	90,50	12,56
5185	16,81	100,20	16,77
6185	19,55	111,09	17,59
7185	24,47	119,10	20,54
8185	26,68	121,85	21,89
9185	29,41	127,51	23,06
10185	39,87	138,47	28,79
	Σ = 185,44 Ω	999,62 Ω	
	M = 18,54	99,96	

Schwankungsgröße = 18,5 %

Zu Tab. III (ohne Aufhängung)

Wir ersehen nun aus Tab. IV, daß unter sonst gleichen Bedingungen offenbar die Schwankungen im allgemeinen um so größer ausfallen, je größer der durchschnittliche Übergangswiderstand an der Kontaktstelle ist, je geringer also der auf die Kontaktstelle ausgeübte Druck ist. Von diesen Gesichtspunkten allein betrachtet müßte man allerdings erwarten, daß bei dem bedeutend größeren Durchschnittswert von 546,29 Ω die Schwankungsgröße erheblich die dem Durchschnittswerte von 158,36 Ω entsprechende überragte, während das Gegenteil der Fall ist. Verständlich wird dieser scheinbare Widerspruch erst, wenn man bedenkt, daß in dem einen Fall eine Aufhängung zur Vermeidung bez. Herabminderung der störenden Wirkungen von Erschütterungen angewandt wurde, im anderen dagegen nicht. Den außerordentlich günstigen Einfluß der einfachen Aufhängung ersieht man auch bei Vergleichung von *e* und *f* der Tab. IV, wo in beiden Fällen ein nahezu gleicher durchschnittlicher Widerstand herrschte, dagegen die Schwankungsgrößen erheblich (6,8 und 18,5 Proz.) voneinander abweichen. Ist nun die Schwankungsgröße im vorher angegebenen Sinne wesentlich abhängig vom durchschnittlichen Übergangswiderstand, so müßte diese Beziehung auch klar hervortreten bei Verwendung verschieden großer Widerstände im Linienstromkreis, da — die elektromotorische Kraft ist überall die nämliche — mit zunehmender Größe des Widerstandes die Stromstärke und damit auch der auf die Kontakte ausgeübte Druck abnimmt.

In *f* der Tab. IV tritt es tatsächlich sehr klar hervor, daß die Schwankungsgröße zunimmt mit abnehmender Stromstärke im Linienstromkreis. Für *d* und *e* sind die Prozentziffern nicht erst berechnet worden, weil es von vornherein zu ersehen war, daß die besprochene Beziehung jedenfalls nicht sehr klar hervortreten würde, was damit zusammenhängen kann, daß die Schwankungen überhaupt nicht so groß sind wie bei *f*. Andererseits ist nicht zu vergessen, daß der Unterschied jedenfalls zum Teil auch darin begründet sein kann, daß sich auffälligerweise bei *d* und *e* ein Wechsel in der Größe der störenden Einflüsse stärker geltend gemacht hat als bei *f*. Im allgemeinen darf man vielleicht annehmen, daß, wenn man viel von zufälligen Störungen abhängig ist, Gesetz-

mäßigkeiten besser zutage treten werden, wenn man Durchschnittswerte größerer Beobachtungsreihen miteinander vergleicht, als wenn man die Vergleichung vornimmt zwischen mehreren zu einer und derselben größeren Beobachtungsreihe gehörenden Durchschnittswerten. Genügend zu erkennen ist aber, daß Mikrophonkontakte zufälligen Widerstandsschwankungen um so mehr ausgesetzt sind, je größer der ursprüngliche Übergangswiderstand ist, und ebenso klar ist zu erkennen, wie sehr schon eine ganz einfache Aufhängung geeignet ist, die störende Wirkung von Erschütterungen herabzumindern.

Für die Prüfung der Sicherheit im Funktionieren des Relais wird man nun vor allem darauf zu achten haben, ob die Schwankungen so groß werden, daß die Wirkung des auf die Kontakte durch Vermittelung von Linienströmen verschiedener Stärke ausgeübten Druckes dadurch verdeckt werden kann. Diese Gefahr wird selbstverständlich um so größer, je kleiner die angewandten Linienströme sind, weil die von diesen auf die Kontakte ausgeübte Wirkung eine relativ geringe ist. Daß die auf die Kontakte ausgeübte Druckwirkung um so stärker ist, je größer der Linienstrom ist, zeigt sich sehr deutlich, wenn man in Tab. I die Differenzen zwischen den den verschiedenen im Linienstromkreise liegenden Widerständen entsprechenden Durchschnittswerten bildet. Man findet der Reihe nach (in Ω):

I.	23,90	17,86	13,31	11,29	10,50
	9,30	9,04	7,68	6,83	6,49.

Die entsprechenden aus Tab. II und Tab. III gewonnenen Werte sind:

II.	473,80	489,47	460,04	514,02	506,09
	481,51	474,95	448,08	369,75	336,67

und

III.	90,57	79,53	61,50	62,81	58,61
	53,66	51,03	41,05	42,76	42,51.

Die Tendenz einer Abnahme der Widerstandsdifferenz mit abnehmender Linienstromstärke, welche in der ersten Zahlenreihe deutlich ausgesprochen ist, ist durchaus auch in den zwei folgenden Zahlenreihen zu erkennen, jedoch ist die Regelmäßigkeit in dem Gang der Zahlen zum Teil sehr zu ver-

missen. Der Grund für dies verschiedene Verhalten liegt offenbar in der sehr verschiedenen Größe des ursprünglichen, vor Betätigung des Linienstromes vorhandenen Übergangswiderstandes. Nach Betätigung des Relais ist bei allen drei Tabellen (I, II und III) der Übergangswiderstand ein relativ geringer, so daß die durch Störungen bewirkten Schwankungen bez. die durch die Verschiedenheit der angewandten Linienstromstärke bedingte Verschiedenheit in der Größe dieses Widerstandes verhältnismäßig gering ist. Ist nämlich der auf Mikrophonkontakte ausgeübte Druck ein relativ starker, so daß also der Übergangswiderstand entsprechend gering ist, so ändert sich bei zunehmendem Druck, wie es u. a. auch Bidwell[1]) gezeigt hat, der Übergangswiderstand nur noch wenig, und zwar um so weniger, je niedriger der Widerstand schon ist. Vor Betätigung des Linienstromes ist nun der Widerstand an den Kohlekontakten bei Tab. I ein relativ geringer, so daß die durch Erschütterungen bedingten Druckschwankungen wenig ausmachen; bei den Tabb. II und III dagegen ist der vor Betätigung des Relais herrschende Kontaktwiderstand sehr hoch und die durch Erschütterungen bedingten Druckschwankungen sind selbst bei Verwendung der Aufhängung recht beträchtlich, so daß dieselben den Gang der im allgemeinen mit zunehmender Linienstromstärke regelmäßig wachsenden Differenzen zum Teil erheblich stören.

Die verschiedene Wirkung der verschieden starken Linienströme kommt in ihrer Tendenz übrigens in Tab. I nicht nur zum Ausdruck, wenn man die Differenzen bildet zwischen den Durchschnittswerten, sondern auch schon durch Bildung der Differenzen zwischen den in je zwei Vertikalreihen vorkommenden Extremen. Subtrahiert man die Maxima der Widerstandswerte, welche man vor Betätigung und bei Betätigung des Linienstromes findet, so erhält man entsprechend den verschieden großen eingeschalteten Widerständen folgende Differenzwerte:

24,6 14,3 12,1 9,2 9,2 9,2 9,2 8,3 7,1 5,0.

Die Differenz aus Maximum und Minimum ergibt entsprechend:

28,6 25,6 22,7 19,7 17,7 14,3 16,1 13,6 17,0 14,3.

1) S. Bidwell, Proc. of the Roy. Soc. of London 35. p. 2. 1883.

Die entsprechenden Differenzen aus Minimum und Minimum sind:

23,6 17,3 13,1 12,3 11,2 8,7 7,8 7,1 6,7 5,2

und bilden wir schließlich die Differenzen aus Minimum (vor Betätigung des Linienstromes) und Maximum (nach Einschaltung des Linienstromes), so finden wir:

+19,3 +6,0 +2,5 +1,8 +2,7 +3,6 +0,9 +1,8 −3,2 −4,1.

Die auf diese Weise gebildeten Differenzen sind nun besonders instruktiv zur Beurteilung der Sicherheit des Betriebes. Es ist ohne weiteres klar, daß die Gefahr, daß das Minimum vor Einschaltung des Linienstromes und das Maximum der nach Einschaltung desselben vorhandenen Kontaktwiderstände sich einander zu sehr nähern, im allgemeinen um so größer werden wird, je geringer der angewandte Linienstrom ist, je näher die Durchschnittswerte der vor Betätigung des Relais und nach Einschaltung des Linienstromes vorhandenen Kontaktwiderstände einander stehen und je mehr der Kontakt in beiden Fällen unvorhergesehenen Störungen ausgesetzt ist. Die vorhergehende Reihe zeigt deutlich genug die Tendenz der mit abnehmender Linienstromstärke Hand in Hand gehenden Abnahme besagter Differenzen. Schließlich werden dieselben sogar negativ, d. h. das Minimum vor Betätigung des Relais wird kleiner als das Maximum nach Einschaltung des Linienstromes. Würde man nun die Einschaltung einer Stromquelle an der Aufgabestation nur aus der absoluten Stellung des Stromanzeigers im Ortsstromkreis der Empfangsstation beurteilen, so würde die Verwendung relativ kleiner Linienströme bei ähnlichen Verhältnissen, wie sie eben besprochen sind, zu großen Irrtümern Veranlassung geben können, wogegen unter diesen Verhältnissen auch bei Verwendung der kleinsten Linienstromstärke (10185 Ω) ein Irrtum ausgeschlossen erscheint, falls man nur auf momentane Stromänderungen achten würde. Es erscheint nun wertvoll, auch Tabb. II und III in bezug auf den eben vorher ventilierten Gesichtspunkt anzusehen. Bilden wir für Tab. II die Differenzen zwischen besagtem Minimum und Maximum, so erhalten wir folgende Reihe:

+287,6 +353,5 +316,7 +404,8 +288,9
+277,2 +266,7 +200,0 +266,7 +142,8.

Die entsprechenden Zahlen für Tab. III sind:

+38,3	+ 7,6	−21,9	−30,7	− 42,4.
58,5	−73,7	−94,9	−90,9	−109,1.

Aus diesen und den vorhergehenden Zahlen ergibt sich, daß es für die Sicherheit des Funktionierens am günstigsten ist, wenn der Anfangsdruck möglichst klein ist. Allerdings sind dann die Kontakte vor Betätigung des Relais besonders starken unvorhergesehenen Störungen ausgesetzt, aber, wie ersichtlich, machen die hierdurch veranlaßten Widerstandsschwankungen nicht so viel aus, daß dadurch die in Frage kommende Wirkung auch der kleineren Linienströme (0,2 Volt Spannung und 10185 Ω Widerstand) verdeckt werden könnte. Allerdings sind unsere Untersuchungen, was nicht genug betont werden kann, keineswegs als abschließend zu betrachten, sondern sollen nur den Weg für etwaige weitere Untersuchungen zeigen, weswegen es auch künftigen, eingehenderen Untersuchungen vorbehalten bleiben muß, für ganz bestimmte Relaisanordnungen bez. Kontaktmaterialien das in Frage stehende Optimum zu bestimmen.

Bei der hier vorhandenen günstigen Einstellung markiert sich, was die Sicherheit der Zeichengebung betrifft, allerdings eine verschiedene Wirkung der verschieden großen Linienstromstärken in bezug auf den Unterschied im Mikrophonwiderstand vor und nach Betätigung des Relais sehr gering. Dafür zeigt sich aber eine andere Tatsache, die gewiß nicht belanglos ist. Trägt man nämlich die angewandten Linienstromstärken (oder da die angelegte Spannung immer die nämliche ist, einfach die in Ohm angegebenen Widerstände im Linienstromkreis) als Abszissen und die entsprechenden durchschnittlichen in Ohm angegebenen Mikrophonwiderstände bei Betätigung des Relais als Ordinaten auf, so erkennt man unschwer aus der so entstandenen Kurve (Fig. 2), daß noch ganz erheblich kleinere Linienstromstärken als solche von $^1/_{50}$ Milliamp. sich durch eine für die Sicherheit der Zeichengebung genügende Abnahme des vor Betätigung des Relais bestehenden Übergangswiderstandes markieren würden. Während also beim gewöhnlichen Mikrophon, wo es auf eine möglichst gute Anlehnung an die Stärke der einzelnen Schallschwingungen ankommt, ein zu

hoher ursprünglicher Übergangswiderstand vom Übel ist, scheint ein möglichst hoher ursprünglicher Übergangswiderstand (von mindestens 100 Ω) vorteilhaft zu sein, wenn man mit möglichst schwachen Strömen telegraphische Zeichen geben will. Selbstverständlich würde es eingehendster Prüfung bedürfen, um die günstigsten Bedingungen ausfindig zu machen.

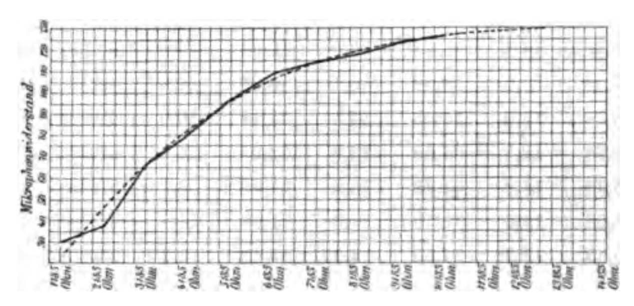


Fig. 2. Widerstände im Linienstromkreis. Die elektromotorische Kraft betrug in jedem Falle 0,2 Volt.

Hat man nun einmal die Kontakte so geregelt, daß einem der Mikrophonwiderstand vor Betätigung des Relais genügend hoch erscheint, so muß man sich davor hüten, hiernach die elektromotorische Kraft im Nebenstromkreis zu verstärken, weil der Widerstand zwischen zwei mit geringem Druck gegeneinander liegenden Mikrophonkontakten stark bei zunehmender Stromstärke abnimmt. Eine Abnahme des Mikrophonwiderstandes bei steigendem, die Kontakte durchfließendem Strom wurde für Gleichstrom sowohl von Bidwell[1]) als auch von Nebel[2]) gefunden. Mousson[3]) gibt allerdings an, daß beim Mikrophonkontakt einer Stromzunahme eine Widerstandsverminderung entspreche. Wie aber Nebel gezeigt hat, rührt dies Resultat aller Wahrscheinlichkeit nach daher, daß Mousson bei seinen Untersuchungen ein Mikrophon benutzte, bei dem leicht während der Messung eine Verlagerung der Kontakte stattfand. Tatsächlich bedingt jedenfalls bei Kohlekontakten

1) S. Bidwell, Proc. of the Roy. Soc. of London **35.** p. 1—18. 1883; Fortschr. d. Physik **39.** p. 659—660.

2) B. Nebel, Centralbl. f. Elektrotechn. **12.** p. 254—257. 1889.

3) A. Mousson, Die Physik auf Grundlage der Erfahrung, 3. Aufl., vol. III². p. 788. 1884.

Tabelle

Stromstärke im Ortsstromkreis in Milliampère	Mikrophonwiderstand im Ortsstromkreis in Ω	Stromstärke im Ortsstromkreis in Milliampère	Mikrophonwiderstand im Ortsstromkreis in Ω	Stromstärke im Ortsstromkreis in Milliampère	Mikrophonwiderstand im Ortsstromkreis in Ω	Stromstärke im Ortsstromkreis in Milliampère	Mikrophonwiderstand im Ortsstromkreis in Ω	Stromstärke im Ortsstromkreis in Milliampère	Mikrophonwiderstand im Ortsstromkreis in Ω
13,5	45,48	14,7	43,68	16,0	42,68	17,9	39,68	20,0	38,19
13,0	51,08	14,0	50,38	15,1	50,08	17,0	45,58	19,0	43,38
12,0	63,78	13,0	61,08	14,5	55,48	16,0	52,68	18,0	49,08
11,5	70,88	12,7	64,68	13,8	62,28	15,0	60,98	16,9	56,18
12,8	53,48	13,9	51,38	15,0	50,98	16,1	51,98	17,7	50,98
11,0	78,58	12,0	73,78	13,0	71,08	14,3	67,38	16,0	62,68
M = 12,30	60,55	13,38	57,50	14,57	55,43	16,05	53,05	17,93	50,08
15,0	30,98	16,0	32,68	17,6	31,58	19,2	32,28	21,5	31,33
14,0	40,38	15,0	40,98	16,6	38,28	18,6	35,58	21,0	33,51
13,0	51,08	14,0	50,38	15,3	48,38	17,0	45,58	19,0	43,38
13,0	51,08	14,0	50,38	15,3	48,38	16,9	46,18	18,7	45,08
12,4	58,48	13,8	52,28	15,0	50,98	16,5	48,98	18,5	46,18
12,6	55,98	13,5	55,48	14,6	54,58	16,2	51,18	18,0	49,08
M = 13,32	48,00	14,39	47,03	15,73	45,36	17,40	43,30	19,45	41,43
13,9	41,38	15,0 –	40,98	16,1	41,98	17,9	39,68	20,0	38,19
13,8	42,28	15,0	40,98	16,1	41,98	18,0	39,08	20,1	37,69
13,8	42,28	15,0	40,98	16,5	38,98	18,2	37,88	20,2	37,19
14,0	40,38	15,2	39,18	16,8	36,98	18,5 –	36,18	20,5	35,78
13,4	46,68	15,0	40,98	16,0	41,98	18,0 –	39,08	20,0 –	38,19
14,0	40,38	15,0	40,98	16,5	38,98	18,4 –	36,78	20,5	35,78
M = 13,82	42,23	15,03	40,68	16,34	40,15	18,17	38,11	20,20	37,14
14,6	34,58	16,0	32,68	17,5 +	32,28	19,7 +	29,67	22,0	29,25
15,0	30,98	16,2	31,18	18,0	29,08	20,0 +	28,19	22,5	27,26
15,0	30,98	16,2	31,18	18,0	29,08	20,0	28,19	22,0	29,25
15,2	29,18	16,5	28,98	18,0	29,08	20,1	27,69	23,0	25,37
15,0 –	30,98	16,0	32,68	18,0 –	29,08	20,0	28,19	22,5	27,26
15,3	28,38	16,0	26,88	18,0	29,08	20,1	27,96	22,2 +	28,43
M = 15,02	30,85	16,30	30,60	17,92	29,61	19,98	28,27	22,37	27,80

V.

Stromstärke im Ortsstromkreis in Milliampère	Mikrophonwiderstand im Ortsstromkreis in Ω	Stromstärke im Ortsstromkreis in Milliampère	Mikrophonwiderstand im Ortsstromkreis in Ω	Stromstärke im Ortsstromkreis in Milliampère	Mikrophonwiderstand im Ortsstromkreis in Ω	Stromstärke im Ortsstromkreis in Milliampère	Mikrophonwiderstand im Ortsstromkreis in Ω	Stromstärke im Ortsstromkreis in Milliampère	Mikrophonwiderstand im Ortsstromkreis in Ω	
22,2	38,43	25,4	37,29	30,0	35,42	36,0	34,50	53,9	26,48	Linienstromkreis geöffnet
22,0	39,25	26,0	35,49	32,4	30,56	41,0	27,83	53,0	26,98	
20,0	48,19	23,5	43,54	28,4	39,11	37,0	33,02	50,0	29,19	
19,0	53,38	23,4	43,91	29,7	36,07	39,8	29,28	50,0	29,19	
19,7	49,67	22,5	47,26	26,7	43,52	33,6	38,40	49,0	30,01	
18,0	59,08	21,0	53,51	27,0	42,69	38,0	31,62	49,8	29,37	
20,15	48,00	23,63	43,50	29,03	37,90	37,57	32,44	50,95	28,54	
24,1	31,45	28,0	30,09	33,0	29,46	40,7	28,19	58,0	23,78	Linienstromkreis geschlossen, in demselben 3000 Ω Widerstand
24,5	30,12	29,0	27,67	36,0	24,50	46,0	22,62	60,1	22,59	
21,5	41,33	25,0	38,53	29,5	36,53	37,0	33,02	51,0	28,43	
21,0	43,51	25,0	38,53	31,0	33,30	39,0	30,29	50,5	28,81	
20,7	44,85	24,0	41,81	28,0	40,09	35,0	36,04	49,5	29,60	
21,0	43,51	24,0	41,81	29,0	37,67	38,2	31,34	49,0	30,01	
22,13	39,13	25,83	36,41	31,08	33,59	39,32	30,25	53,02	27,20	
22,6 +	36,88	26,0	35,49	31,5	32,29	40,0	29,03	58,0	23,78	Linienstromkreis geschlossen, in demselben 2000 Ω Widerstand
23,0	35,37	27,0	32,69	34,5	26,87	45,4	23,18	60,0	22,64	
23,5	33,54	27,0	32,69	32,0	31,33	40,0	29,03	56,0	24,99	
24,0	31,81	28,0	30,09	34,0	27,70	42,0	26,69	56,5	24,68	
22,5 –	37,26	26,0	35,49	32,0 +	31,33	39,8	29,28	54,0	26,29	
23,4	33,91	28,0	30,09	34,3 +	27,20	42,0	26,69	55,7	25,18	
23,17	34,80	27,00	32,76	33,05	29,45	41,54	27,32	56,70	24,95	
25,2	27,90	29,4	26,76	35,5	25,27	45,0	23,57	63,4	20,89	Linienstromkreis geschlossen, in demselben 1000 Ω Widerstand
26,0	25,49	30,4	24,56	37,5 +	22,31	49,4	19,60	66,0	19,68	
25,0	28,53	29,0	27,67	35,0	26,04	45,9	22,72	64,0	20,60	
26,0	25,49	31,0	23,30	38,5	20,94	48,5	20,42	66,0	19,68	
26,0	25,49	30,2	24,98	36,4	23,89	47,0	21,71	65,5	19,90	
25,4	27,29	30,0	25,42	37,0	23,02	47,5	21,27	66,0	19,68	
25,60	26,70	30,00	25,45	36,65	23,58	47,22	21,55	65,15	20,07	

eine Stromvermehrung im allgemeinen eine Widerstandsabnahme, und zwar ist dieser Einfluß der Stromstärke um so erheblicher, je geringer der Druck ist, mit dem die Kontakte gegeneinander lagern. Dies wird in evidenter Weise durch die Tab. V und die daraus gewonnene Kurvenschar (Fig. 3) dargetan. Bidwell stellte Versuche über die Beziehung zwischen dem Mikrophonwiderstand bei Kohle und der Stärke des die Kontakte durchfließenden Stromes bei einem auf den Kontakten lastenden Druck von 1 g und bei zwischen 11,4 und 4,5 Ω liegenden

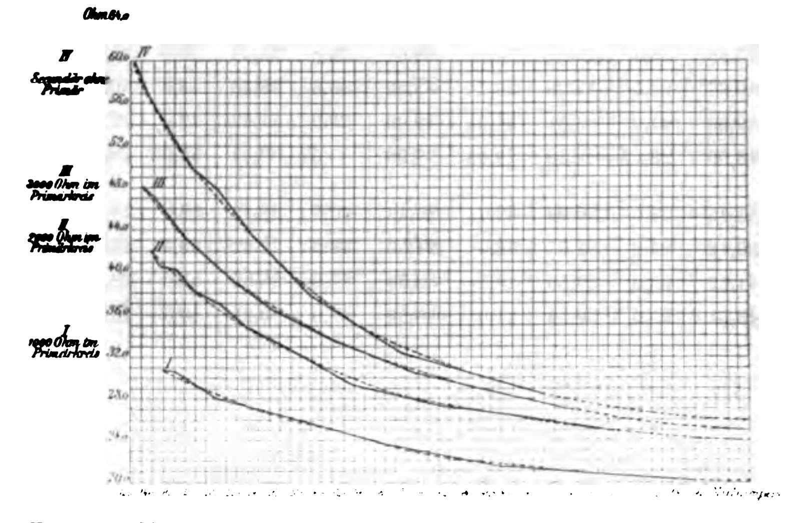


Fig. 3. Abhängigkeit des Mikrophonwiderstandes von der Stromstärke.

Mikrophonwiderständen bei zwölf verschiedenen zwischen 0,01 und 0,2 liegenden Stromstärken an. Wir haben die Beziehung in einem kleineren Stromintervall (zwischen 0,012 und 0,066 Amp.) bei vier verschiedenen, absichtlich kleiner gewählten (daher der Widerstand bei 0,01 Amp. im Minimum ca. 30 Ω, wobei allerdings noch zu berücksichtigen, daß die Kohle in beiden Fällen eventuell verschieden war), allerdings nicht ziffernmäßig angebbaren Drucken eingehender untersucht. Die Zahlen wurden in folgender Weise gewonnen: Im mehrfach erwähnten Ortsstromkreis lag die für alle diesbezüglichen Untersuchungen konstante elektromotorische Kraft, ferner das Milliampèremeter, ein regulierbarer Widerstand und der vorher benutzte Mikro-

phonkontakt. Aus der abgelesenen, durch Regulierung des Kurbelwiderstandes veränderten Stromstärke und der konstanten elektromotorischen Kraft wurde nach dem Ohmschen Gesetz der gesamte im Stromkreis befindliche Widerstand berechnet und es ergab sich nach Abzug des im Milliampèremeter befindlichen und des am Kurbelwiderstand abgelesenen Widerstandes der an der Kontaktstelle vorhandene Widerstand. Der Druck wurde durch Variierung der Linienstromstärke (Widerstand $= \infty$, $= 3000$, $= 2000$ und $= 1000\ \Omega$) geregelt. Die Kurven zeigen deutlich genug, daß die den Stromänderungen entsprechenden, bei konstantem Druck sich ergebenden Widerstandsänderungen um so größer ausfallen, je geringer der Druck ist, mit dem die Kontaktstücke gegeneinander gelagert sind. Ebenso ist ersichtlich, daß die Widerstandsdifferenzen um so größer ausfallen, je höher der Mikrophonwiderstand ist, und daß dieselben mit sinkendem Widerstand mehr und mehr abnehmen. Bei den einzelnen Kurven scheint sich der Widerstand schließlich asymptotisch einem Grenzwert zu nähern.

Im Anschluß hieran seien kurz die Resultate erwähnt, welche wir mit den nämlichen Kohlekontakten bei Anlegung außerordentlich kleiner elektromotorischer Kräfte ($^1/_{50000}$ bis $^1/_{15000}$ Volt) erhielten. Die die Kontaktstelle durchfließenden Ströme — von der Ordnung 10^{-7} — wurden mit einem Hartmann und Braunschen Drehspulengalvanometer gemessen. Derartige Versuche scheinen dadurch eine gewisse Schwierigkeit zu haben, daß bei Verwendung so geringer elektromotorischer Kräfte der mikrophonische Widerstand besonders stark Störungen ausgesetzt ist. Bekanntlich ist bei losen Kontakten (Kohärer) die Frage einer „kritischen" elektromotorischen Kraft lange Zeit sehr brennend gewesen. Nach v. Gulik[1]) und Aschkinass bleibt bei solchen Kontakten — beide untersuchten Einzelkontakte — der Widerstand völlig unverändert, solange die elektromotorische Kraft nicht eine bestimmte Grenze überschritten hat. Robinson[2]) hebt dagegen hervor, daß allerdings erst bei einer bestimmten Spannung die Widerstandsabnahme plötzlich eine sehr starke wird, daß aber auch schon

1) D. v. Gulik, Wied. Ann. **66.** p. 136—145 u. E. Aschkinass, Wied. Ann. **66.** p. 284—307. 1898.

2) Ph. E. Robinson, Ann. d. Phys. **11.** p. 754—796. 1903.

vorher der Kohärerwiderstand mit wachsender Spannung abnimmt. Eccles[1]) stellte auf Grund zahlreicher Untersuchungen von verschiedenen Radiokonduktoren (meist Metallfeilicht zwischen Metallzylindern, zum Teil ein Einzelkontakt aus Eisenspitze und eiserner Platte) eine kritische elektromotorische Kraft im erst angegebenen Sinne in Abrede, und zu ganz ähnlichen Resultaten gelangte auch Bose.[2]) Mit Kohlekontakten wurden unseres Wissens bislang solche Versuche nicht angestellt und es sei kurz erwähnt, daß unsere Beobachtungen durchaus dafür sprechen, daß schon bei den geringsten elektromotorischen Kräften eine Abnahme des Widerstandes erfolgt. Bemerkenswert ist es, daß es meist recht lange dauerte, bevor die Galvanometernadel den endgültigen Ausschlag erreicht hatte; dies zeigte sich um so mehr, je schwächer die den Kontakt durchfließenden elektrischen Ströme waren.

Das bereits erwähnte Phänomen, daß der Widerstand an der Kontaktstelle nach aufgehobenem Relaisdruck nicht im entferntesten auf den ursprünglichen Wert zurückkehrte, haben wir nicht weiter verfolgt, sondern haben uns bisher mit der Feststellung begnügt, daß dasselbe um so mehr vermieden wurde, je mehr wir dafür sorgten, daß nicht relativ starke Ströme zu lange die Kontakte durchflossen. Dies Phänomen steht nun in einem gewissen Gegensatz zu dem von Bidwell[3]) ausgesprochenen Gesetz, daß der durch eine Zunahme des Druckes reduzierte Widerstand eines Kohlekontaktes bei Wegnahme des hinzugefügten Druckes sich annähernd zum ursprünglichen Widerstand erhebt. Dagegen konstatierte Bidwell, daß metallische Kontakte im Gegensatz zu Kohlekontakten auch nicht angenähert ihren ursprünglichen Widerstand wiedergewinnen, wenn derselbe einmal durch vermehrten Druck bez. Strom reduziert worden ist, es sei denn, daß eine völlige Trennung statthat. Er hielt es für wahrscheinlich, daß diese Tatsache in Verbindung steht mit dem von A. Stroh[4]) näher

1) W. H. Eccles, The Electrician. 47. p. 682—685 u. p. 715—717. 1901.
2) J. C. Bose, The Electrician. 47. p. 830—832 u. p. 877—881. 1901.
3) S. Bidwell, l. c. p. 17.
4) A. Stroh, Journ. of the Soc. of Telegr. Ing. 9. p. 182—191; Wied. Beibl. 4. p. 678—679. 1880.

untersuchten Phänomen der Adhäsion der Metalle durch elektrische Ströme. Durch unsere Erfahrungen mit Kohlekontakten scheint aber ein derartiger innerer Zusammenghang in Zweifel gesetzt zu sein, jedenfalls wenn es sich der Meinung Strohs entsprechend bei diesen Adhäsionserscheinungen um ein wirkliches Zusammenschmelzen handeln sollte, was allerdings, so plausibel es zum Teil erscheinen mag, eigentümlich erscheint, wenn man bedenkt, daß es Bidwell[1]) gelang, ein Aneinanderhaften von zwei sehr dünnen Platindrähten bei Verwendung eines Stromes von nur ca. 1 Milliamp. zu erreichen.

Immerhin scheint aus unseren Versuchen klar genug hervorzugehen, daß man bei einem mikrophonischen Relais mit Kohlekontakten möglichst schwache, die Kontakte durchfließende Ströme anwenden muß (wenige Milliampère), wenn anders sich nicht der vor Betätigung des Relais herrschende Übergangswiderstand wesentlich ändern soll. Diese ganze Frage dürfte noch eine gründlichere Untersuchung nötig machen, und wollen wir uns daher hier nicht erst über etwaige sonstige Erklärungsmöglichkeiten des von uns zu wiederholten Malen beobachteten Phänomens verbreiten.

Was nun die Verwendung eines mikrophonischen Relais zur Übermittelung telegraphischer Zeichen durch sehr schwache elektrische Ströme betrifft, so müßte man unseres Erachtens zunächst versuchen, sich Antwort auf folgende Fragen zu verschaffen:

I. Welche Empfindlichkeit müßte man jedenfalls vom Relais verlangen, um einen genügenden Vorteil gegenüber den gebräuchlichen telegraphischen Relais zu gewinnen?

II. Lassen sich die durch Erschütterungen etc. bedingten Störungen ohne zu umständliche Anordnungen in genügender Weise vermeiden, um bei der beanspruchten Empfindlichkeit sicher arbeiten zu können?

III. Welchen Anfangsdruck ungefähr wählt man am besten?

IV. Welche elektromotorische Kraft hat man an die Kontakte zu legen?

---

1) S. Bidwell, l. c. p. 13.

V. Welches Material und welche Form eignet sich am besten für die Kontakte?

Was den Punkt II betrifft, so könnte man entweder an eine in der Praxis wirklich mögliche Aufhängung bez. Aufstellung oder aber an eine möglichst erschütterungsfreie Konstruktion des Relais an sich bez. eine Kombination beider Gesichtspunkte denken. Je größer die beanspruchte Empfindlichkeit ist, um so sorgfältiger muß natürlich darauf Bedacht genommen werden, Erschütterungen zu vermeiden.

Die Beurteilung der Frage, wie weit ein Bedürfnis für ein derartiges Relais vorliegen würde, müssen wir selbstverständlich völlig den Praktikern überlassen. Wir haben nur, da nun einmal ziffernmäßige Feststellungen von uns vorlagen, das Augenmerk auf diese Frage lenken wollen und nach unseren Erfahrungen die Aufgaben bezeichnen wollen, die etwa zunächst für die Lösung eines solchen Problems in Betracht kommen könnten.

Wir möchten nun zum Schluß noch auf einige Punkte aufmerksam machen. Zunächst würde uns bei einem für telegraphische Zwecke gedachten Relais eine bestimmte Anfangs- bez. Endstromstärke (letzteres bei Benutzung des Relais als Zwischenrelais) keineswegs unumgänglich erforderlich erscheinen, wodurch offenbar die an die Sicherheit des Funktionierens gestellten Anforderungen herabgeschraubt werden könnten, sondern es könnte eventuell noch von genügendem Wert sein, wenn man die angegebenen Grenzpunkte durch Zuhilfenahme eines Transformators ausschlösse und einen Sekundärstrom zur Zeichengabe benutzte. Zufällige Schwankungen bez. allmähliche Verstellungen wären dann von relativ geringem Belang, da man natürlich die Anordnung so treffen müßte, daß erst über eine gewisse Stärke hinausgehende Sekundärströme für die Zeichengebung in Betracht kämen. Wenn wir von diesem Gesichtspunkt aus nochmals unsere Tabb. I, II und III ins Auge faßten, so würden wir auch bei den ungünstigsten derselben, soweit die geringsten von uns verwandten Linienströme (ca. $^1/_{50}$ Milliamp.) in Betracht kommen, noch nicht so übel beraten sein. Die vorher gebildeten Differenzen zwischem dem Minimum des vor Betätigung des Relais vorhandenen und dem Maximum des bei

Betätigung des Relais vorhandenen Kontaktwiderstandes hatten zur Genüge die Gefahr der unvorhergesehenen Veränderung des Kontaktwiderstandes für die Sicherheit des Betriebes kenntlich gemacht, sie hatten gezeigt, wie ungünstig die Verhältnisse bei Tab. III liegen. Ganz anders würden aber auch bei Tab. III die Verhältnisse liegen, wenn es nicht auf die Innehaltung gewisser Grenzlagen, sondern nur auf die momentane, durch die magnetische Wirkung des Linienstromes bedingte Änderung des mikrophonischen Widerstandes ankommt. Wenn wir besagte Minima und Maxima aufsuchen, so werden wir sehen, daß sie nie zu einem und demselben Beobachtungspaar oder zu nahe beieinanderliegenden Beobachtungen gehören, sondern zeitlich relativ weit auseinanderliegen. Die durch irgendwelche unvorhergesehene Agentien bedingten, zum Teil nicht geringen Verschiebungen in der Größe des vor Betätigung des Relais vorhandenen Widerstandes kommen nämlich meist nicht auf Konto einer plötzlichen Veränderung, sondern sind nach und nach entstanden; jedenfalls, soweit wir die Aufhängung benutzten, haben wir nie bemerkt, daß eine plötzliche, unvorhergesehene Erschütterung eine auch nur annähernd so große Widerstandsänderung an der Kontaktstelle hervorrief wie die magnetische Wirkung des schwächsten Linienstromes ($^1/_{50}$ Milliamp.).

Vielleicht ist auch die Verwendung sehr schwacher Ströme nicht der einzig richtige, leitende Gesichtspunkt bei Weiterverfolgung der Idee eines Mikrophonrelais, worauf wir auch von fachmännischer Seite aufmerksam gemacht worden sind, da die gewöhnliche Telegraphenpraxis nicht selten dadurch eine Störung erleiden soll, daß die benutzten Relais durch geringfügige Verstellungen bei Verwendung der üblichen Linienströme gänzlich versagen; auch würden bei Verwendung mikrophonischer Kontakte die Übelstände vermieden, welche eventuell durch häufige, völlige Stromunterbrechung[1]) (Funkenbildung etc.) eintreten könnten, über deren wirkliche Bedeutung uns allerdings jedes Urteil abgeht.

---

1) A. Stroh, Journ. of the Soc. of Telegr. Ing. **9.** p. 188 u. 189; Fortschr. d. Phys. **36.** (I—II) p. 799—800 u. p. 1189; Beibl. **4.** p. 678 bis 679 und Dingl. Polyt. Journ. **237.** p. 477.

Schließlich sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß ein besonders empfindliches Mikrophonrelais vielleicht insofern gelegentlich von wissenschaftlichem Wert sein könnte, als es mittels desselben gelingen möchte, galvanometrisch Ströme von geringerer Größenordnung nachzuweisen, als sie den auf die gewöhnliche Weise durch das benutze Galvanometer nachweisbaren Strömen entsprechen. Einige wenige von uns selber nach dieser Richtung hin angestellte Versuche gaben allerdings noch wenig befriedigende Resultate.

Hamburg, Physikal. Staatslaboratorium und
Karlsruhe, Physikal. Institut der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 2. Oktober 1905.)

3. *Über das Emissionsspektrum des Auerbrenners; von H. Rubens.*

(Hierzu Taf. V u. VI.)

In einigen früheren Arbeiten[1]) habe ich auf den ungemein hohen Prozentsatz langwelliger Wärmestrahlung hingewiesen, welcher in der Gesamtemission des Glühstrumpfes im Auerschen Brenner vorhanden ist und welcher diese Wärmequelle für Untersuchungen im langwelligen Spektrum außerordentlich geeignet macht. Ferner hat sich bei neueren Versuchen die Gesamtstrahlung des Auerstrumpfes auch im Verhältnis zu seiner Lichtstrahlung so außerordentlich gering ergeben, daß es mir von Interesse schien, das gesamte sichtbare und ultrarote Spektrum dieser merkwürdigen Lichtquelle einer eingehenden Untersuchung zu unterwerfen.

Messungen ähnlicher Art sind allerdings bereits von Hrn. Langley für Petroleumglühlicht mit Hilfe seines Bolographen vorgenommen worden. Hr. Langley[2]) fand, daß in der Energiekurve die Emissionsmaxima von Wasserdampf und Kohlensäure deutlich hervortreten. Leider gestatten es die Langleyschen Versuche jedoch nicht, die Strahlung des Strumpfes von derjenigen der Petroleumflamme zu trennen, und ferner erstrecken sich seine Aufnahmen nur bis zur Wellenlänge $\lambda = 8\,\mu$. Es waren daher neue Messungen erforderlich, um über das Emissionsvermögen der Glühstrumpfmasse in dem gesamten der Untersuchung zugänglichen Spektrum zuverlässige Daten erhalten zu können.

Die von mir benutzten Auerstrümpfe waren sogenannte Degeastrümpfe[3]) der Deutschen Gasglühlicht-A.-G. Sie wurden

1) H. Rubens, Wied. Ann. 69. p. 576. 1899; H. Rubens u. E. Ladenburg, Ber. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 7. p. 171. 1905.

2) S. P. Langley, Annals of the Astrophysikal Observatory 1. p. 240—243. 1900.

3) Die Degeastrümpfe bestehen aus cca. 99,2 Proz. Thoriumoxyd (ThO_2) und 0,8 Proz. Ceroxyd (Ce_2O_3).

sämtlich nicht durch die sonst übliche zentrale Halterstange, sondern durch seitlich eingreifende Stative im Flammenmantel gehalten. Es geschah dies, um die ziemlich beträchtliche Strahlung der Halterstange zu vermeiden. Die verwendeten Strümpfe waren neu (frisch abgebrannt) und die Bunsenflamme wurde sorgfältig bis zur maximalen Lichtwirkung reguliert. Untersucht wurde schließlich der heißeste Teil des Strumpfes, 0,5—2,5 cm über dem Brennerkopf.

Die Energieverteilung wurde mit Hilfe des Spiegelspektrometers und der linearen Thermosäule gemessen. Die Breite des Kollimatorspaltes sowie des vor der Thermosäule befindlichen Okularspaltes betrug 0,8 mm, die Brennweite der Hohlspiegel 38 cm. Bis zur Wellenlänge $\lambda = 8\ \mu$ wurde ein Fluoritprisma, von $\lambda = 8\ \mu$ bis $\lambda = 18\ \mu$ ein Sylvinprisma verwendet. Die so erhaltenen Energiekurven wurden in der bekannten Weise auf das Normalspektrum reduziert und unter Berücksichtigung der Prismenabsorption aneinander angeschlossen. Die Absorption beginnt in dem Fluoritprisma bei 7 μ, in dem Sylvinprisma bei 13 μ[1]), erreicht aber in den betrachteten Spektralgebieten keine hohen Beträge (im Fluoritprisma 26 Proz. pro Zentimeter, im Sylvinprisma 14 Proz. pro Zentimeter), so daß man berechtigt ist, bei der Absorptionsberechnung die mittlere von dem Strahlenbündel in dem Prisma durchlaufene Weglänge als absorbierende Schichtdicke zugrunde zu legen. In dem Spektralgebiet zwischen 8 μ und 8,3 μ wurden mit beiden Prismen Beobachtungen vorgenommen, ebenso an einigen anderen Stellen des kurzwelligeren Spektrums, um den Anschluß der beiden Kurven aneinander zu ermöglichen. Bei den Beobachtungen im sichtbaren Gebiet war, um das Spektrum von geringen Spuren diffuser ultraroter Strahlung zu reinigen, eine 1 cm dicke, planparallele Wasserschicht eingeschaltet. Bei einigen dieser Messungsreihen wurde der Auerbrenner mit dem üblichen Zugglas versehen, doch waren die beobachteten Ausschläge mit und ohne Zugglas nur wenig verschieden. Im ultraroten Spektrum wurde der Auerbrenner stets ohne Zugzylinder untersucht. Die Abwesenheit diffuser Strahlung wurde

1) H. Rubens u. A. Trowbridge, Wied. Ann. **60.** p. 737. 1897.

hier durch Einschalten von Glasplatten bez. Flußspatplatten in jeder Versuchsreihe öfters kontrolliert.[1])

In der beschriebenen Weise wurden an ca. 70 verschiedenen Stellen des Spektrums zwischen $\lambda = 0{,}45\ \mu$ und $\lambda = 18\ \mu$ Ausschläge gemessen und zwar erstens für den Auerbrenner, zweitens nach vorsichtiger Entfernung des Glühstrumpfes für den zugehörigen Bunsenbrenner[2]) und drittens für einen Auerbrenner, dessen Glühstrumpf „entleuchtet" d. h. mit einer äußerst dünnen Eisenoxydschicht überzogen war. Man überzieht einen Auerstrumpf mit einer dünnen Schicht von Eisenoxyd, indem man den Glühkörper nach dem Abbrennen vorsichtig in Tinte taucht und dann in der Bunsenflamme ausglüht. Der Strumpf nimmt dann eine dunkelbraune Färbung an, behält aber seine Form und zeigt unter dem Mikroskop noch dieselbe Struktur und Feinheit des Gewebes wie zuvor. Im äußeren Flammenmantel des Bunsenbrenners erhitzt er sich jetzt nur noch bis zur helleren Rotglut. Seine Temperatur ergab sich, mit dem optischen Pyrometer von Holborn und Kurlbaum[3]) gemessen, in einer Höhe von 0,5—2,5 cm über dem Brennerkopf zu 1050—1100° C., während dasselbe Instrument unter den gleichen Bedingungen für den normalen Auerstrumpf eine Temperatur von 1500—1600° C. angibt.

Die folgende Tab. I, p. 728, enthält die Resultate der Energiemessungen im Spektrum. Kolumne 1 gibt die Wellenlängen, Kolumne 2, 3 und 4 die auf das Normalspektrum reduzierten Strahlungsintensitäten des normalen Auerbrenners, des zugehörigen Bunsenbrenners und des Auerbrenners mit entleuchtetem (oxydüberzogenem) Glühstrumpf. Auf die Bedeutung der Zahlen in Kolumne 5 soll weiter unten eingegangen werden. Bis zur Wellenlänge $\lambda = 10\ \mu$ sind die Zahlen dieser Kolumne gleich der Differenz der entsprechenden in Kolumne 2 und 3. Von $\lambda = 10\ \mu$ ab sind die Zahlen der Kolumne 5 mit denen der Kolumne 4 identisch.

---

1) H. Rubens u. A. Trowbridge, l. c. p. 735.

2) Hierbei wurde darauf geachtet, daß der Brenner bei dem Entfernen des Strumpfes seine Lage vor dem Spalt nicht änderte, so daß der Spektrometerspalt nach wie vor von den gleichen Flammenteilen bestrahlt wurde.

3) L. Holborn u. F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 10. p. 225. 1903.

Tabelle I.

λ	Auer-brenner	Bunsen-brenner	Eisenoxyd-strumpf	Auer-strumpf	λ	Auer-brenner	Bunsen-brenner	Eisenoxyd-strumpf	Auer-strumpf	λ	Auer-brenner	Bunsen-brenner	Eisenoxyd-strumpf	Auer-strumpf
0,45 μ	3,8	—	—	3,8	4,41 μ	249	241	107	8	8,66 μ	31,0	2,3	16,5	28,7
0,47	7,5	—	—	7,5	4,52	205	198	101	7	9,15	32,0	1,38	16,9	30,6
0,50	11,5	—	—	11,5	4,64	119	110	655	9	9,60	31,3	0,87	16,2	30,5
0,58	20,9	0	0	20,9	4,75	51	43	40	8	10,05	28,2	0,68	15,4	27,5
0,59	23,4	0	0,7	23,4	4,98	25,2	18,0	33,6	7,2	10,45	26,9	0,55	14,6	26,3
0,73	26,4	0	4,5	26,4	5,19	19,5	11,5	27,0	8,0	10,83	24,3	0,77	13,4	24,3
1,0	34,8	0,5	42	34,3	5,39	17,5	10,3	25,4	7,2	11,24	21,4	0,84	12,4	21,4
1,47	38,3	5,0	109	33,3	5,57	16,2	8,5	23,1	7,7	11,97	19,1	1,20	10,6	19,1
1,73	39,5	9,1	160	30,6	5,76	15,9	7,7	18,6	8,3	12,64	17,3	1,53	9,6	17,3
1,96	36,9	11,3	175	25,6	5,94	13,2	5,6	14,5	7,6	13,27	14,8	1,72	8,4	14,8
2,20	34,7	11,1	187	23,6	6,10	12,2	4,1	13,7	8,1	13,86	13,0	1,93	7,7	13,0
2,42	43,2	24,0	171	19,2	6,25	14,2	3,8	15,8	10,4	14,44	10,3	1,82	6,5	10,3
2,62	66	48	146	18,0	6,41	12,1	4,7	13,6	7,4	15,0	8,9	1,57	5,4	8,9
2,80	81	62	128	19,0	6,56	17,3	8,6	13,8	8,7	15,5	8,3	1,46	5,1	8,3
2,99	72	55	125	17,0	6,71	22,6	10,6	14,3	12,0	16,0	8,1	1,36	4,7	8,1
3,15	38,5	22,6	112	15,9	6,99	24,7	9,7	15,1	15,0	16,5	6,0	1,31	4,3	6,9
3,49	15,4	5,2	88	10,2	7,25	26,3	9,3	16,3	17,0	17,0	5,9	1,22	4,0	5,9
3,77	11,2	1,8	70	9,4	7,58	30,7	9,2	15,8	21,5	17,45	5,6	1,03	3,6	5,6
4,04	19,0	11,4	57,5	7,6	7,79	31,7	9,2	16,3	22,5	17,9	5,0	0,94	3,3	5,0
4,16	62,0	55,0	59	7,0	8,04	30,8	6,9	16,3	23,9					
4,29	175	165	83	10	8,27	30,3	4,2	16,4	26,1					

Den Zahlen der Tab. I entsprechen die Energiekurven *a*, *b* und *c* (Taf. V) und zwar liefert *a* die Energieverteilung im Emissionsspektrum des normalen Auerbrenners, *b* im Spektrum des Bunsenbrenners, *c* in demjenigen des Auerbrenners mit entleuchtetem Glühstrumpf. In allen drei Kurven treten die Emissionsmaxima der Kohlensäure und zum Teil auch des Wasserdampfes deutlich hervor, am stärksten bei den Kurven *b* und *a*. Ferner ist zu erkennen, daß die Emissionskurve des Auerbrenners (*a*) diejenige des Bunsenbrenners (*b*) vollkommen umhüllt, während dasselbe für die Kurven *c* und *b* nicht zutrifft. Daß in dem Spektralgebiet zwischen $\lambda = 2\ \mu$ und $\lambda = 5\ \mu$, in welchem die starken Absorptionsbanden der Kohlensäure liegen, der normale Auerbrenner fast dasselbe Emissionsspektrum ergibt als die Bunsenflamme allein, beweist erstens, daß das Emissionsvermögen des Auerstrumpfes verglichen mit demjenigen der Flamme hier äußerst gering ist und zweitens, daß die Masse des Auerstrumpfes im Glühzustand für die Strahlung der Flamme nahezu vollkommen durchlässig sein muß. Nimmt man an, daß das geringe Emissionsvermögen des Auerstrumpfes nicht durch hohes Reflexionsvermögen bedingt ist, was schon infolge der äußerst feinen Verteilung der Masse ausgeschlossen erscheint, so ist nach dem Kirchhoffschen Gesetz das geringe Emissionsvermögen des Strumpfes mit seiner Durchlässigkeit verknüpft.

Diese Auffassung wird durch das Verhalten des mit Eisenoxyd geschwärzten Glühstrumpfes bestätigt. Dieser besitzt in den in Frage kommenden Spektralgebieten ein wesentlich höheres Emissionsvermögen als der normale Auerstrumpf, was daraus hervorgeht, daß er trotz seiner viel tieferen Temperatur stärker strahlt. Mit seinem größeren Emissionsvermögen ist aber auch ein viel stärkeres Absorptionsvermögen verbunden und deshalb wird nur ein kleiner Teil der Flammenstrahlung (wohl nur der durch die Maschen dringende Bruchteil) hindurchgelassen.

Die nahezu vollkommene Durchlässigkeit des Auerstrumpfes für die Strahlung der Bunsenflamme macht es uns möglich, durch Differenzbildung der Zahlen in den Kolumnen 2 und 3 der Tab. I Werte zu erhalten, welche der Emission des Auerstrumpfes allein in diesem Spektralgebiet angenähert entsprechen.

Dagegen ist im Gebiet großer Wellenlängen (von etwa 10 μ ab) einerseits das Emissions- bez. Absorptionsvermögen der Strumpfmasse wieder so hoch, andererseits die Strahlung der Flamme so gering, daß letztere völlig vernachlässigt werden darf. Die Zahlen der Kolumne 5 in Tab. I entsprechen also sehr angenähert der Emission des heißen Strumpfes allein. Die entsprechende graphische Darstellung liefert Kurve *d* (Taf. V). Der Maßstab der Ordinaten ist hier der Deutlichkeit wegen gegenüber dem der Kurven *a*, *b* und *c* verdoppelt. Kurve *d* zeigt zwei deutlich ausgeprägte Maxima bei 1,2 μ und 9,3 μ, dazwischen sind die Emissionswerte sehr gering.

Durch die Untersuchungen des Hrn. E. St. John[1]) ist die Frage, ob der Auerbrenner als alactiner oder als thermacliner Körper leuchtet, zugunsten der letzteren Anschauung entschieden worden. Die seltsame Form der Kurve *d* ist also lediglich durch den eigentümlichen Verlauf des Absorptionsvermögens bedingt. Das Emissionsvermögen kann aber für den Auerstrumpf an allen Stellen des untersuchten Spektralgebietes mit Hilfe der Kurve *d* (bez. der Kolumne 5 in Tab. I) zahlenmäßig bestimmt werden, sobald die folgenden Größen bekannt sind:

1. die Glühtemperatur des Auerstrumpfes,

2. das Verhältnis der Gesamtstrahlung des Auerstrumpfes zu derjenigen eines vollkommen schwarzen Körpers von gleicher Temperatur, Form und Struktur.

Die Messung der Glühtemperatur des Auerstrumpfes stößt allerdings auf erhebliche Schwierigkeiten. Die Lage des ersten Energiemaximums gewährt leider wegen der rapiden Änderung des Emissionsvermögens mit der Wellenlänge keinerlei Anhalt. Mit dem optischen Pyrometer ist die Temperaturmessung zwar ausführbar, aber wegen der starken Färbungsdifferenz zwischen Glühlampe und Auerstrumpf ungenau. Sie ergab, wie bereits oben erwähnt, für die hier untersuchte Stelle 1500—1600° C.[2])

1) E. St. John, Wied. Ann. 56. p. 433. 1895.

2) Dieses Resultat ist in guter Übereinstimmung mit den entsprechenden Messungsergebnissen der Herren Kurlbaum und Holborn. An der heißesten Stelle des Strumpfes ergab sich bei Einschaltung eines blauen Glases die Temperatur $t = 1580°$ C.

Eine Schätzung der Glühtemperatur kann auch in folgender Weise vorgenommen werden: Nach den sorgfältigen Untersuchungen des Hrn. Waggener[1]) beträgt die Temperatur im äußeren Mantel der Bunsenflamme jedenfalls mehr als 1770°; nach Hrn. Féry[2]) 1871° C. Die Temperatur des Auerstrumpfes ist nun infolge des starken Wärmeverlustes durch Strahlung sicherlich bedeutend niedriger. Berücksichtigt man ferner, daß der mit Eisenoxyd überzogene Strumpf, dessen Temperatur mit Hilfe des optischen Pyrometers einwandfrei und exakt zu 1050—1100° C. gemessen worden ist[3]), fast genau doppelt so viel Wärme ausstrahlt als der Auerstrumpf bei normaler Glühtemperatur, so wird man zu dem Schluß geführt, daß diese Glühtemperatur angenähert in der Mitte liegen wird zwischen der Temperatur der Flamme und derjenigen des entleuchteten Glühstrumpfes, also etwa bei 1500° C. Wir wollen auf Grund der vorstehenden Angaben die *absolute* Temperatur der untersuchten Glühstrumpfstelle zu $\vartheta = 1800^0$ annehmen, was einer Celsiustemperatur von 1527° entspricht.

Das Verhältnis der Gesamtstrahlung des Auerbrenners zu derjenigen eines schwarzen Körpers von gegebener Temperatur wurde in der bekannten Weise ermittelt, indem nacheinander der zu untersuchende Auerbrenner und ein elektrisch geheizter „schwarzer Körper“ nach Art des von den Herren Lummer und Kurlbaum[4]) beschriebenen vor dasselbe wassergespülte Diaphragma gebracht und jedesmal der Ausschlag einer dem Diaphragma gegenüber aufgestellten Thermosäule abgelesen wurde. Aus diesen Versuchen ergab sich unter Berücksichtigung des Stefanschen Gesetzes, daß ein absolut schwarzer Körper von 1800° abs. pro Flächeneinheit 26 mal

1) W. J. Waggener, Wied. Ann. 58. p. 579. 1896.

2) Ch. Féry, Compt. rend. 137. p. 909. 1903.

3) Aus der Wellenlänge des Energiemaximums würde sich nach dem Wienschen Gesetz die Temperatur $t = 1087^0$ ergeben. Es ist dies zwar in guter Übereinstimmung mit der oben mitgeteilten Temperaturmessung, doch beruht es zum Teil auf Zufall, da die Energiekurve des entleuchteten Auerstrumpfes von der eines absolut schwarzen Körpers sehr erheblich abweicht.

4) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Verhandl. d. Physik. Gesellsch. 17. p. 106. 1898.

so stark strahlt als der Auerbrenner, 69 mal so stark als der Bunsenbrenner und 42 mal so stark als der Glühstrumpf allein. Nun ist aber außerdem zu berücksichtigen, daß der Glühstrumpf nicht aus kontinuierlicher Masse, sondern aus einzelnen Fäden mit feinen Zwischenräumen besteht. Bei den von mir untersuchten Strümpfen war das Netzgewebe ein ziemlich dichtes und die Abstände der Fäden nur wenig größer als die Fadendicke. In den Strahlengang einer beliebigen Lichtquelle gebracht, absorbierte der nicht leuchtende Auerstrumpf durch Schattenbildung in der Mitte ca. 70 Proz., an den Rändern total, im Durchschnitt 78 Proz. Brachte man ferner einen Auerbrenner in der üblichen Weise vor den Spektrometerspalt und stellte man die Thermosäule auf eine Wellenlänge ein, für welche die Emission der Flamme gegenüber derjenigen des Strumpfes vernachlässigt werden kann, z. B. $\lambda = 1\,\mu$, so konnte der Ausschlag durch Hinzunahme eines zweiten Auerbrenners, welcher durch den ersten hindurch den Spalt bestrahlte, um 20 Proz. erhöht werden. Durch Hinzunahme eines dritten Brenners trat eine weitere Ausschlagsvermehrung um 3 Proz. ein. Ein vierter Brenner war ohne merklichen Einfluß. Man ist hiernach zu dem Schluß berechtigt, daß ein Quadratzentimeter des untersuchten Strumpfes 0,78 mal so stark strahlt als ein vollkommen dichtes Gewebe von gleicher Temperatur. Auf ein solches aber muß sich der Vergleich mit dem schwarzen Körper beziehen, wenn wir zu richtigen Emissionswerten gelangen wollen. Ein schwarzer Körper von 1800^0 strahlt mithin $42 \times 0,78 = 33,2$ mal so stark als ein dichtes Auerstrumpfgewebe gleicher Temperatur. Will man die Emissionskurven (für den schwarzen Körper von 1800^0 abs. und das dichte Strumpfgewebe) im richtigen Maßstab übereinander zeichnen, so hat man also dafür zu sorgen, daß sich ihre Flächeninhalte verhalten wie 33,2 zu 1. Kurve *e* unserer Taf. V ist die Energiekurve eines absolut schwarzen Körpers von 1800^0 abs. nach der Planckschen Formel. Ihre Ordinaten stehen zu denen der anderen Kurven in dem hieraus sich ergebenden Verhältnis. Man kann alsdann für jede einzelne Wellenlänge das dem Ordinatenverhältnis gleiche Emissionsvermögen entnehmen und gelangt so zu den in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werten.

Tabelle II.

λ	Schwarzer Körper bei 1800° abs.	Auerstrumpf	Emissionsvermögen
0,45 μ	4,4	3,8	0,86
0,5	16,1	11,5	0,72
0,55	45,0	22,0	0,49
0,6	100	24,0	0,24
0,7	390	25,8	0,062
1,0	1830	34,3	0,0187
1,2	2930	34,3	0,0116
1,5	3740	34,0	0,0091
2,0	3500	25,5	0,0073
3,0	1910	17,0	0,0088
4,0	962	7,6	0,0079
5,0	511	7,0	0,0137
6,0	292	7,9	0,0270
7,0	178	15,0	0,0843
8,0	113	23,9	0,211
9,0	75,6	29,9	0,395
10,0	52,3	27,4	0,524
12,0	27,3	19,1	0,70
15,0	12,0	8,9	0,74
18,0	6,2	5,0	0,81

Der Inhalt der Tab. II ist durch Kurve *f* (Taf. V) graphisch dargestellt, welche das Emissionsvermögen des Auerstrumpfes als Funktion der Wellenlänge wiedergibt. Die Kurve hat einen sehr glatten Verlauf. Nur bei $\lambda = 15\,\mu$ zeigt sie eine schwache Knickung, die ohne Zweifel von der Absorption herrührt, welche die Kohlensäure der Zimmerluft auf die Strahlung des Auerstrumpfes an dieser Stelle ausübt. Nach früheren Beobachtungen[1]) ist die durch 1 m Zimmerluft von mittlerem Kohlensäuregehalt hier verursachte Absorption ungefähr 9 Proz.

1) H. Rubens u. E. Ladenburg, l. c. p. 177.

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache erhält man für das Emissionsvermögen des Auerstrumpfes für $\lambda . 15 \mu$ den Wert 0,80 (statt 0,74) und der Knick in der Kurve verschwindet.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß sich die berechneten Emissionsvermögen innerhalb des gesamten Spektrums kleiner als 1 ergeben, und daß unsere Annahme bezüglich der Temperatur des Glühstrumpfes nach dieser Richtung hin den Tatsachen nicht widerspricht. Die Emissionsvermögen sind im Blau sehr hoch (0,86), nehmen nach Rot hin stark ab (0,062), wie dies auch aus älteren Versuchen bereits hervorgeht.[1]) In dem großen Spektralgebiet zwischen 1μ und 5μ, in welchem die Strahlung unserer meisten Lichtquellen am stärksten ist, sind die Emissionsvermögen der Auerstrumpfmasse kleiner als $^1/_{50}$, zwischen 2μ und 4μ sogar kleiner als $^1/_{100}$. Erst in dem Gebiet der langen Wellen, in welchem die Strahlung nur einen sehr geringen Bruchteil der Gesamtemission ausmacht, beginnen die Emissionsvermögen wieder zu wachsen und erreichen schließlich Werte, welche der 1 nahe kommen (0,81 bei $\lambda = 18 \mu$).

Dies ist die Erklärung für die Tatsache, daß sich der Auerbrenner so vortrefflich als Strahlungsquelle bei Versuchen mit Wärmestrahlen von großer Wellenlänge bewährt hat. Nicht nur sendet er diese Strahlen infolge seiner hohen Temperatur, seiner großen Oberfläche und seines in diesem Spektralgebiet sehr beträchtlichen Emissionsvermögens in großer Menge aus, sondern er bietet noch den weiteren Vorteil, daß die kurzwelligen Wärmestrahlen, welche in anderen Lichtquellen von hoher Temperatur in überwiegender Stärke vorhanden sind und sich sehr störend bemerkbar machen, bei dem Auerbrenner fast vollkommen fehlen. Besonders bei der Erzeugung von Reststrahlen ist diese Eigenschaft von erheblichem Nutzen. Wie ich bereits früher mitgeteilt habe, erhält man bereits nach dreimaliger Reflexion der von dem Auerbrenner ausgesandten Strahlung an Flußspatflächen sehr reine Reststrahlen und zwar in einer Stärke, welche ca. 1,7 Proz. der Gesamtstrahlung beträgt. Ein voll-

1) E. Köttgen, Wied. Ann. 53. p. 800. 1894 und W. Nernst u. E. Bose, Physik. Zeitschr. 1. p. 289. 1900.

kommen schwarzer Körper von 1800° abs. würde unter den gleichen Umständen weniger als 1 Promille Reststrahlung ergeben.[1])

Aber auch für die Lichtwirkung des Auerstrumpfes ist sein geringes Emissionsvermögen in dem Spektralgebiet zwischen 1 μ und 5 μ von entscheidender Bedeutung. Hierdurch wird der Wärmeverlust des Strumpfes durch Ausstrahlung auf ein sehr geringes Maß reduziert, und das Wärmegleichgewicht findet bei einer außerordentlich hohen Temperatur von ca. 1800° abs. statt. Wie sehr eine Erhöhung des Emissionsvermögens in dem genannten Spektralgebiet die Glühtemperatur herabdrückt und den Lichteffekt vermindert, geht aus dem Versuch mit dem „entleuchteten" Strumpf deutlich hervor. Jedenfalls besitzt der Auerstrumpf infolge seiner hohen Temperatur und geringen Emission dunkler kurzwelliger Wärmestrahlen einen ungemein günstigen optischen Wirkungsgrad. Rechnet man das sichtbare Spektrum von 0,4 bis 0,7 μ, so sind nahezu 2 Proz. der Gesamtstrahlung des Auerstrumpfes sichtbar. Für einen schwarzen Körper gleicher Temperatur würde der Anteil an sichtbaren Strahlen nur einige Promille betragen.

Auf Grund seiner optischen Versuche kommt Hr. E. St. John zu dem Ergebnis, das Prinzip des Auerschen Brenners scheine darin zu bestehen, „daß ein feuerbeständiger Glühkörper von kleiner Masse, kleiner Wärmeleitung, großer Oberfläche und großem (optischem) Emissionsvermögen in dem heißesten Teil der Bunsenschen Flamme zum Glühen erhitzt wird." Diese Bedingungen sind für das Zustandekommen des hohen Lichteffektes zwar notwendig, aber nicht ausreichend. Sowohl die Herren Le Chatelier und Boudouard[2]) als auch

---

1) Die von mir (Wied. Ann. **69.** p. 588. 1899) gemachten Angaben sind insofern einer Korrektion bedürftig, als dort die Temperatur des Auerstrumpfes noch viel zu hoch, nämlich zu 2000° abs. angenommen ist. Ferner wurde damals noch die Wiensche Formel zur Berechnung herangezogen, welche, wie sich später ergeben hat, gerade für hohe Temperaturen und große Wellenlängen sehr unrichtige Resultate liefert. Die Plancksche heute als gültig anerkannte Spektralgleichung ist erst ein Jahr später (Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. **2.** p. 202) veröffentlicht worden.

2) Le Chatelier u. Boudouard, Compt. rend. **126.** p. 1861. 1898.

die Herren Nernst und Bose[1]) haben bereits aus optischen Versuchen, insbesondere aus der Abnahme des Emissionsvermögens im Auerbrenner von Blau nach Rot hin, den Schluß gezogen, daß ein für die optische Wirkung des Auerbrenners wesentliches Moment seine vermutlich sehr geringe ultrarote Wärmestrahlung sei. Diese Ansicht hat durch die vorstehenden Versuche eine durchgreifende Bestätigung erfahren.

Es bleibt nun noch die Frage zu erörtern, in welcher Weise die eigenartige für die Leuchttechnik so günstige spektrale Verteilung des Emissionsvermögens im Auerbrenner zustande kommt, bez. welche Rolle die beiden Bestandteile der Strumpfmasse hierbei spielen. Hierüber geben die zu Anfang erwähnten Versuche des Hrn. Langley bereits einen wertvollen Aufschluß. Es ergab sich nämlich, daß ein Petroleumglühlichtbrenner mit reinem Thoriumoxydstrumpf ein Emissionsspektrum liefert, welches im ganzen dem des normalen Auerbrenners sehr ähnlich ist und sich hauptsächlich nur im sichtbaren Gebiet von letzterem unterscheidet. Ich habe diesen Versuch für Gasglühlichtbrenner wiederholt und bis zur Wellenlänge 18 μ die Messungen ausgedehnt. Der hierbei benutzte Strumpf aus reinem Thoriumoxyd, sowie der weiter unten erwähnte äußerst zerbrechliche Ceriumoxydstrumpf wurden von der Deutschen Gasglühlicht-A.-G. aus möglichst reinem Material im physikalischen Laboratorium der Techn. Hochschule hergestellt. Es sei mir gestattet, der genannten Firma für die mir geleistete Hilfe bestens zu danken.

Kurve *a*, Taf. VI (ausgezogen) und Kurve *g* (punktiert) entsprechen den Emissionsspektren des Gasglühlichtbrenners mit normalem Auerstrumpf und mit reinem Thoriumoxydstrumpf. Die Unterschiede zwischen beiden Kurven sind im allgemeinen nicht viel größer als bei der Aufnahme verschiedener Exemplare derselben Strumpfart. Nur in dem Spektralgebiet zwischen $\lambda = 0,45$ und $1,5\,\mu$ unterscheiden sie sich sehr bedeutend. In der Emission des reinen Thoriumoxydstrumpfes fehlt das sichtbare Spektrum fast ganz und das kurzwellige Ultrarot ist sehr schwach. An keiner Stelle des $3\frac{1}{2}$ Oktaven umfassenden Spektralgebietes zwischen 0,45 und 5,0 μ über-

1) W. Nernst u. E. Bose, Physik. Zeitschr. 1. p. 289. 1900.

steigt das Emissionsvermögen den Wert 0,02. Erst im Gebiet großer Wellenlängen ergeben sich, ähnlich wie bei dem Auerstrumpf, große Emissionsvermögen.

Einen ganz anderen Anblick gewährt das Emissionsspektrum des Gasglühlichtbrenners mit reinem Ceriumoxydstrumpf (Kurve *h*). Hier ist wie bei dem Eisenoxydstrumpf infolge der starken Wärmeausstrahlung, die Temperatur eine viel niedrigere als bei dem normalen Auerstrumpf. Mit dem optischen Pyrometer gemessen ergab sich die Temperatur der untersuchten Strumpfstellen zu 1050 bis 1100° C. im Mittel 1075° C., also angenähert zu $\vartheta = 1350°$ abs. Berechnet man, nachdem man die Emissionsmaxima der Flamme durch graphische Interpolation überbrückt hat, in derselben Weise, wie dies oben für den Auerstrumpf geschehen ist, das Emissionsvermögen des Ceriumoxydstrumpfes, so gelangt man zu den in der Tab. III zusammengestellten Zahlen. Kurve *i* ist die hierbei benutzte Energiekurve des schwarzen Körpers von 1350° abs. Ihre Fläche verhält sich zu derjenigen der Kurve *h* wie die Gesamtstrahlungen der beiden Lichtquellen, gleiche Massenverteilung vorausgesetzt (vgl. p. 732).

Tabelle III.

λ	Schwarzer Körper bei 1350° abs.	Ceriumoxydstrumpf	Emissionsvermögen	λ	Schwarzer Körper bei 1350° abs.	Ceriumoxydstrumpf	Emissionsvermögen
0,7 μ	6,7	6,2	0,93	5,0 μ	269	54	0,20
1,0	121	42,7	0,35	6,0	165	25,7	0,16
1,5	604	111	0,18	8,0	69,3	29	0,42
2,0	889	200	0,22	10,0	33,5	28	0,84
2,5	889	182	0,21	12,0	18,2	18	0,99
3,0	736	140	0,18	15,0	8,2	8,2	1,00
4,0	452	90	0,20	18,0	4,22	3,7	0,88

Man ersieht hieraus, daß das Emissionsvermögen des Ceriumoxydstrumpfes zwar an allen Stellen des Spektrums beträchtlich ist, aber dennoch nur im sichtbaren Gebiet und im Ultrarot von $\lambda = 10\,\mu$ ab Werte besitzt, welche der 1 nahe kommen. Jedenfalls ist das Absorptionsvermögen dieser Sub-

stanz bei sehr kurzen und sehr langen Wellen außerordentlich viel größer als in dem Mittelgebiet zwischen $\lambda = 1$ und $8\,\mu$. Man kann es sich daher leicht vorstellen, daß ein geringer Zusatz von Ce_2O_3 zu dem ThO_2 genügt, um das gewünschte hohe Emissionsvermögen im sichtbaren Spektralgebiet hervorzubringen, ohne daß dadurch das Emissionsvermögen im Ultrarot zwischen 1 und $8\,\mu$ wesentlich beeinflußt wird. Fernerhin ist es einleuchtend, daß eine stärkere Beimischung von Ceriumoxyd schädlich wirken muß, weil sich dann der Einfluß dieses Färbungsmittels auch bei längeren Wellen durch Erhöhung des Emissionsvermögens fühlbar macht. Hierdurch wird aber, wie wir gesehen haben, die ultrarote Wärmestrahlung vermehrt und die Glühtemperatur erniedrigt. In der Praxis hat sich bekanntlich ein Ceriumoxydgehalt von weniger als 1 Proz. am günstigsten erwiesen.

Das Ceriumoxyd spielt also in dem Auerschen Brenner eine ähnliche Rolle wie ein Sensibilisator in einer photographischen Platte, indem es an einer gewünschten Stelle des Spektrums einen Absorptionsstreifen hervorbringt, ohne die übrigen Spektralgebiete zu beeinflussen. Allerdings erfüllt es diese Bedingung nur mangelhaft. Wenn es gelänge, eine andere Substanz als Färbungsmittel zu verwenden, welche den Thoriumoxydstrumpf nicht nur im kurzwelligen Teil des sichtbaren Spektrums, sondern auch im Gelb und Rot vollkommen schwärzt, ohne die ultrarote Ausstrahlung erheblich zu vermehren, so würde sich hierdurch die Lichtwirkung des Gasglühlichtbrenners ungefähr verdreifachen lassen.

Berlin, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule, Oktober 1905.

(Eingegangen 2. Oktober 1905.)

4. *Über die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes;*
von L. Holborn und F. Henning.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Unsere Kenntnis über die spezifische Wärme der Gase beruht einerseits auf kalorimetrischen Messungen, die bis 200° reichen, anderseits auf Explosionsversuchen, die sich auf Temperaturen über 1200° beziehen. Um die große Lücke zwischen den beiden Reihen auszufüllen, sind die kalorimetrischen Messungen zunächst für Luft, Stickstoff und Kohlensäure bis 800° weitergeführt.[1]) Wir schließen hieran nun die Untersuchung des Wasserdampfes, für den das Beobachtungsmaterial am spärlichsten war. Denn während die spezifische Wärme bei den oben genannten Gasen wenigstens in zwei Temperaturintervallen, von 10 bis 100° und von 10 bis 200° gemessen, und damit ein Anhalt für die Änderung mit der Temperatur gewonnen war, ist der Wasserdampf von Regnault[2]) nur zwischen 128 und 217° untersucht worden. Der von ihm bestimmte Wert 0,480 bildete bisher die Grundlage für alle wissenschaftlichen und technischen Anwendungen.

Erst neuerdings ist die Messung der spezifischen Wärme des Wasserdampfes in dem für die Dampfmaschinen wichtigen Temperaturgebiet wieder in Angriff genommen. So haben Grindley[3]) und später Griessmann[4]) die spezifische Wärme

---

1) L. Holborn u. L. Austin, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 175. 1905 und Wissensch. Abhandl. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt 4. p. 131. Auf die letzte Stelle wird in der Folge öfter verwiesen.

2) V. Regnault, Rel. des Expér. 2. p. 167.

3) J. Grindley, Phil. Trans. 194 A. p. 1. 1900.

4) A. Griessmann, Forschungsarbeiten, herausgeg. vom Verein deutsch. Ing. Heft 13. p. 1. 1904..

aus dem Verlauf der Drosselkurven mit Hilfe der Regnaultschen Tabelle für die Gesamtwärme zu bestimmen gesucht, während Lorenz[1]) und Peake[2]) kalorimetrische Messungen nach verschiedenen Strömungsmethoden angestellt haben.

Regnault benutzte für seine Untersuchung das Wasserkalorimeter, das sich auf Zimmertemperatur befand. Das hatte den Nachteil, daß sich der Dampf in dem Kalorimeter kondensierte und außer der spezifischen Wärme des Dampfes seine latente Wärme und die Flüssigkeitswärme in die Messung eingingen, deren Genauigkeit dadurch etwa auf den zehnten Teil herabgesetzt wird. Diesem Übelstande suchte Regnault in bekannter Weise dadurch zu begegnen, daß er den Dampf einmal mit der Temperatur von 128°, sodann mit 217° in dasselbe Kalorimeter strömen ließ. Aus der Differenz der abgegebenen Wärmemengen folgt dann die spezifische Wärme des Dampfes.

Wir haben die Messung dadurch vereinfacht, daß die Temperatur des Kalorimeters, das statt Wasser Paraffinöl enthält, ständig über 100° gehalten wird, so daß sich der Dampf nicht kondensiert. Auf diese Weise kann seine spezifische Wärme durch *eine* Messung ebenso genau bestimmt werden, wie die eines nicht kondensierenden Gases.

Versuchsanordnung.

Der Wasserdampf wurde in einem Dampftopf von 12 Liter Inhalt erzeugt und trat zunächst in einen Wasserabscheider. Hieran schloß sich für die Überhitzung unmittelbar dasselbe elektrisch geheizte Nickelrohr *A* (Fig. *a* und *b*), welches früher für die Gasversuche gedient hatte (l. c. p. 135). Auch das silberne Kalorimeter *K*, in dem der Dampf drei mit Silberspänen gefüllte silberne Röhren zur Abgabe seiner Wärme passiert, war dasselbe wie früher. Es war mit Paraffinöl gefüllt und enthielt außer dem Platinthermometer *Thp* und einem Quecksilberthermometer *Th* für später zu besprechende Zwecke noch einen Widerstand *H* aus 0,5 mm starkem blanken Konstantandraht,

1) H. Lorenz, Forschungsarbeiten, herausgeg. vom Ver. deutscher Ing. Heft 21. p. 93. 1905.

2) A. H. Peake, Proc. Roy. Soc. 76 A. p. 185. 1905.

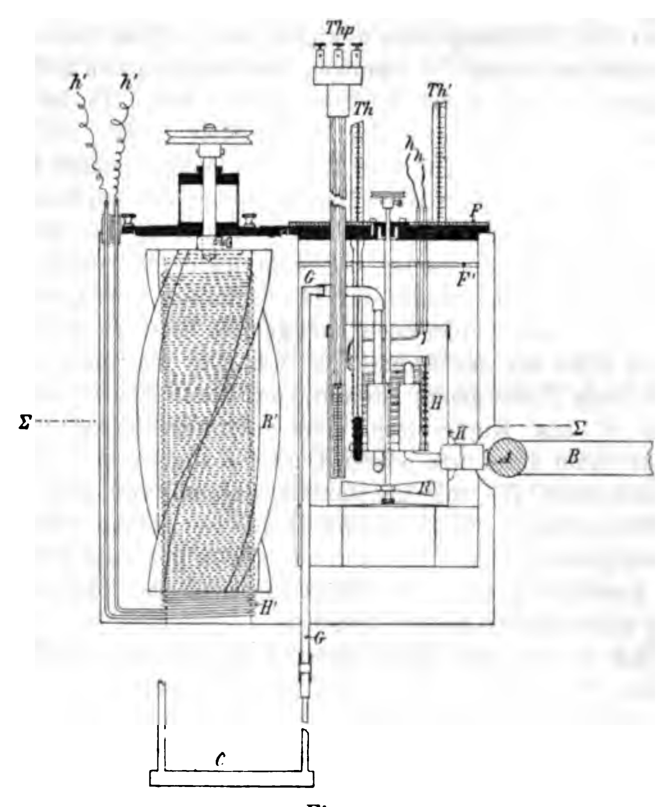


Fig. *a*.

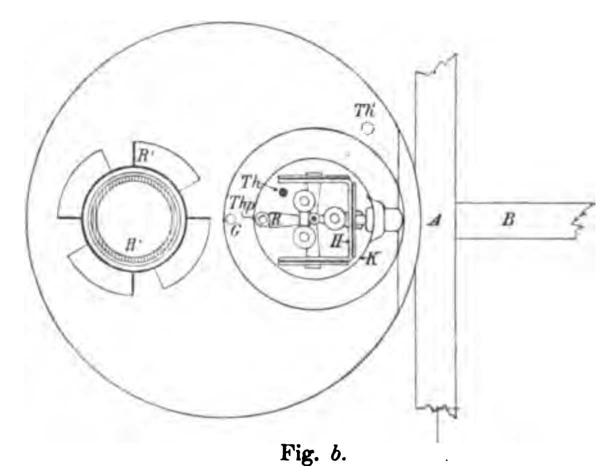


Fig. *b*.

$^1/_5$ natürlicher Größe.

der auf drei Glimmerplatten gewickelt war. Diese waren oben und unten an einem ⊓-förmigen Messingrähmchen befestigt; die vierte Seite blieb für die Thermometer frei. (In der Figur ist das Platinthermometer der Deutlichkeit halber näher an die Wand gerückt.) Die drei Teile des Drahtes waren hintereinander geschaltet; der Widerstand zwischen den kupfernen Zuleitungen hh betrug 7,622 Ohm bei 20° und 7,596 Ohm bei 110°.

Der Kalorimetermantel, der während der Versuche durch elektrische Heizung ständig auf 115° gehalten wurde, war neu hergestellt. Aus Kupferblech hart gelötet hatte er eine etwas größere Höhe als der frühere, so daß man über dem Kalorimeter noch Platz genug gewann, um durch einen Zwischendeckel F' aus Kupferblech einen wärmeisolierenden Luftzwischenraum unter dem oberen Deckel F abgrenzen zu können. Die Heizspule H' aus Konstantandraht ist auf einen Tonzylinder gewickelt, der auf ein am Boden fest gelötetes Messingrohr aufgesteckt wird. Der schraubenartig geformte Rührer R' wird gleichzeitig mit dem Flügelrührer R des Kalorimeters durch einen Elektromotor betrieben.

Der mit 9 Liter Rüböl gefüllte Mantel steht auf einem eisernen Dreifuß und wird vor Beginn einer Versuchsreihe mit einem Bunsenbrenner auf 115° erwärmt. Hierauf wird dieser weggenommen, und die elektrische Heizung beginnt. Um die Temperatur in der Nähe von 115° konstant zu halten, war ein Strom von 3,2 Amp. nötig. Dieser wurde der Lichtbatterie des Hauses entnommen. Trotzdem deren Spannung infolge anderweitiger Benutzung zuweilen schwankte, ließ sich die Temperatur, die an dem in $^1/_{10}$° geteilten Thermometer Th' abgelesen wurde, mit einiger Regulierung ohne Schwierigkeit auf einige Hundertstel Grad während der Dauer eines Versuchs konstant halten.

Das Kalorimeter mußte meistens durch die Spule H besonders angeheizt werden, da es wegen der isolierenden Luftschicht dem Mantel nur langsam folgte. Wenn es auf etwa 102° gekommen war, so stellte man den Strom in Spule H ab und begann alsdann nach einiger Zeit mit der Beobachtung der Vorperiode.

Den Gang des Kalorimeters hätte man dadurch verkleinern können, daß man die durch die Rohrleitung zugeführte Wärme

durch Ausstrahlung an den tiefer zu temperierenden Mantel kompensierte. Doch wurde davon Abstand genommen, um den aus dem Kalorimeter austretenden Wasserdampf auch innerhalb des Mantels noch vor Kondensation zu schützen. Der Dampf strömte durch das Kupferrohr *G*, das, mittels Gummiverbindung an das Silberrohr gefügt, zunächst in dem Luftraum neben dem Kalorimeter nach unten verlief und dann den Boden des Mantels durchsetzte. An die äußere Mündung konnte das mit Eiswasser gekühlte Kondensationsgefäß angesetzt werden. Als solches diente eine flache Kapsel *C* aus Messingblech, die zwei Ansatzröhren besaß. Eine davon diente als Zuleitung für den Dampf, während die andere die Verbindung mit der Atmosphäre vermittelte.

Die Temperatur des Kalorimeters ließen wir meistens nicht über 120° hinausgehen. War diese Grenze erreicht, so wurde vor Beginn eines neuen Versuchs wieder bis auf etwa 102° abgekühlt. Zu diesem Zweck konnte je ein Segment der Deckel *F* und *F'* ohne Entfernung der Thermometer und des Rührers *R* abgenommen und durch die Öffnung eine von kaltem Wasser durchströmte Kapsel aus Kupferblech an das Kalorimeter von außen angelegt werden. Schneller wirkte freilich eine Kühlröhre, die bei den Vorversuchen an Stelle eines Thermometers in das Paraffinöl getaucht wurde. Hierbei änderte sich jedoch einmal die Menge des Öles infolge der Benetzung der Röhre, sodann überzog sich auch die äußere Seite des Kalorimeters durch abtropfendes Öl bald mit dieser Flüssigkeit, was Unregelmäßigkeiten im Temperaturgang hervorrief. Bei dem anderen Verfahren blieb das Kalorimeter auf die Dauer von außen trocken, nur der Deckel überzog sich im Laufe der Zeit mit einer schwachen Ölschicht, die sich allmählich an dem Rührer *R* heraufgezogen hatte.

Die Temperatur des Kalorimeters wurde anfangs nur mit dem Platinthermometer Nr. 6 gemessen. Das Glimmerkreuz, auf den der 0,1 mm dicke Platindraht gewickelt war, befand sich zum Schutze gegen mechanische Störungen in einem 8 mm weiten, mehrfach durchlöcherten Glasrohr, so daß der Widerstand unmittelbar in das Paraffinöl tauchte. Änderungen des Nullpunktes sind während der Versuchsdauer nicht vorgekommen. Der Widerstand ergab sich bei wiederholter Prüfung

bei 0° zu $R_0 = 11{,}174$, bei 100° zu $R_{100} = 15{,}520$ Ohm. Die Temperatur wurde nach der Gleichung

$$t = \frac{R_t - R_0}{R_{100} - R_0} + 1{,}50 \left\{ \left(\frac{t}{100}\right)^2 - \frac{t}{100} \right\}$$

berechnet, die sich aus der Vergleichung mit den früher an das Stickstoffthermometer angeschlossenen Platinthermometern[1]) ergeben hatte.

Später wurde mit dem Richterschen Quecksilberthermometer *Th* beobachtet, das von 100 bis 130° in $^1/_{10}$° geteilt und über dem Faden mit Luft gefüllt war. Es wurde öfter mit dem Platinthermometer verglichen, das immer das Normal bildete und zu diesem Zweck ständig mit im Kalorimeter verblieb.

Die Temperatur des Wasserdampfes wurde vor dem Eintritt in das Kalorimeter mit einem Thermoelement bestimmt, das sich im Ansatzrohr *B* befindet. Diese Messung erfordert, wie früher angegeben (l. c. p. 140), eine umständliche Regulierung der Heizung mit verschiedenen Spulen. Wir haben uns hiervon frei gemacht, indem wir darauf verzichteten, die spezifische Wärme des Wasserdampfes absolut zu messen. Denn da es ausgeschlossen war, daß wir hierbei eine größere Genauigkeit erzielten als früher mit Luft, so haben wir es vorgezogen, neben Wasserdampf stets noch Luft zu beobachten und auf diese Weise das Verhältnis der spezifischen Wärmen von Luft und Wasserdampf zu bestimmen.

Die relative Messung ist genauer als die absolute, da das Thermoelement im ersten Fall nur soweit in Geltung kommt, als es die geringen Temperaturunterschiede angibt, die von einer etwas verschiedenen Temperatur des Nickelrohres herrühren können. Der Heizzustand des Nickelrohres bestimmt nämlich im wesentlichen die Temperatur des Gases bei dem Eintritt ins Kalorimeter und läßt sich durch den elektrischen Strom in derselben Höhe und Verteilung wieder herstellen. Daß das Resultat auch von der Stärke des Gasstromes in gewissen Grenzen unabhängig ist, ergaben besondere Versuche. Doch haben wir bei Wasserdampf meistens nur halb so große Gewichtsmengen gewählt als bei Luft, so daß in beiden Fällen ungefähr gleiche Wärmemengen dem Kalorimeter zugeführt wurden.

1) L. Holborn, Ann. d. Phys. **6.** p. 242. 1901.

Die Luft wurde in derselben Weise wie früher nach ihrem Durchgang durch das Kalorimeter in einem Gasometer aufgefangen und gemessen, während die Menge des Wasserdampfes durch Wägung in dem Kondensationsgefäß bestimmt wurde. Besondere Messungen ergaben, daß das Gas bei dem Durchströmen der Röhren im Kalorimeter seine Wärme vollständig abgibt.

Beobachtungen.

Tab. I enthält die Vergleichungen des Quecksilberthermometers mit dem Platinwiderstand. Der Unterschied Δt zwischen beiden wird durch die Formel

$$t - t' = \Delta t = 0{,}290 + 0{,}024\,(t' - 110^0)$$

dargestellt, die für die ganze Dauer der Versuche zutrifft.

Tabelle I.

1905	t Platin	t' Quecksilber	Δt beob.	Δt beob.-ber.
18. Mai	103,74°	103,60°	0,14°	0,00°
	110,40	110,11	0,29	0,00
	117,32	116,86	0,46	+0,01
	103,70	103,55	0,15	+0,01
	112,68	112,30	0,38	+0,03
	119,74	119,20	0,54	+0,03
26. Mai	104,40	104,26	0,14	−0,01
	111,31	111,01	0,30	−0,01
	118,43	117,96	0,47	−0,01
	103,25	103,15	0,10	−0,03
	112,24	111,91	0,33	−0,01
	117,56	117,10	0,46	0,00
3. Juni	103,87	103,77	0,10	−0,04
	113,34	112,95	0,39	+0,03
	118,78	118,30	0,48	−0.01
	104,09	103,95	0,14	0,00
	111,49	111,18	0,31	−0,01
	119,15	118,68	0,47	−0,03
4. Juli	102,40	102,30	0,10	−0,01
	107,99	107,73	0,26	+0,02
	112,37	112,04	0,33	−0,01
	115,83	115,42	0,41	−0,01
	118,49	117,98	0,51	+0,03
	110,81	110,50	0,31	+0,01
	118,56	118,09	0,47	−0,01

Die mittlere Abweichung der berechneten von den beobachteten Werten beträgt etwa $\pm 0{,}02^0$. Es ist dies die Genauigkeit, mit der das Platinthermometer bei der benutzten Schaltung gemessen werden konnte. Die Korrektion des Quecksilberthermometers rührt teils von dem herausragenden Faden der Teilung, teils von der stärkeren Verbindungskapillare zwischen Gefäß und Teilung her.

Für die Verwendbarkeit des Ölkalorimeters war es von besonderer Wichtigkeit, zu prüfen, wieweit die spezifische Wärme des Paraffinöles bei wiederholter Erhitzung konstant bleibt. Deshalb ist der Wasserwert im Laufe der Untersuchung häufiger auf elektrischem Wege bestimmt worden. Zu diesem Zweck diente die Spule H, deren Stromstärke ein Zeigergalvanometer angab. Das Heizrohr erwärmten wir bei diesen Messungen auf 450 oder 270°, um die Beobachtungen bei einem ähnlichen Temperaturgang des Kalorimeters anstellen zu können wie bei den Gasdurchgängen. Wir setzen 1 Wattsek. gleich 0,239 Kalorie.

Tab. II enthält die Bestimmungen. Es bedeutet

t_0 die Temperatur des Mantels,
z die Dauer des Stromes in Minuten,
i die Stromstärke,
θ_1 die Temperatur des Heizrohres,
θ_2 die mittlere Temperatur des Kalorimeters,
ϑ seine Temperaturerhöhung,
t_1 und t_2 den mittleren Temperaturgang (für die Minute) in der Vor- und Nachperiode,
k die Korrektion wegen des Temperaturganges, die in bekannter Weise graphisch aus t_1 und t_2 abgeleitet wurde,
ϑ' die korrigierte Temperaturerhöhung des Kalorimeters,
w den Wasserwert.

Dieser wird durch die Formel

$$w = 251{,}2\,(1 + 0{,}002\,(\theta_2 - 110^0))$$

wiedergegeben. Die in der letzten Kolumne aufgeführten Abweichungen der beobachteten Werte von der Formel betragen im Mittel etwa 0,5 Proz. und zeigen keinen Gang.

Auch die Regelmäßigkeit, mit welcher der Temperaturgang des Kalorimeters während der einzelnen Beobachtungssätze verläuft, spricht dafür, daß das Ölkalorimeter über 100°

für unsere Zwecke das Wasserkalorimeter bei Zimmertemperatur ersetzen kann. Notwendig ist hierfür, daß das käufliche Öl vor dem Gebrauch auf höhere Temperatur lange Zeit erhitzt wird, wobei die flüchtigen Verbindungen herausdampfen.

Bei der Bestimmung des Verhältnisses der spezifischen Wärmen von Luft und Wasserdampf wurden die beiden abwechselnd beobachtet, um etwa auftretende Veränderungen des Apparates zu eliminieren. Es wurde in den Temperaturintervallen 110—270, 110—440, 110—620 und 110—820° gemessen. Bei den kleineren Temperaturbereichen sind zahlreichere Messungen angestellt, weil hier zunächst das Kalorimeter auszuprobieren war. Dies brauchte hier erst nach mehreren Versuchen abgekühlt zu werden, während es für die hohe Gastemperatur einen etwas kleinen Wasserwert hatte und nach einem einzigen Versuch schon auf die maximale Temperatur kam.

Tabb. III—VI enthalten die Beobachtungen. Es bezeichnet hier z die Strömungszeit der Luft bez. des Wasserdampfes, θ_1 ihre mit dem Thermoelement gemessene Temperatur vor dem Eintritt ins Kalorimeter und m ihre Mengen in Gramm. Die übrigen Bezeichnungen sind dieselben wie in Tab. II. Um die Übereinstimmung der Einzelwerte untereinander zu zeigen, sind hieraus zunächst die Werte c' für die spezifische Wärme berechnet. Am Ende jeder Tabelle ist dann das aus dem Mittel von c' berechnete Verhältnis der spezifischen Wärme von Wasserdampf und Luft angegeben.

Zur Bestimmung von θ_1 diente dasselbe Thermoelement aus 0,25 mm starkem Platin- und Platinrhodiumdraht wie früher, dessen Lötstelle gegen Strahlung durch ein Hütchen aus Platinfolie geschützt war. Die Anwendung eines ähnlich angeordneten Elementes aus 0,1 mm dickem Draht gab keine Änderung der Gastemperatur für dieselbe elektrische Heizung des Nickelrohres. Versuchsweise wurde alsdann die Lötstelle des dünnen Elementes ohne Strahlungsschutz gelassen. Bei 300° änderte sich hierdurch der Wert von θ_1 nicht merklich, während er bei 800° um 40° niedriger ausfiel. Dies traf aber in gleicher Weise bei Luft und Wasserdampf zu, so daß das Verhältnis ihrer spezifischen Wärmen sowohl bei 300° wie bei 800° bis auf 1 Proz. dasselbe gab wie vorher.

22. Juni	115,2	4	2,156	270	108,8	8,558	0,1614	0,0237	0,562	7,996	253,3	+2,7
	115,2	4	2,155		117,1	7,518	0,0237	−0,0752	−0,358	7,876	256,9	+2,2
	115,2	7	1,582		107,3	8,632	0,1766	0,0471	0,976	7,656	249,3	−0,6
	115,1	4	1,582		114,4	4,344	0,0471	−0,0183	0,018	4,326	252,1	−1,3
	115,0	5	1,582		106,9	6,145	0,1498	0,0589	0,692	5,453	250,0	+0,3
	115,0	5	1,582		113,3	5,412	0,0589	−0,0167	0,013	5,399	252,5	−0,3
4. Juli	114,9	4	1,411	270	105,6	4,158	0,1636	0,0861	0,702	3,456	251,0	+2,0
	115,0	4	1,410		110,4	3,752	0,0861	0,0354	0,282	3,470	249,6	−1,8
	115,0	4	1,411		114,3	3,404	0,0354	−0,0229	−0,021	3,425	253,3	0,0
	115,0	4	1,411		117,3	3,092	−0,0229	−0,0649	−0,309	3,401	255,0	+0,2
	115,0	3	2,169		107,3	6,548	0,1520	0,0485	0,420	6,128	250,9	+1,0
	115,1	4	2,165		115,0	7,876	0,0485	−0,0635	−0,165	8,041	254,0	+0,3
7. Juli	115,0	6	1,932	270	109,3	10,126	0,1556	−0,0084	0,416	9,710	251,2	+0,3
	115,1	4	1,932		106,9	7,042	0,1655	0,0490	0,544	6,498	250,3	+0,6
	115,0	4	1,932		114,1	6,338	0,0490	−0,0434	−0,083	6,421	253,3	+0,1
	115,0	4	1,933		107,9	6,966	0,1486	0,0356	0,454	6,512	250,0	−0,2
	115,1	4	1,931		114,9	6,225	0,0356	−0,0669	−0,192	6,417	253,2	−0,4

Tabelle II.
Wasserwert des Kalorimeters.

1905	t_0	z (Min.)	i (Amp.)	θ_1	θ_2	ϑ	τ_1	τ_2	k	ϑ'	w beob.	w beob.-ber.
5. Mai	115,1°	4	2,115	450°	109,2°	8,48°	0,198°	0,060°	0,68°	7,80°	249,9	−0,9
	115,1	3	2,112		117,1	5,82	0,060	−0,021	0,06	5,76	253,1	−1,6
	115,0	4	2,116		107,6	8,62	0,214	0,076	0,80	7,82	249,5	−0,5
	115,1	4	2,115		116,7	7,80	0,076	−0,024	0,10	7,70	253,1	−1,4
16. Mai	115,0	4	2,110	450	110,9	8,18	0,165	0,038	0,54	7,64	253,9	+2,3
	115,0	4	2,108		119,2	7,39	0,038	−0,066	−0,14	7,53	257,1	+1,3
	114,9	4	2,110		110,7	8,20	0,163	0,032	0,52	7,68	252,6	+1,1
	114,9	4	2,108		119,0	7,37	0,032	−0,063	−0,14	7,51	257,7	+2,0
18. Mai	115,0	3	2,061	270	107,3	5,869	0,1220	0,0321	0,813	5,556	249,8	−0,1
	115,0	4	2,071		114,1	7,164	0,0321	−0,0659	−0,222	7,386	253,0	−0,2
	114,8	4	2,182		108,2	8,485	0,1073	−0,0079	0,235	8,250	251,4	+1,1
	114,9	4	2,180		116,5	7,714	−0,0079	−0,1009	−0,422	8,136	254,5	+0,1
26. Mai	114,9	3	2,152	270	108,1	6,336	0,1039	0,0107	0,241	6,095	248,8	−2,0
	114,9	4	2,153		115,2	7,593	0,0107	−0,0876	−0,405	7,998	252,5	−1,3
	115,0	4	2,154		108,0	8,392	0,1158	−0,0005	0,268	8,124	248,8	−1,4
	115,0	3	2,152		115,1	5,747	−0,0005	−0,0706	−0,224	5,971	253,4	−0,3

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	270	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	115,1	3	2,181		115,8	5,821	0,0079	−0,0659	−0,262	6,083	255,5	+1,4
	114,9	3	2,183		108,0	6,623	0,1324	0,0350	0,365	6,258	248,8	−1,4
	115,2	4	2,180		115,6	7,898	0,0350	−0,0672	−0,274	8,172	253,4	−0,6
22. Juni	115,2	4	2,156	270	108,8	8,558	0,1614	0,0237	0,562	7,996	253,3	+2,7
	115,2	4	2,155		117,1	7,518	0,0237	−0,0752	−0,358	7,876	256,9	+2,2
	115,2	7	1,582		107,3	8,632	0,1766	0,0471	0,976	7,656	249,3	−0,6
	115,1	4	1,582		114,4	4,344	0,0471	−0,0183	0,018	4,326	252,1	−1,3
	115,0	5	1,582		106,9	6,145	0,1498	0,0589	0,692	5,453	250,0	+0,3
	115,0	5	1,582		113,3	5,412	0,0589	−0,0167	0,013	5,399	252,5	−0,3
4. Juli	114,9	4	1,411	270	105,6	4,158	0,1636	0,0861	0,702	3,456	251,0	+2,0
	115,0	4	1,410		110,4	3,752	0,0861	0,0354	0,282	3,470	249,6	−1,8
	115,0	4	1,411		114,3	3,404	0,0354	−0,0229	−0,021	3,425	253,3	0,0
	115,0	4	1,411		117,3	3,092	−0,0229	−0,0649	−0,309	3,401	255,0	+0,2
	115,0	3	2,169		107,3	6,548	0,1520	0,0485	0,420	6,128	250,9	+1,0
	115,1	4	2,165		115,0	7,876	0,0485	−0,0635	−0,165	8,041	254,0	+0,3
7. Juli	115,0	6	1,932	270	109,3	10,126	0,1556	−0,0084	0,416	9,710	251,2	+0,3
	115,1	4	1,932		106,9	7,042	0,1655	0,0490	0,544	6,498	250,3	+0,6
	115,0	4	1,932		114,1	6,338	0,0490	−0,0434	−0,083	6,421	253,3	+0,1
	115,0	4	1,933		107,9	6,966	0,1486	0,0356	0,454	6,512	250,0	−0,2
	115,1	4	1,931		114,9	6,225	0,0356	−0,0669	−0,192	6,417	253,2	−0,4

Tabelle III.

Mittlere spezifische Wärme zwischen 110 und 270°.

1905	t_0	z (Min.)	m (g)	θ_1	θ_2	ϑ	τ_1	τ_2	k	ϑ'	c'
					Luft.						
19. Mai	115,0°	3	21,43	270,0°	110,8°	**3,18°**	**0,056°**	**0,002°**	**0,10°**	**3,08°**	**0,2271**
	115,0	3	22,18	272,6	114,0	**3,10**	**0,002**	**−0,033**	**−0,10**	**3,20**	**0,2303**
	115,1	3	23,42	274,4	116,7	**3,08**	**−0,033**	**−0,064**	**−0,28**	**3,36**	**0,2315**
20. Mai	115,0	3	22,94	270,2	106,8	**3,789**	**0,1116**	**0,0485**	**0,358**	**3,431**	**0,2285**
	115,0	3	21,91	273,1	110,9	**3,360**	**0,0485**	**0,0004**	**0,086**	**3,274**	**0,2318**
	115,0	3	23,55	274,5	114,3	**3,297**	**0,0004**	**−0,0394**	**−0,130**	**3,427**	**0,2301**
	114,9	2	14,34	275,7	116,4	**1,878**	**−0,0394**	**−0,0579**	**−0,209**	**2,087**	**0,2324**
	115,0	3	18,39	269,8	105,5	**3,285**	**0,1244**	**0,0712**	**0,458**	**2,827**	**0,2330**
	115,0	3	22,72	272,5	109,7	**3,589**	**0,0712**	**0,0163**	**0,179**	**3,410**	**0,2315**
	115,0	3	18,38	273,9	113,1	**2,702**	**0,0163**	**−0,0164**	**−0,027**	**2,729**	**0,2333**
	115,0	3	22,22	275,2	115,7	**3,019**	**−0,0164**	**−0,0508**	**−0,212**	**3,231**	**0,2316**
25. Mai	114,9	2,4	17,20	265,2	106,4	**2,837**	**0,1051**	**0,0553**	**0,304**	**2,533**	**0,2313**
	115,1	3	22,80	268,0	110,3	**3,449**	**0,0553**	**0,0043**	**0,113**	**3,336**	**0,2332**
	114,9	3	22,76	269,9	113,6	**3,157**	**0,0043**	**−0,0346**	**−0,110**	**3,267**	**0,2323**
	115,0	3	23,91	267,0	106,1	**3,915**	**0,1082**	**0,0517**	**0,348**	**3,567**	**0,2317**
	115,0	3	20,71	269,1	110,2	**3,176**	**0,0517**	**0,0076**	**0,112**	**3,064**	**0,2340**
	115,1	3	22,18	270,5	113,4	**3,096**	**0,0076**	**−0,0305**	**−0,089**	**3,185**	**0,2312**

22. Mai	115,1°	3	14,02	271,7°	109,5°	4,315°	0,0850°	0,0208°	0,225°	4,090°	0,4514
	115,1	3	12,08	276,2	113,6	3,424	0,0208	−0,0226	−0,041	3,465	0,4463
	115,1	3	12,11	278,9	116,7	3,208	−0,0226	−0,0593	−0,238	3,446	0,4465
	115,0	3	11,92	274,0	106,0	4,015	0,1259	0,0659	0,455	3,560	0,4430
	115,1	3	14,21	276,3	111,0	4,331	0,0659	0,0070	0,126	4,205	0,4506
	115,1	3	14,74	278,6	115,3	4,109	0,0070	−0,0451	−0,146	4,255	0,4486
23. Mai	115,1	3	12,25	267,5	107,5	3,886	0,1101	0,0471	0,353	3,533	0,4506
	115,1	3	13,65	273,0	112,0	3,999	0,0471	−0,0093	0,102	3,897	0,4472
	115,1	3	12,71	275,4	115,6	3,433	−0,0093	−0,0500	−0,183	3,616	0,4522
	114,8	3	13,65	269,4	105,7	4,405	0,1251	0,0580	0,425	3,980	0,4437
	115,1	3	12,40	271,6	110,4	3,726	0,0580	0,0094	0,128	3,598	0,4525
	115,2	3	12,07	273,0	114,0	3,313	0,0094	−0,0431	−0,094	3,407	0,4495
24. Mai	114,9	3	16,61	265,2	107,9	4,983	0,1007	0,0251	0,270	4,713	0,4513
	115,0	3	15,76	270,2	112,8	4,378	0,0251	−0,0292	−0,061	4,439	0,4520
	115,4	3	12,62	267,3	106,6	4,021	0,2160	0,0506	0,349	3,672	0,4517
	115,3	3	16,21	271,1	111,5	4,643	0,0506	−0,0092	0,041	4,602	0,4481
	115,3	3	13,14	272,8	115,5	3,477	−0,0092	−0,0520	−0,201	3,678	0,4518
										Mittel	0,4492

$$\frac{\text{Wasserdampf}}{\text{Luft}} = 1{,}940.$$

	115,0	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	114,9	3	20,05	441,0	108,9	6,74	0,173	0,064	0,51	6,28	0,2346
	115,0	4	22,59	441,6	116,4	6,79	0,064	−0,027	0,08	6,76	0,2341
15. Mai	115,0	4	23,51	444,0	110,6	7,87	0,168	0,046	0,54	7,33	0,2352
	115,1	3	20,31	447,5	118,1	6,19	0,046	−0,040	−0,04	6,23	0,2376
	114,9	3	21,53	445,3	110,1	7,31	0,170	0,055	0,48	6,83	0,2377
	115,0	4	22,31	445,3	117,6	6,71	0,055	−0,033	−0,07	6,78	0,2365
										Mittel	0,2350

Wasserdampf.

12. Mai	115,0°	3	12,30	441,1°	110,2°	7,91°	0,167°	0,042°	0,43°	7,48°	0,4618
	115,0	4	15,77	442,0	119,1	9,01	0,042	−0,087	−0,22	9,23	0,4635
	115,0	4	14,46	442,3	110,2	9,21	0,158	0,027	0,49	8,72	0,4563
	115,0	4	18,00	445,6	120,3	10,18	0,027	−0,118	−0,37	10,55	0,4618
13. Mai	115,1	4	15,53	442,5	112,6	9,76	0,148	0,010	0,39	9,37	0,4618
	115,2	4	16,98	445,1	122,3	9,43	0,010	−0,106	−0,39	9,82	0,4610
	115,0	3	16,48	446,1	111,1	10,38	0,171	−0,020	0,39	9,99	0,4555
	115,1	4	16,55	446,8	121,2	9,31	0,020	−0,097	−0,33	9,64	0,4594
										Mittel	0,4601

$$\frac{\text{Wasserdampf}}{\text{Luft}} = 1{,}958.$$

Tabelle V.

Mittlere spezifische Wärme zwischen 110 und 620°.

1905	t_0	z (Min.)	m (g)	θ_1	θ_2	ϑ	τ_1	τ_2	k	ϑ'	c
						Luft.					
29. Mai	115,0°	3	14,51	624,5°	114,2°	7,772°	0,2142°	0,0818°	0,638°	7,134°	0,2440
	115,0	3	16,42	624,5	109,4	9,114	0,2725	0,1314	0,924	8,190	0,2430
	115,1	3	17,11	624,3	109,5	9,382	0,2755	0,1297	0,897	8,485	0,2418
2. Juni	115,0	3	17,76	622,2	111,1	9,840	0,2717	0,1120	0,974	8,866	0,2458
	115,0	3	18,26	620,3	110,3	10,094	0,2731	0,1185	1,005	9,089	0,2453
	115,0	3	18,21	620,5	110,4	10,057	0,2698	0,1198	1,004	9,053	0,2450
	115,0	3	19,01	623,2	110,3	10,505	0,2806	0,1199	1,023	9,482	0,2444
										Mittel	0,2442
						Wasserdampf.					
30. Mai	115,1°	3	9,49	636,2°	110,7°	10,865°	0,2857°	0,1185°	0,917°	9,448°	0,4765
	115,0	3	9,71	635,5	110,0	10,740	0,2867	0,1241	1,120	9,620	0,4736
	115,0	3	10,11	629,0	110,4	10,996	0,2751	0,1185	1,229	9,767	0,4683
	115,0	3	11,73	624,3	111,3	12,296	0,2697	0,0956	1,068	11,228	0,4698
	115,0	3	11,67	621,7	111,1	12,045	0,2692	0,1002	0,843	11,202	0,4732
31. Mai	115,1	3	11,21	629,9	111,3	11,954	0,2923	0,1049	0,876	11,078	0,4798
	114,9	3	11,38	623,3	111,1	11,942	0,2742	0,1006	0,831	11,111	0,4798
	115,0	3	12,19	623,5	111,4	12,679	0,2812	0,0942	0,869	11,810	0,4766
	115,2	3	10,58	622,3	110,7	11,193	0,2809	0,1156	0,893	10,300	0,4786
										Mittel	0,4751

$$\frac{\text{Wasserdampf}}{\text{Luft}} = 1{,}946.$$

Tabelle VI.

Mittlere spezifische Wärme zwischen 110 und 820°.

1905	t_0	z (Min.)	m (g)	θ_1	θ_2	ϑ	τ_1	τ_2	k	ϑ'	c'
						Luft.					
5. Juni	114,9°	3	16,11	809,3°	113,3°	12,435°	0,3631°	0,1667°	1,402°	11,033°	0,2487°
	115,3	3	16,52	809,9	112,5	13,078	0,3793	0,1782	1,611	11,467	0,2512
8. Juni	114,8	3	17,44	827,5	113,0	13,512	0,3841	0,1734	1,264	12,248	0,2484
	115,0	3	18,05	826,5	114,3	13,948	0,4035	0,1730	1,306	12,642	0,2491
	115,0	3	16,02	826,9	112,4	12,616	0,4922	0,1889	1,336	11,280	0,2487
										Mittel	0,2492
						Wasserdampf.					
6. Juni	115,0°	3	8,84	803,1°	114,3°	13,268°	0,3784°	0,1581°	1,207°	12,061°	0,5018°
	115,0	3	8,88	804,3	113,1	13,625	0,3837	0,1710	1,430	12,145	0,5000
	114,9	2,5	9,18	807,2	113,6	13,830	0,3767	0,1637	1,208	12,622	0,5015
	115,0	2	7,78	809,5	111,9	11,872	0,3869	0,1994	1,075	10,797	0,5015
9. Juni	114,9	3	9,47	823,8	113,3	14,399	0,3951	0,1549	1,238	13,161	0,4945
	114,9	2,5	9,15	828,8	112,9	14,151	0,4984	0,1758	1,285	12,866	0,4961
	115,1	2,5	9,64	826,8	113,0	14,737	0,4028	0,1744	1,288	13,449	0,4939
	115,0	3	10,31	826,5	113,6	15,608	0,3950	0,1647	1,285	14,323	0,4980
										Mittel	0,4978

$$\frac{\text{Wasserdampf}}{\text{Luft}} = 1,998.$$

Resultate.

Für die mittlere spezifische Wärme der Luft zwischen 0 und θ^0 wurde früher (l. c. p. 148) die Beziehung

$$c_\theta = c_0 (1 + 0{,}00004\,\theta)$$

gefunden. Dabei ist jedoch bemerkt, daß die beobachtete Änderung mit der Temperatur innerhalb der Fehlergrenze liegt. Benutzen wir diese Gleichung zur Berechnung der spezifischen Wärme der Luft, indem wir c_0 nach den Regnaultschen Beobachtungen zwischen Zimmertemperatur und 200° zu 0,2355 annehmen, so erhalten wir folgende Werte für Wasserdampf:

	Wasserdampf / Luft	Wasserdampf beob.	Wasserdampf ber.
Zwischen 110 und 270°	1,940	0,4639	0,4623
„ 110 „ 440	1,958	0,4713	0,4696
„ 110 „ 620	1,946	0,4717	0,4773
„ 110 „ 820	1,998	0,4881	0,4859

Unter der Annahme eines linearen Verlaufes folgt hieraus für die mittlere spezifische Wärme des Wasserdampfes bei dem konstanten Druck von einer Atmosphäre zwischen 0 und θ^0

$$c_\theta = 0{,}4460 (1 + 0{,}00009_6\,\theta).$$

Nach den Explosionsversuchen steigt die spezifische Wärme des Wasserdampfes stärker an. Aus Langens[1]) Beobachtungen folgt für die spezifische Wärme bei konstantem Druck

$$c_\theta = 0{,}44 (1 + 0{,}00027\,\theta).$$

Einen so starken Anstieg der spezifischen Wärme erhalten wir für Wasserdampf auch dann nicht, wenn für die Berechnung als spezifische Wärme der Luft die Formel

$$c_\theta = c_0 (1 + 0{,}00008_5\,\theta)$$

zugrunde gelegt wird, die aus den Explosionsversuchen folgt. Wir würden alsdann für Wasserdampf

$$c_\theta = 0{,}4410 (1 + 0{,}00014_5\,\theta)$$

erhalten, also nur einen etwa halb so großen Temperaturkoeffizienten wie Langen.

1) A. Langen, Forschungsarbeiten, herausg. vom Verein Deutsch. Ing., Heft 8. p. 1. 1903.

(Eingegangen 13. Oktober 1905.)

5. *Beobachtungen im Grenzgebiete zwischen Spitzenstrom und Büschellichtbogen (Glimmstrom);*
von M. Toepler.

Die vorliegende Arbeit gibt Beobachtungen und Messungen über die Elektrizitätsströmung zwischen *zwei Spitzen in Luft* bei Drucken von 75 cm Quecksilber bis hinunter zu etwa 10 cm und zwar speziell für den Bereich des Überganges der Entladungsform des sog. Spitzenstromes in die des Büschellichtbogens (d. h. für 0,1 bis 1 Milliampère bei 1 bis 4 cm Elektrodenabstand); im besonderen umfaßt sie die *Untersuchung des Spitzenstroms bei relativ großer Stromstärke.*

I. Existenzbereiche der einzelnen Entladungsformen.

Für die Entladungserscheinungen zwischen zwei Spitzen, gilt, analog wie dies für Gegenüberstellung von Spitze und Platte früher nachgewiesen, daß für bestimmten Elektrodenabstand und Stromstärke auch in der Regel nur *eine bestimmte* nahe kontinuierliche Entladungsform zur Ausbildung kommt. In einer Koordinatenebene: Elektrodenabstände als Abszissen, Stromstärken als Ordinaten (wie in Fig. 1) stellt sich demnach der Existenzbereich einer Entladungsform als bestimmtes Flächenstück dar.

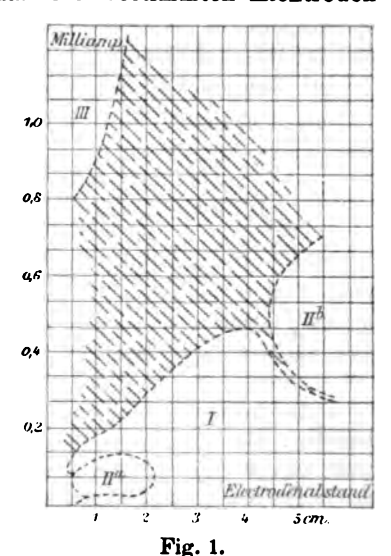


Fig. 1.

An der Grenze zweier nahe kontinuierlichen Entladungsformen tritt diskontinuierliche Entladung (eventuell z. B. Funkenstrom) auf, und

zwar ist die Diskontinuität um so ausgeprägter, je größer cet. par. der Potentialsturz beim Übergange der beiden benachbarten kontinuierlichen Formen ist. Vergrößerung der Elektrodenkapazität erweitert das Gebiet der diskontinuierlichen Entladung auf Kosten des Gebietes der benachbarten kontinuierlichen, von denen hierdurch sogar einige ganz verschwinden.

Zwischen Spitze und Platte war die spitze Elektrode ausschlaggebend für die Entladungsform. Der Ausbruch der Entladung, die Versorgung des Entladungsraumes mit Ionen oder Elektronen, die Luftströmung im Schlagraume (Gebläse) usw. erfolgte von der Spitze aus; je nachdem letztere Anode oder Kathode ist, ließen sich rein (oder wenigstens weitaus überwiegend) positive oder negative Entladungsformen unterscheiden.

Bei Entladung in Luft zwischen *zwei* Spitzen überwiegt meist der *positive* Anteil.

In Fig. 1 ist für Atmosphärendruck die Verteilung der Bereiche der einzelnen Entladungsformen, wie sie zwar speziell in einem bestimmten Falle beobachtet wurde, welche aber als typisch anzusehen ist, dargestellt.

Es bildete sich (zwischen zwei Platinspitzen):

im Gebiete I Spitzenstrom (Lichtentwickelung nur an den Elektroden), in den beiden getrennten Gebieten IIa und IIb positive Büschelentladung[1];

im Gebiete III überwiegend positiver Büschellichtbogen;

das schraffierte Gebiet wurde von diskontinuierlicher Entladung eingenommen.

II. Spannungsmessungen bei Spitzenstrom.

A. Die Strombahn führte vom negativen Pole einer 60 plattigen Influenzmaschine nach der Kathodenspitze des Entladungsraumes f, und von der Anode dieses über ein Wiedemannsches Galvanometer (33 cm Ausschlag für ein Milliampère) zur

1) Im Gebiete IIa war das Büschel wenig entwickelt; ein dünner, schwacher, hin- und herwehender, bläulicher Lichtfaden ging von der Anode aus, um nahe der Kathode mit einem ebenso schwachen kurzen von der Kathode ausgehenden Lichtfaden Fühlung zu gewinnen. *Oft trat auch schon im ganzen Gebiete IIa Spitzenstrom statt Büschelentladung ein*, bei niederen Drucken war dies sogar *stets* der Fall.

Erde; der positive Maschinenpol war gleichfalls geerdet. Zur Spannungsmessung wurde neben den Hauptschlagraum f entweder (für Spannungen über 10 Kilovolt) eine Funkenstrecke (Funkenlänge F) mit Messingpolkugeln von 6 cm Durchmesser, oder für kleinere Spannungen ein Braunsches Elektrometer parallel geschaltet.

Die spezielle Anordnung der Elektroden und der Zuführungen zu ihnen war folgende. Die konaxial übereinander stehenden Elektroden bestanden aus 0,80 mm starken, 2 cm langen, vorn zugespitzten Platinstiften, welche aus den 0,5 cm weiten Glasrohren, in welche sie eingeschmolzen wurden, um 0,5 cm weit hervorragten. Die Glasrohre waren mit Kupfersulfatlösung gefüllt (der Widerstand der Kathodenzuführung betrug 1300 Ohm, derjenige der Anodenzuleitung 18000 Ohm). Die Kathodenspitze mit Zuleitung ließ sich schraubenmikrometrisch verschieben. Der Entladungsraum zwischen den Spitzen befand sich nahe dem Zentrum einer Rezipientenglasglocke von 20 cm Durchmesser und 30 cm Höhe, durch deren Boden und Decke die Zuleitungen führten.

Zu Tabelle I bis einschließlich III erfolgten die Spannungsmessungen durch Nebenschlagweitenbestimmung (F deren Länge in cm); in Tabelle IV, V und VI mit Brauns Elektrometer. Bis auf den Spannungsmesser war bei Tabelle I bis einschließich VI die Versuchsanordnung (speziell auch die Platinspitzenelektroden) völlig ungeändert.

Tabelle I.

Luftdruck 75 cm Hg.

$F = 0{,}520$ cm (17,8 Kilovolt)			$F = 0{,}728$ cm (24,5 Kilovolt)			$F = 0{,}931$ cm (30,6 Kilovolt)		
f in cm	Milli-amp.	c	f in cm	Milli-amp.	c	f in cm	Milli-amp.	c
1,68	0,126	225	2,24	0,168	223	2,80	0,207	218
1,96	0,081	229	2,52	0,111	233	3,08	0,147	227
2,24	0,060	228	2,80	0,092	229	3,36	0,123	226
			4,20	0,040	225	3,64	0,099	230
						3,92	0,087	228
						4,20	0,072	231

Tabelle II.

Luftdruck 64 cm Hg.

$F = 0{,}512$ cm (17,6 Kilovolt)			$F = 0{,}726$ cm (24,5 Kilovolt)			$F = 0{,}922$ cm (30,3 Kilovolt)		
f in cm	Milli-amp.	*c*	*f* in cm	Milli-amp.	*c*	*f* in cm	Milli-amp.	*c*
1,96	0,234	159	2,52	0,276	172	3,08	0,390	163
2,24	0,123	178	2,80	0,177	184	3,36	0,249	179
2,52	0,060	206	3,08	0,126	192	3,64	0,186	184
			3,36	0,096	197	3,92	0,153	187
			3,64	0,075	202	4,20	0,120	193
			3,92	0,060	206			

Tabelle III.

Luftdruck 39 cm Hg.

$F = 0{,}317$ cm (11,1 Kilovolt)			$F = 0{,}533$ cm (18,2 Kilovolt)		
f in cm	Milliamp.	*c*	*f* in cm	Milliamp.	*c*
3,92	0,077	86,0	3,92	0,537	73,8
4,20	0,054	92,4	4,20	0,291	86,3

Tabelle IV.

Luftdruck 37,5 cm Hg.

$f = 0{,}84$ cm		$f = 1{,}40$ cm		$f = 1{,}96$ cm	
Milliamp.	Kilovolt	Milliamp.	Kilovolt	Milliamp.	Kilovolt
0,05	3,50	0,08	5,70	0,10	8,30
0,09	3,75	0,10	6,00	0,16	8,60
0,12	3,70	0,19	6,30	0,22	9,00
0,17	3,65	0,27	6,50	0,27	9,10
0,36	3,50	0,36	6,60	0,39	9,30
0,54	3,30	0,45	6,30	0,42	9,40
0,60	3,10	0,53	5,50	0,62	8,00
0,72	2,80	0,68	4,80	0,66	7,50
0,78	2,60	0,84	4,30	1,07	5,20
0,84	2,50	1,05	4,00		
1,02	2,30				

Tabelle V.

Luftdruck 24,9 cm Hg.

$f = 1{,}12$ cm		$f = 1{,}96$ cm		$f = 2{,}52$ cm		$f = 3{,}08$ cm	
Milli-amp.	Kilo-volt	Milli-amp.	Kilo-volt	Milli-amp.	Kilo-volt	Milli-amp.	Kilo-volt
0,08	3,5	0,12	5,4	0,15	7,1	0,13	8,2
0,27	3,6	0,21	5,8	0,23	7,6	0,21	8,9
0,39	3,3	0,36	6,25	0,38	7,9	0,26	9,2
0,48	3,1	0,45	6,1	0,45	7,8	0,36	9,6
0,75	2,7	0,66	5,5	0,69	7,3	0,45	9,8
0,87	2,5	0,99	3,7	0,96	5,5	0,60	9,6
1,08	2,3					0,72	9,2
						0,81	8,7

Tabelle VI.

Luftdruck 13 cm Hg.

$f = 5{,}32$ cm		$f = 5{,}32$ cm	
Milliamp.	Kilovolt	Milliamp.	Kilovolt
0,15	5,6	0,75	6,9
0,32	6,1	1,02	6,3
0,42	6,5	1,10	5,9
0,53	6,7	1,17	5,7
0,60	6,85		

Bei Atmosphärendruck lassen sich im Bereiche um 0,1 Milliampère die Spannungen in Annäherung darstellen durch die Interpolationsformel

$$(1) \qquad V = c \cdot \sqrt[3]{i} \cdot \frac{f}{f + 9}$$

In den Tabellen I bis III sind aus den beobachteten Werten V, i und f berechnete Werte von c eingetragen; für Atmosphärendruck (Tab. I) ergibt sich c in der Tat als konstant. *Die Stromstärke wächst also bei starkem Spitzenstrom proportional der dritten Potenz der Spannung.*

Weitere in gleicher Weise wie bei Tabelle I für Spitzenstrom zwischen zwei *möglichst* feinen Spitzen bei Atmosphärendruck ausgeführte Messungen ergaben wieder die Gültigkeit des obenstehenden Formeltypus, jedoch mit der etwas kleineren Konstanten $c = 224$.

B. Stehen sich wie bei den bisherigen Messungen zwei gleiche Spitzen gegenüber, so wird der Existenzbereich des Spitzenstromes für Stromverstärkung begrenzt durch Ausbruch diskontinuierlicher Entladung von der *Anoden*spitze aus. Um Spitzenstrom bei möglichst großer Stromstärke bis zur Einleitung des Funkenstromes von der *Kathode* aus zu erhalten, muß man den anodischen Stromeintritt in den Luftraum auf mehrere Spitzen verteilen.

Nachstehende Tabelle VII gibt Beobachtungswerte (bei Atmosphärendruck) für den Fall, daß als *Anode fünf* feine

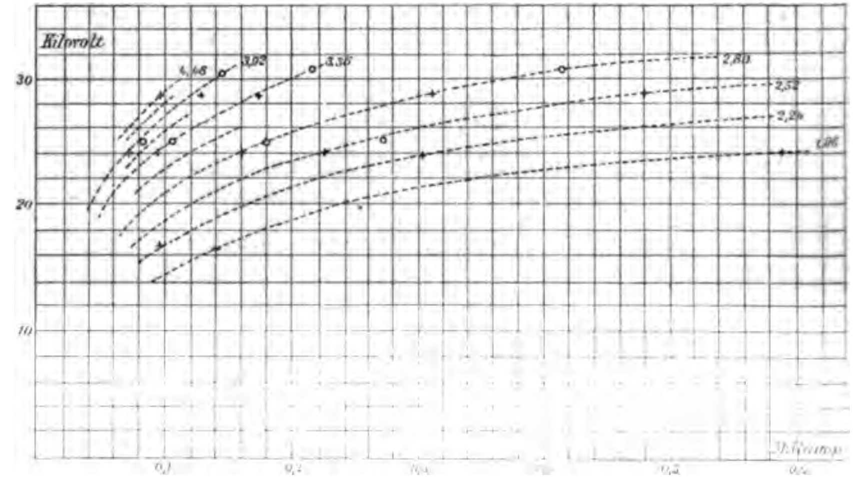


Fig. 2.

Platinspitzen dienten; diese fünf in einer Horizontalebene befindlichen Spitzen standen in den Eckpunkten eines symmetrisch zur Achse der Kathode gelegenen regulären Fünfecks, der Zentralabstand der Eckpunkte betrug nahe 1 cm. Der in Tab. VII angegebene Elektrodenabstand f ist nicht zwischen Kathode und einer der Anodenspitzen, sondern zwischen ersterer und dem Zentrum des Anodenpentagramms gemessen.

In Fig. 2 sind die Angaben von Tabelle VII durch Kreuzchen markiert; die Kreismarken sind weiteren, nicht besonders aufgeführten Kontrollmessungen zu anderer Zeit entnommen.

Die nach Formel (1) berechnete Größe c der Tabelle VII nimmt ab mit wachsendem Strome; *die Stromstärke wächst bei*

sehr starkem Spitzenstrome sogar noch rascher als proportional der dritten Potenz der Spannung.

Tabelle VII.

Luftdruck 75 cm; 5 Anodenspitzen.

16,7 Kilovolt			24,0 Kilovolt			28,7 Kilovolt		
f in cm	Milli-amp.	*c*	*f* in cm	Milli-amp.	*c*	*f* in cm	Milli-amp.	*c*
1,54	0,270	173	1,96	0,587	160	2,38	0,675	156
1,68	0,209	179	2,24	0,321	176	2,52	0,480	168
1,96	0,140	180	2,52	0,222	181	2,80	0,311	179
2,24	0,095	184	2,80	0,159	186	3,36	0,174	189
			3,36	0,093	195	3,92	0,128	188
			3,92	0,071	191	4,48	0,097	188

III. Die Charakteristik des Spitzenstromes in Luft.

Die Charakteristik des Spitzenstromes ist von den verschiedensten Beobachtern bei verschiedenstem aber meist beschränktem Stromstärkenintervall bestimmt worden, was zur Aufstellung einer ganzen Reihe verschiedener Interpolationsformeln geführt hat. Meine Beobachtungen füllen das noch fehlende Intervall für *möglichst starken* Spitzenstrom bis zur Grenze seiner Existenz. — Wie bekannt, unterscheiden sich *für gewöhnliche Luft* die Spannungen bei gleicher Stromstärke für positiven und negativen Spitzenstrom nicht allzusehr; ferner war schon[1]) für die Charakteristik des rein negativen (spitze Kathode gegenüber Platte) Spitzenstromes von *hinreichender Stärke* die angenäherte Gültigkeit von Formel (1) nachgewiesen. Bei Entladung zwischen *zwei Spitzen* haben wir es genau genommen mit *zwei* Spitzenströmen zu tun, einem positiven an der Anode und einem negativen an der Kathode; die Zusammensetzung beider gibt die Gesamtcharakteristik. Es erscheint hiernach nicht auffallend, daß, wie im vorangehenden Abschnitte nachgewiesen ist, der gleiche Formeltypus (1) auch für starken Spitzenstrom zwischen *zwei* Spitzen anwendbar ist. Gleichung (1) ist also ganz allgemein die Näherungsgleichung für die Charakteristik des *Spitzenstromes großer Intensität in Luft* von Atmosphärendruck.

1) M. Toepler, Ann. d. Phys. 14. p. 968. 1904.

Es lassen sich nunmehr beim Überblicken des vorhandenen Materiales folgende Sätze für Spitzenstrom durch Luft aussprechen:

1. Bei Stromverstärkung gelten nacheinander aber *ohne sprungweise* Übergänge folgende Interpolationsgleichungen für die Charakteristik

für schwächsten Strom[1]: $i = k_1 (V - k_1')$,
für stärkeren Strom[2]: $i = k_2 (V - k_2') V$,
für starken Strom: $i = k_3 V^3$.

Gelingt es, Spitzenstrom von mehr als 0,4 Milliamp. zu erhalten, so nimmt der Strom sogar noch *rascher* zu als proportional der dritten Potenz der Spannung.[3])

2. Bei welcher Stärke des Spitzenstromes die eine oder andere Gleichung schon gilt, wird je nach der *speziellen Gestalt (Schärfe) der Spitze* verschieden sein. Diese Unterschiede sind naturgemäß und wie bekannt groß für kleine Stromstärken, sie verwischen sich mehr und mehr für starken Spitzenstrom

1) H. Sieveking, Ann. d. Phys. 1. p. 299. 1900.

2) E. Warburg, Wied. Ann. 67. p. 72. 1899.

3) Man könnte versuchen, die eben angedeutete Abhängigkeit der Stromstärke von der Spannung durch einen *einzigen* Ausdruck wiederzugeben, wozu sich bis zu gewissem Grade die Form $(a\,i + b):(i + c)^2$ eignen würde, jedoch scheint mir dies aus physikalischen Gründen kein Gewinn. Die geschilderte allmähliche Änderung im Verlaufe der Charakteristik ist bedingt durch folgende bei Stromverstärkung sich im wesentlichen *nacheinander* aber *ohne sprungweise* Übergänge geltend machende Änderungen in den Entladungsverhältnissen an jeder Spitze: Der Austritt von Elektrizität erfolgt zunächst nach Überschreiten einer Minimalspannung am äußersten Spitzenende auf relativ kleiner Fläche; diese Ausströmungsfläche vergrößert sich erst schnell, dann (bei Ausdehnung auf weiter rückwärts gelegene Teile der Spitzenfläche nach und nach im Wachsen behindert) immer langsamer — die parabelartige Gleichung von Warburg ähnelt der Charakteristik der Entladung in Geisslerrohren bei *abnormalem* Kathodenfall; weiterhin macht sich dann die zunehmende Ionenbildung im *Raume* um die Spitze geltend, der Strom wächst proportional dem Kubus der Spannung (vgl. die Angaben bei M. Toepler, Ann. d. Phys. 14. p. 962. 1904 über Ionisierung im Raume um kleine Kugelelektroden); schließlich wird noch die Erleichterung der Ionenbildung durch die Temperaturerhöhung bei sehr starkem Spitzenstrome merklich — eine wirklich brauchbare Formel müßte alle diese Einflüsse klar getrennt hervortreten lassen.

(c änderte sich nach den Angaben in Abschnitt II bei Zuspitzung der Elektroden nur wenig).

3. Im allgemeinen ist für *gleiches* Stromstärkeintervall an *gleich*gearteten Spitzen das Gesetz des Spitzenstromes *verschieden* weit vorgeschritten für rein positiven (spitze Anode, Platte) oder für rein negativen (spitze Kathode, Platte) oder schließlich für zusammengesetzten (*zwei* Spitzen) Spitzenstrom.

4. Vergrößert man den *Elektrodenabstand*, so nimmt die Stromstärke, bei welcher eine bestimmte der genannten Formeln streng gilt, zu und zwar zunächst (Elektrodenabstand 1—5 cm) nahe proportional dem Abstande (vgl. Fig. 3), weiterhin aber wesentlich langsamer.

5. Je niedriger der *Druck*, um so früher scheint die Stromintensität *mehr* als proportional der dritten Potenz der Spannung zu wachsen (wie aus Tabb. II und III ersichtlich ist).[1])

Um die Abhängigkeit der Spannung von dem *Elektrodenabstande* wiederzugeben, war oben der auch schon früher für Spitzenstrom benutzte Ausdruck $f:(f+9)$ gewählt. Bemerkt sei, daß im Bereiche $f = 3$ bis $f = 9$ die Funktionen $f:(f+9)$ und $\sqrt[3]{f^2}$ ganz ähnlich verlaufen; es ist

für f gleich	3;	5;	7;	9;
$\sqrt[3]{f^2} : \frac{f}{f+9}$	8,320;	8,187;	8,364;	8,653.

In diesem Bereiche ist also bis auf Abweichungen von weniger als 5 Proz. zu setzen

$$f:(f+9) = \frac{1}{8{,}40}\sqrt[3]{f^2}.$$

1) Die ausgesprochenen Gesetze gelten nicht nur für den Spitzenstrom in *Luft*. Eine eingehende Mitteilung der angestellten Messungen für Wasserstoff erscheint überflüssig, da sich der benutzte Wasserstoff als nicht ganz rein erwies. So viel ließ sich aber sicher erkennen, daß *für Wasserstoff qualitativ das gleiche gilt wie für Luft* und zwar sowohl für die Charakteristik des Spitzenstromes wie für seinen Übergang in Glimmstrom. Dabei können sein und sind im allgemeinen auch im *gleichen* Stromstärkeintervall die Charakteristiken in H_2 und in Luft doch *typisch verschieden; die Charakteristiken von H_2 und Luft befinden sich jedoch bei gleicher Stromstärke nur in verschiedener Entwickelungsphase.* Mit dem Gesagten steht auch im Einklange, daß Hr. P. Ewers, Ann. d. Phys. 17. p. 781. 1905 bei einigen von ihm untersuchten Gasen für das *gleiche* Stromstärkeintervall *verschiedene* Gesetze je nach dem Vorzeichen des Spitzenstromes und auch je nach dem Gasdrucke hat aufstellen können.

Ersetzt man in Gleichung (1)

$$f:(f+9) \text{ durch } \frac{1}{8,4}\cdot\sqrt[3]{f^2},$$

so ergibt sich der einfache Satz:

Für Stromstärken, die sich wie die Elektrodenabstände verhalten, ist die Potentialdifferenz der Elektroden bei starkem Spitzenstrom gleichfalls angenähert proportional dem Elektrodenabstande.[1])

IV. Übergang von Spitzenstrom in Büschellichtbogen.

Wie schon hervorgehoben, haben wir bei Entladung zwischen zwei Spitzen an jeder Elektrode einen besonderen Spitzenstrom. Solange der Elektrodenabstand groß ist — über 15 cm — sind die Spitzenströme an beiden Elektroden recht unabhängig voneinander; insbesondere besitzt jede Elektrode auch *ihre eigene Grenzstromstärke* des Spitzenstromes. Diese Grenzstromstärken sind von den früher für Entladung zwischen Anoden- bez. Kathodenspitze und Plattenelektrode festgestellten jedenfalls nicht allzu verschieden.

Sowohl für die positive Entladung (Spitze Anode gegenüber Platte) wie für negative (Kathodenspitze und Platte) galt für die Grenzstromstärke (i) zunächst Proportionalität mit dem Elektrodenabstande (f), später aber Konstanz, d. h. ein Gesetz vom Typus $a . i = f:(f+b)$, wo a und b Konstanten bedeuten. Die größte konstante Grenzstromstärke (*für großes* f) ergab sich für positiven Spitzenstrom an stumpfer Spitze zu 0,10 bis 0,12 Milliamp.[2]), für negative Entladung wurde Konstanz der Grenzstromstärke bei 0,8 Milliamp. noch nicht erreicht.[3])

Mit abnehmendem Abstande *zweier* Spitzen beeinflussen sich beide Spitzenströme mehr und mehr; das Überschreiten der Grenzstromstärke an *nur einer* Spitze (und zwar ist dies in der Regel die Anode) zerstört für Elektrodenabstände unter

---

1) Dies ist aber sicher nur ein Näherungsgesetz für *beschränktes* Schlagweitengebiet, denn die Spannung bei bestimmtem Strome bleibt aus physikalischen Gründen für $f = \infty$ endlich, was die Funktion $f:(f+9)$ leistet, nicht aber $\sqrt[3]{f^2}$.

2) M. Toepler, Ann. d. Phys. 2. p. 570. Tab. I. 1900.

3) l. c. p. 578. Tab. IV; hiernach würde auf eine *größte* negative Grenzstromstärke von etwa 1,6 Milliamp. zu schließen sein.

etwa 10 cm meist sogleich den Spitzenstrom *auch an der anderen* Spitze. Wir haben also jetzt nur noch *eine gemeinsame* Grenzstromstärke, deren eigentümlicher Verlauf aus Fig. 1 ersichtlich ist (Begrenzungslinie des Gebietes I); *bis etwa 4 cm Spitzenabstand ist die Grenzstromstärke des Spitzenstromes angenähert proportional dem Spitzenabstande.*

Die manchmal geäußerte Vermutung, daß die Umwandlung durch ein *Konstantwerden* der Spannung *zwischen den Elektroden* bei Stromverstärkung (Maximum und Umkehr der Kurve der Charakteristik) veranlaßt wird oder wenigstens mit einem solchen ausgezeichneten Punkte zusammenfällt, entspricht für Elektrodenabstände von mehr als etwa 1 cm *nicht mehr den Tatsachen.* Der Verlauf der Potentialdifferenz zwischen den *Elektroden*, d. h. die *Gesamt*charakteristik ist aufzufassen als *zusammengesetzt* aus dem Verlaufe von Charakteristiken der einzelnen Gebiete im Entladungsraume, welche bezüglich der Art der Elektrizitätsströmung in ihnen gleichzeitig doch in *recht verschiedenen* Entwickelungsstadien begriffen sein können und im allgemeinen auch sind. Nur die Überschreitung des Maximums im Verlaufe der *Teil*charakteristik für das Gebiet nahe der Spitze veranlaßt das Ende des Spitzenstromes. Jedenfalls ist zu beobachten, daß die *Gesamtcharakteristik wächst bis zum Eintritte der Katastrophe ohne konstant zu werden.*[1]) Die Gesamtcharakteristik läßt (bei Elektrodenabständen über 1 cm) an ihrem Verlaufe den drohenden, je nach Umständen bei gleicher Versuchsanordnung einmal bei schwächerem, dann bei nicht unwesentlich stärkerem Strome erfolgenden Eintritt der Umwandlung *nicht* vorher erkennen. Besonders hervorzuheben ist, daß es auch gar nicht darauf ankommt, wie weit die Charakteristik in der in Abschnitt III, Satz 1 angedeuteten

---

1) Hierdurch verlieren selbstverständlich die allgemeinen Betrachtungen von Hrn. W. Kaufmann (vgl. Ann. d. Phys. **2.** p. 158. 1900) über den Ausbruch diskontinuierlicher Entladung nicht an theoretischem Werte; *es sind diese dahin zu ergänzen, daß bei größeren Elektrodenabständen nicht der Verlauf der* ***Gesamt****charakteristik entscheidet, sondern das Verhalten eines* ***Teiles*** *des Entladungsraumes*, während der übrige (bezüglich der Entwickelung der Entladung in ihm rückständige) Teil nach Kapazität, Widerstand und Selbstinduktion noch als *Zuleitung* zum entscheidenden Entladungspunkte anzusehen ist.

allgemeinen Entwickelung vorgeschritten ist.[1]) Kurz: ***die Grenzstromstärke schneidet den Verlauf der Charakteristik irgendwo jäh ab.***

Im besonderen lassen sich beim Übergange von Spitzenstrom in Büschellichtbogen zwischen zwei Spitzen mit allmählicher Stromverstärkung folgende Zwischenerscheinungen beobachten: Bildung eines pfriemartigen Lichtfadens vor der Elektrodenspitze (bei symmetrischer Elektrodenanordnung an der *Anode*); dieser Faden verlängert sich bei Stromvermehrung rasch, es setzt langstielige, büschelartige diskontinuierliche Entladung ein, diese geht dann in Funkenstrom über, womit das Maximum der zeitlichen Diskontinuität der Strömung erreicht wird. Bei weiterer Stromverstärkung verwandelt sich der Funkenstrom dann wieder in diskontinuierliche, brausende, büschelartige Entladung, welche schließlich erst spät in den ruhigen Büschellichtbogen übergeht.

Da sich die für verschiedene Elektrodenabstände ergebenden Charakteristiken von Spitzenstrom und Büschellichtbogen nirgends schneiden, so stellt sich in einem Systeme von Charakteristiken das Gebiet diskontinuierlicher Entladung als einfaches Flächenstück dar.

In Fig. 3 sind für den Luftdruck von 38 cm Hg nach Tabb. III und IV die Charakteristiken für $f = 0{,}84$; 1,40; 1,96 und 3,92 und 4,20 cm gezeichnet. Ferner ist das Gebiet mit Funkenstrom eng schraffiert angegeben, das mit diskontinuierlicher büschelartiger Entladung nur leicht schraffiert. Die Charakteristiken, mit Brauns Elektrometer bestimmt, haben, soweit sie im Gebiete diskontinuierlicher Entladung liegen, natürlich nur den Sinn von Mittelwerten.

---

1) Rein positiver Spitzenstrom in Luft geht schon in Büschel oder Funken über *ehe* die Stromstärke proportional der dritten Potenz der Spannung geworden ist — der positive Büschelstiel bildet sich, sobald Ionisierung im *Raume* einsetzt; negative Entladung in Luft und, wie in vorliegender Notiz gezeigt, auch zusammengesetzte Entladung bei kleinem Elektrodenabstande läßt sich weiter treiben. Besonders gut tritt das plötzliche Ende des Spitzenstromes bei den zitierten Untersuchungen von Hrn. P. Ewers an Helium hervor; hier bricht speziell positiver *und auch* negativer Spitzenstrom ab, ehe die Stromstärke der dritten Potenz der Spannung proportional geworden ist.

Die Fig. 3 ist als typisch anzusehen für alle Drucke zwischen 10 cm und einer Atmosphäre.

Definiert man als „*Grenzstromstärke*" diejenige, bei welcher der *Lichtpfriem* sich bildet, so läßt sich diese auch noch angeben bei niederen Drucken und für kleine Elektrodenabstände,

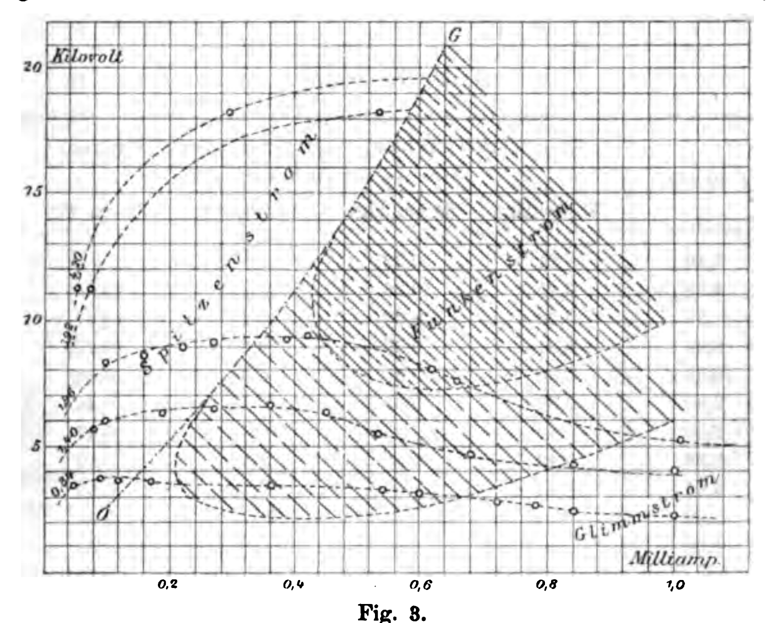


Fig. 3.

wo schon längst (auch bei großer Elektrodenkapazität) nicht mehr *Funken* sich bilden. In Fig. 3 gibt die Kurve *O G* den Verlauf der Grenzstromstärke.

Hier nicht besonders mitgeteilte Beobachtungen ergaben für das Druckintervall 75 cm bis 10 cm die Gültigkeit des Satzes:

Die Grenzstromstärke des Spitzenstromes in Luft zwischen zwei Spitzen ist fast unabhängig vom Gasdrucke.[1])

Bei höheren Drucken und nicht zu kleinen Elektrodenabständen entsteht, wie auch Fig. 3 zeigt, fast zugleich mit Überschreiten der Grenzspannung des Spitzenstromes ein *Funken-*

1) Dieses Gesetz hat nur für *Luft* Gültigkeit; vgl. die Messungen der Grenzstromstärke für Helium von Hrn. P. Ewers l. c.

strom; soweit dies der Fall ist, *gilt dann auch für die Stromstärke des Eintrittes von Funkenstrom der eben genannte Satz.* Dies ist aus nachstehender Tab. VIII ersichtlich. Diejenigen Stromstärken für Einsetzen des Funkenstromes, welche von der Grenzstromstärke des Spitzenstromes stark abweichen, sind in Klammern gesetzt.

Tabelle VIII.

f in cm	Stromstärke (Milliamp.) bei Einsetzen des Funkenstromes für Luftdruck von			
	75 cm Hg	64 cm Hg	52 cm Hg	39 cm Hg
1,40	0,21	0,22	—	—
1,68	0,25	0,26	(0,29)	(0,60)
1,96	0,28	0,28	0,27	(0,47)
2,24	0,31	0,30	0,31	(0,45)
2,52	0,35	0,35	0,34	0,42
2,80	0,37	0,39	0,35	0,44
3,08	0,40	—	0,41	0,47
3,36	0,43	—	0,44	0,50
3,64	0,45	—	0,46	0,53
3,92	—	—	—	0,56
4,20	—	—	—	0,59

Die *Grenzspannung* des Spitzenstromes gewinnt dadurch besonderes Interesse, als sie zugleich die *größte* Potentialdifferenz ist, welche bei allmählicher Stromverstärkung *überhaupt* zwischen zwei Spitzen bestehen kann. Aus den Angaben im Abschnitte II lassen sich die in nachstehender Tabelle IX zusammengestellten Werte entnehmen.

Die Grenzspannung erweist sich, wie die Werte $G:f$ in letzter Kolumne zeigen, *als angenähert proportional dem Spitzenabstande.* Die Werte $G:f$ geben also gleichzeitig auch nahezu die Grenzspannung für 1 cm Spitzenabstand. In Fig. 4 ist diese Wertefolge durch den Linienzug I dargestellt. Als rohe Interpolationsformel für die Abhängigkeit der Grenzspannung G (in Kilovolt) vom Luftdrucke p (in cm Hg) kann bis zu $f = 4$ cm

$$G = 0{,}3 + 0{,}070 \, . \, p \, . \, f + 0{,}00124 \, p^2 \, . \, f$$

dienen.

Tabelle IX.

Lufdruck in cm Hg	Spitzen-abstand f in cm	Grenz-spannung G in Kilovolt	Quotient $G:f$	
75	3,08	38,3	12,45	nach besonderer Messung
64	3,08	30,3	9,84	Aus Tab. II
39	3,92	18,2	4,64	Aus Tab. III
37,5	0,84	3,75	4,46	Aus Tab. IV
37,5	1,40	6,60	4,71	
37,5	1,96	9,40	4,79	
24,9	1,12	3,6	3,21	Aus Tab. V
24,9	1,96	6,25	3,19	
24,9	2,52	7,9	3,13	
24,9	3,08	9,8	3,18	
13	5,32	6,9	1,30	Aus Tab. VI

Je geringer der Potentialsturz beim Übergange von Spitzenstrom in Büschellichtbogen ist, um so geringer ist auch die zeitliche Diskontinuität der beim Übergange erscheinenden Zwischenformen. Der Quotient: Potentialsturz dividiert durch die Stromzunahme, innerhalb welcher der Sturz stattfindet, könnte direkt als ein Maß für die „*Diskontinuität des Überganges*“ dienen.

Trotz Bemühens gelang es *nicht*, für Drucke über 10 cm Hg ruhigen stetigen Büschellicht-

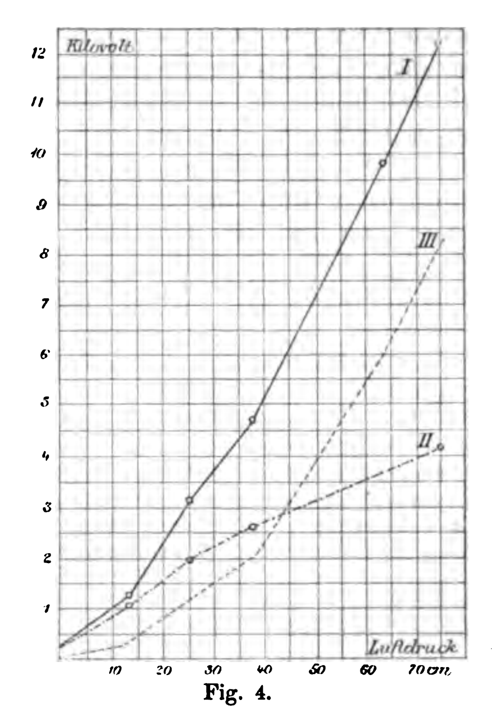


Fig. 4.

bogen von etwa 1 cm Länge bei Stromstärken wesentlich *unter* einem Milliampère zu erhalten.

Für kurzen Büschellichtbogen (bis 1 cm) kann man mit guter Annäherung setzen $v = 0{,}3 + k \cdot f$ Kilovolt, wo k eine Konstante bedeutet. In nachstehender Tabelle X seien die Ergebnisse einiger orientierender Messungen über die Abhängigkeit der Konstanten k vom Drucke mitgeteilt.

Tabelle X.

Luftdruck in cm Hg	76	66,4	52,4	—	28,4	14,4	11,8
k in Kilovolt : cm	3,71	3,50	3,07	—	1,90	0,98	0,68
Luftdruck in cm Hg	76	60	50	40	30	20	10
k in Kilovolt : cm	3,76	3,29	2,94	2,53	2,06	1,47	0,76
Luftdruck in cm Hg	75	—	—	37,5	25	13	—
k in Kilovolt : cm	3,90	—	—	2,35	1,70	0,75	—

Den Tabellenangaben liegen Messungen von Elektrodenspannungen (mit Brauns Elektrometer[1]) für Elektrodenabstände f zwischen 0,2 und 0,8 cm zugrunde; die Stromstärke schwankte bei allen Messungen nur zwischen 0,97 und 0,99 Milliampère.

Die beiden *ersten* Tabellenzeilen gelten für rein negativen Büschellichtbogen zwischen spitzer Platin-Kathode und einer Basaltplatte; bei Bestimmung des *zweiten* Zeilenpaares (die hier angegebenen Werte sind aus zahlreichen Einzelmessungen interpoliert) war nur die Basaltplatte durch eine andere besser leitende ersetzt, der Büschellichtbogen nicht rein negativ; das *dritte* Zeilenpaar gilt für überwiegend positiven Büschellicht-

1) Durch kurzdauernde, nie ganz zu vermeidende Störungen in der Stetigkeit des Büschellichtbogens konnten die angegebenen Ablesungen am trägen Elektrometer immerhin bis 5 Proz. zu groß ausgefallen sein. Die Bestimmungen mit *Basalt*elektrode sind auch noch dadurch sehr erschwert, daß sich der elektrische Widerstand von Basalt bei Temperaturzunahme (infolge des Stromdurchganges) ganz auffallend stark ändert. Als Beispiel diene das Ergebnis einiger Widerstandsmessungen für ein besonders schlecht leitendes Basaltstück. Es wurde gefunden:

Temperatur in Celsiusgraden	2°	23,1°	31,7°	39,9°
$\lambda \cdot 10^{12}$ (λ für Quecksilber = 1)	0,27	1,33	2,06	2,77

Die Zunahme der Leitfähigkeit pro Grad Temperaturzunahme kann also 5 Proz. übersteigen.

bogen zwischen zwei feinen Platinspitzen von kleiner Elektrodenkapazität.

In Fig. 4 geben die Werte von $0,3 + k$, entnommen der letzten Zeile von Tab. X, den strichpunktierten Kurvenzug II; dieser stellt also die Abhängigkeit der Potentialdifferenz B (in Kilovolt) vom Drucke p (in cm Hg) dar für 1 cm Elektrodenabstand bei Büschellichtbogen mit ein Milliampère Stromintensität; sie läßt sich in Annäherung darstellen durch

$$B = 0,3 + 0,070 \cdot p - 0,00025 p^2.$$

Die Grenzstromstärke des Spitzenstromes erwies sich, wie gezeigt, nahe unabhängig vom Luftdrucke, ebenso die kleinste Stromstärke mit ruhigem Büschellichtbogen (ca. 1 Milliamp.). Die Differenz zwischen den zusammengehörigen Werten der Kurven I und II, dargestellt durch den Kurvenzug III, gibt also ein Maß für *die Größe der Diskontinuität beim Übergange von Spitzenstrom in Büschellichtbogen (Glimmstrom);* diese *wächst proportional dem Quadrate des Luftdruckes.* Durch die Interpolationsformel $D = 0,00149 \cdot p^2 \cdot f$ läßt sich die Abhängigkeit der Diskontinuität des Überganges D (in Kilovolt) vom Luftdrucke p (in cm Hg) und Elektrodenabstande f (in cm) angenähert wiedergeben.

V. Büschelentladung.

Zwischen Spitzenstrom und Büschellichtbogen kann (vgl. Fig. 1 Gebiet II) Büschelentladung mit überwiegendem positiven Anteile auftreten.

Messungen mit Brauns Elektrometer zeigten, daß die mittlere Elektrodenspannung beim Eintreten der Büschelentladung nach Spitzenstrom einen kleinen Sturz erfährt, dann bei Stromvermehrung erst langsam steigt und später für ein großes Stromstärkenbereich (bis zur Existenzgrenze der Büschelentladung) so gut wie *konstant* wird, wie dies früher[1]) auch schon für positive Büschelentladung zwischen Anodenspitze und *Platten*kathode nachgewiesen wurde.

Der soeben geschilderte Verlauf der *Gesamt*charakteristik (d. h. der Spannung zwischen den *Elektroden*) bei Büschelentladung

---

1) M. Toepler, Ann. d. Phys. 2. p. 607 Fig. 13. 1900.

erklärt sich ungezwungen, wenn man bedenkt, wie die Büschelentladung sich zusammensetzt aus Entladungsteilen von sehr verschiedener Entwickelung. Für den schmalen *Stiel* des (zwischen zwei Spitzen räumlich überwiegenden) positiven Büschels mit seiner großen Stromdichte gelten jedenfalls schon angenähert die Gesetze des Glimmstromes, d. h. für dieses *Stück* des Entladungsraumes *nimmt die Spannung ab* mit wachsendem Strom. Die aus divergenten Lichtfäden gebildete Krone des positiven Büschels, ebenso wie die zahlreichen Lichtfäden des negativen Entladungsanteiles an der Kathode ähneln beide völlig der sog. Streifenentladung, für welche ähnliche Gesetze wie für Spitzenstrom,[1]) also jedenfalls *Zunahme* der Spannung mit der Stromstärke gilt. Nach der mit einem Spannungssturze der Gesamtcharakteristik verbundenen (innerhalb enger Stromstärkenvariation sich vollziehenden) Ausbildung des Büschelstieles kompensiert sich dann bei weiterer Stromverstärkung die Ab- bez. Zunahme der Spannung längs der einzelnen heterogenen Entladungs*teile* zu einem angenähert konstanten Werte der Gesamtspannung zwischen den Elektroden.

Dresden, Physikal. Institut der Technischen Hochschule, Oktober 1905.

1) M. Toepler, Ann. d. Phys. 14. p. 962. 1904.

(Eingegangen 22. Oktober 1905.)

6. *Die Neutralisationswärme starker Säuren und Basen und ihre Änderung mit Temperatur und Konzentration;*
von A. Wörmann

(Auszug aus der Münsterer Inaugural-Dissertation 1905.)

Nach dem Erscheinen der Arbeiten von Hess[1]) und Graham[2]) über die bei Neutralisation einer Säure durch eine Base entstehende Wärmetönung wurden die bei chemischen Umsetzungen auftretenden Wärmetönungen der Gegenstand eingehender Untersuchungen von seiten anderer Forscher. In den Jahren 1841 und 1870 erschienen zwei Arbeiten über die Neutralisationswärmen verschiedener Säuren von dem Engländer Andrews.[3]) In die dazwischen liegende Zeit fallen ungefähr die Arbeiten von Favre und Silbermann.[4]) 1871 veröffentlichte Favre[5]) allein eine Arbeit, die denselben Gegenstand behandelte. Am eingehendsten beschäftigten sich J. Thomsen[6]) und Berthelot[7]) mit den Erscheinungen der chemischen Wärmetönung.

Während Hess und Andrews die Neutralisationswärmen nur bei einer Temperatur untersuchten, dehnten Graham, Berthelot und Thomsen ihre Untersuchungen auf verschiedene Temperaturen aus, um festzustellen, inwieweit sich ein Einfluß derselben auf die Neutralisationswärme geltend machen würde. Graham, von dem zwei Versuchsreihen bei 60° und 40° F. vorliegen, kam damals auf Grund seiner

1) Hess, Pogg. Ann. **50. 53. 57.**

2) W. P. Graham, Ann. d. chim. et phys. (3) **13.** p. 188.

3) Th. Andrews, Pogg. Ann. **54.** p. 208. 1841; **143.** p. 101. 1871; Transact. of the Roy. Irish Academy. **19.** p. 228; Transact. the R. Soc. of Edinb. 1869—1870.

4) P. A. Favre u. J. T. Silbermann, Ann. de chim. et phys. (3) **38.** p. 494. 1853.

5) P. A.. Favre, Compt. rend. **71.** p. 772. 1871.

6) J. Thomsen, „Thermochem. Unters.“ Leipzig 1882.

7) M. Berthelot, „Termochimie.“ Paris 1897.

Untersuchungen zur Überzeugung, daß mit fallender Temperatur die Neutralisationswärme kleiner würde. Wörtlich sagt Graham:[1])

„La chaleur dégagée par la combinaison est sensiblement modifiée par une différence considérable dans la température à laquelle on mêle l'acide et l'alcali; *elle l'est moins à une temperature basse.*"

Berthelot, der zwar auf Grund der Thomsenschen Untersuchungen über die spezifische Wärme von Salzlösungen eine Zunahme von 45 cal. pro Grad fallender Temperatur berechnete, hatte aber in seinen eigenen Arbeiten auf experimenteller Grundlage keinen merklichen Unterschied feststellen können, im Gegensatz zu Thomsen, der als Temperaturänderung bei Natronlauge 43 cal. auf 1° C. fand und so „als erster die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung darlegte".

In seiner Arbeit sagt Berthelot:[2])

„Dans mes propres experiences j'ai eu occasion de déterminer certaines chaleurs de neutralisation à + 9° et à + 18°: les différences entre les deux mesures ont été trouvées bien plus petites que celles qui résultent des chiffres ci-dessus, et si faibles même que je n'oseras par les garantir .... En un mot, j'attribue la variation indiquée par le calcul aux erreurs commises par Mr. Thomsen, erreurs excusables d'ailleurs dans les déterminations aussi difficiles.

En résumé, la variation avec la température des chaleurs de neutralisation relatives aux sels alcalines est très faibles et *ne peut pas calculé avec certitude d'après les chaleurs spécifiques actuellement connues.*"

In seiner „Thermochimie"[3]) führt er zwar einen Temperaturkoeffizienten von 50 cal. an; ob dieser experimentell oder durch Rechnung gefunden worden ist, erscheint nicht sichergestellt, da die betreffende Arbeit an der von ihm angegebenen Stelle[4]) nicht zu finden ist.

1) W. P. Graham, Ann. de chim. et phys. (3) **13.** p. 190. 1845.
2) M. Berthelot, Ann. de chim. et phys. **29.** p. 456. 1873.
3) M. Berthelot, Thermochimie. **2.** p. 180.
4) M. Berthelot, Ann. de chim. et phys. (6) **1.** 1894.

Auch in neuerer Zeit ist über den Gang der Neutralisationswärme mit der Temperatur nichts Näheres bekannt geworden. Dieser Gang ist aber von mehrfachem Interesse. Einmal zur Prüfung der Theorie, welche die Temperaturänderung der Neutralisationswärme aus den spezifischen Wärmen von Salz, Säure und Basis zu berechnen gestattet; sodann, weil die Bestimmung der elektrolytischen Dissoziationskonstanten des Wassers aus dem Leitvermögen, wie sie F. Kohlrausch und Heydweiller[1]) ausgeführt haben, die Kenntnis dieser Größe, die nach dem vorhergehenden noch ziemlich unsicher ist, zur Voraussetzung hat.

Gegenstand der folgenden auf Veranlassung von Prof. Heydweiller unternommenen Arbeit ist in erster Linie die Veränderung der Neutralisationswärme starker Säuren und Basen bei größeren Temperaturintervallen festzustellen und zu untersuchen, inwieweit die Konzentration der Lösung diese beeinflußt, um so womöglich die Neutralisationswärme bei ∞-Verdünnung, die gleich der Ionisationswärme oder der elektrolytischen Dissoziationswärme des Wassers sein soll, durch Extrapolation zu bestimmen. Leider war diese letzte Absicht nicht zu erreichen, da die Änderungen bei Säure- und Basiskonzentrationen zwischen $^1/_4$- und $^1/_{10}$-normal innerhalb der Versuchsfehler liegen und sichere Extrapolation nicht gestatten, bei geringeren Konzentrationen aber sichere Ergebnisse nicht zu erzielen waren.

Bei den Untersuchungen wurde nach zwei Methoden gearbeitet: bei 0° wurde das Bunsensche Eiskalorimeter, bei 6°, 18° und 32° das Mischungskalorimeter benutzt.

I. Messungen mit dem Eiskalorimeter.

Das bei den Versuchen bei 0° benutzte Eiskalorimeter war mit wenigen Veränderungen nach der Angabe von Schuller und Wartha[2])[3]) eingebaut.

---

1) F. Kohlrausch u. A. Heydweiller, Wied. Ann. **53.** p. 209. 1894.

2) A. Schuller u. V. Wartha, Wied. Ann. **2.** p. 359.

3) Dissertation p. 8.

Das bei den Versuchen benutzte Skalenrohr, welches mm-Teilung besaß, gestattete $^1/_{10}$ mm mit einer scharfen Lupe noch gut abzuschätzen.

Drei Kalibrierungen ergaben für den mittleren Querschnitt die Werte

$$q = 0{,}0047615,$$
$$q = 0{,}0047654,$$
$$q = 0{,}0047610.$$

Der Raum, in welchem sich das Eiskalorimeter befand, war ein nach Norden liegendes Kellergewölbe, dessen Temperatur zwischen 0° und + 3° C. während der Arbeitstage schwankte.

Die den Versuchen zugrunde liegenden Säure- und Alkalilösungen waren Normallösungen, auf deren Herstellung die möglichste Sorgfalt verwandt worden war. Als Urlösung diente $^1/_{10}$-normal Bernsteinsäure, mit der $^1/_1$-normal NaOH-Lösung eingestellt wurde, diese diente dann zur Einstellung von $^1/_1$-normal HCl-Lösung, deren Cl-Gehalt gravimetrisch ermittelt wurde, so daß in betreff der Normalität der Urlösung vollkommene Sicherheit herrschte. Die so hergestellte Urlösung wurde mir durch die freundliche Vermittelung des Hrn. Dr. Kahn am chemischen Institut zur Verfügung gestellt.

Um vollkommene Sicherheit über die Normalität der zu verwendenden Säuren und Basen zu besitzen, wurde noch überdies das spezifische Gewicht dieser Lösungen ermittelt und mit den von F. Kohlrausch für 18° C. angegebenen Werten verglichen.

Über den Gang des Versuches vgl. Dissertation p. 10.

Die Untersuchungen erstrecken sich auf

$$HCl + KOH$$

und

$$HCl + NaOH.$$

Die Konzentrationen, mit denen gearbeitet wurde, waren bei

HCl + KOH: $^1/_2$-, $^1/_4$- und $^1/_{10}$-normal,

bei

HCl + NaOH: $^1/_2$-, $^1/_4$- und $^1/_{10}$-normal.

Die Berechnung der Versuche geschah nach Bunsen.

Die Wärmemenge W, welche durch Neutralisation frei und vollständig an das Kalorimeter abgegeben wird, ist:

$$W = \frac{g(1 + \alpha t) \cdot s_w \cdot s_e}{s_q \cdot T (s_w - s_e)} \cdot l\, T'.$$ [1]

In dieser Formel bezeichnet T' die Anzahl der Teilstriche, um die sich der Quecksilberfaden verschoben hat. Die übrigen Bezeichnungen stimmen mit denen von Bunsen gewählten überein. $s_w \cdot s_e \cdot l / (s_w - s_e)$ ist nach Kohlrausch[2]) gleich 882 bezogen auf 15° Kal. gesetzt.

Bei dem mittleren Werte für T' ist eine Kaliberkorrektion anzubringen, die positiv oder negativ sein kann. Diese Korrektion ergab sich aus den graphisch darzustellenden Ergebnissen der Kalibrierung.

Wie sie angebracht wurde, vgl. Dissertation p. 18.

Im folgenden gebe ich die Ergebnisse der einzelnen Versuche, dabei bleiben die Angaben auf die Daten T und T' sowie auf das Gewicht der angewandten Menge Normalsäure beschränkt.

Tabelle 1.

Konzentration: $^1/_1$-normal – HCl + $^1/_1$-normal – NaOH.

	HCl	T'	T	W	Mittelwert
1.	20,0500	70,346	4,653	14 908	14 984
2.	20,0530	70,820	4,657	14 993	
3.	20,0538	70,926	4,657	15 016	
4.	20,0002	70,460	4,636	15 024	

Tabelle 2.

Konzentration: $^1/_4$-normal – HCl + $^1/_4$-normal – NaOH.

	HCl	T'	T	W	Mittelwert
1.	29,7702	26,410	4,755	14 575	14 580
2.	29,5000	26,042	4,728	14 585	

1) R. Bunsen, Pogg. Ann. **141.** p. 1.

2) F. Kohlrausch, Prakt. Physik, 10. Aufl. 1905. p. 204 in naher Übereinstimmung mit C. Dietericis neuesten Versuchen, Ann. d. Phys. **16.** p. 593. 1905.

Tabelle 3.

Konzentration: $^1/_{10}$-normal – HCl + $^1/_{10}$-normal – NaOH.

	HCl	T'	T	W	Mittelwert
1.	29,7312	10,350	4,644	14 604	14 604

Tabelle 4.

Konzentration: $^1/_2$-normal – HCl + $^1/_2$-normal – KOH.

	HCl	T'	T	W	Mittelwert
1.	19,9416	34,500	4,521	14 811	14 805
2.	19,8058	34,060	4,561	14 799	

Tabelle 5.

Konzentration: $^1/_4$-normal – HCl + $^1/_4$-normal – KOH.

	HCl	T'	T	W	Mittelwert
1.	19,9569	17,520	4,663	14 712	14 707
2.	19,6500	17,015	4,593	14 721	
3.	19,6094	17,500	4,746	14 689	

Tabelle 6.

Konzentration: $^1/_{10}$-normal – HCl + $^1/_{10}$-normal – KOH.

	HCl	T'	T	W	Mittelwert
1.	19,7158	7,130	4,794	14 695	14 709
2.	19,7868	6,900	4,614	14 723	

Während die Versuche mit $^1/_{10}$-Normallösung und $^1/_4$-Normallösung keinen merklichen Unterschied zeigen, beträgt dieser zwischen $^1/_1$ und $^1/_{10}$ annähernd 400 cal.

Auch bei KCl zeigt sich ein Unterschied von ca. 100 cal. zwischen $^1/_2$-normal einerseits, $^1/_4$-normal und $^1/_{10}$-normal andererseits.

Es geht aus den Versuchen hervor, daß die Neutralisationswärme für konzentrierte Lösungen merklich zunimmt, dagegen bei verdünnteren kein über die Fehlergrenze hinausgehender Unterschied sich geltend macht. Ferner folgt aus den Versuchsergebnissen, daß die Neutralisationswärme für NaCl nicht

mit der für KCl identisch ist, sondern die letztere um mehr als 100 cal. höher liegt.

Es dürfte das hauptsächlich durch die unvollständige Ionisation und die recht verschiedenen Jonisationswärmen von KOH und NaOH bedingt sein. Wenn man die Neutralisationswärme für NaCl bei 0° gleich

14 625 cal.

vergleicht mit der berechneten, die, unter Annahme, daß der von Thomsen gefundene Temperaturkoeffizient in kleineren Intervallen konstant und für NaCl gleich 43 cal. ist, gleich

14 683 cal.

ist[1]), so stellt sich ein Unterschied von

58 cal. = 0,4 Proz.

heraus, welche Abweichung sich innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler hält.

Die für die eiskalorimetrischen Versuche ungünstigen Temperaturverhältnisse der beiden letzten Winter verhinderten ihre weitere Fortsetzung, da bei höherer Außentemperatur der Gang viel beträchtlicher und damit die Versuchsfehler bedeutend größer wurden. Eine Anzahl Versuche mußten aus diesem Grunde als mißlungen verworfen und auf ihre Fortsetzung verzichtet werden.

II. Messungen mit dem Mischungskalorimeter.

Die Bestimmungen der Neutralisationswärmen bei 6°, 18° und 32° wurden nach einer sich an Thomsens Versuchsanordnung anschließenden Methode ausgeführt.

Im folgenden gebe ich eine Beschreibung des angewandten Mischungskalorimeters.

Ein Becherglas *a* von einem Fassungsvermögen von rund 400 ccm, das außen versilbert war, ruhte in einem zweiten innen versilberten Becherglase auf drei Korkschneiden. Nach oben hin war der ganze Apparat durch einen paraffinierten Holzdeckel geschlossen.

Durch diesen Deckel ging ein 4 cm weites Reagenzglas *b* in das innere Gefäß. Um den Einfluß der Lufttemperatur

---

1) A. Naumann, Thermochemie, p. 375. Braunschweig 1882.

möglichst einzudämmen, stand der ganze Apparat in einem Thermostaten, der auf die Versuchstemperatur eingestellt worden war. Es wurde außerdem dafür gesorgt, daß auch die Temperatur der Umgebung sich nicht zuviel von der des Thermostaten entfernte.

Die Wärmekapazität des Kalorimeters sowie seines Zubehörs Thermometer und Rührer wurde empirisch ermittelt: Zu diesem Zweck wurde Gefäß *a* und ebenso das Reagenzglas *b* mit Wasser von verschiedener Temperatur gefüllt, der Apparat zusammengestellt und in den Thermostaten gebracht. Sobald der Gang der Temperatur ein regelmäßiger geworden, wurde durch Zerstoßen des Gefäßes *b* die Vermischung bewirkt, dann die Mischungstemperatur abgelesen. Näheres Dissertation p. 17—18.

Die folgende Tab. 7 gibt die gefundenen Werte x für die Wärmekapazität der Kalorimeter.

Tabelle 7.

	x	Mittelwert
1.	9,0072	8,875
2.	8,7430	
3.	8,6300	8,700
4.	8,7700	
5.	6,1640	6,062
6.	5,9600	

Versuch 1 und 2 sind bei 18°, 3 und 4 bei 30° C. ausgeführt.

Die Versuche 5 und 6 sind mit einem anderen Kalorimetergefäß, das bei den Mischungsversuchen bei 6° C. benutzt wurde, ausgeführt.

Diese Wärmekapazität beträgt in den beiden Fällen etwa 7 Proz. der gesamten Wärmekapazität.

Von den bei den Bestimmungen benutzten Beckmannschen Thermometern hatte das erstere eine $^1/_{50}{}^0$ Teilung, das zweite eine $^1/_{100}{}^0$ Teilung, so daß mit Hilfe einer scharfen Lupe beim ersten $^2/_{1000}{}^0$ beim zweiten $^1/_{1000}{}^0$ abgeschätzt werden konnte. Beide Thermometer waren mit einem auf Luftthermometer bezogenen Normalthermometer bei den Versuchstempe-

raturen 6°, 18° und 32° bei langsam steigender Temperatur auf das sorgfältigste verglichen worden, wobei zahlreiche Ablesungen zur Verminderung der Ablesefehler gemacht und je sechs nahe zusammenliegende zu einem Mittelwert vereinigt wurden.

Ihre Abweichungen vom Normalthermometer, das $^1/_{100}{}^0$ noch abzuschätzen gestattete, wurden auf Koordinatenpapier aufgetragen und die so entstandenen Korrektionskurven bei der Berichtigung der Thermometerablesungen zugrunde gelegt.

Die bei den Versuchen verwandten Normallösungen waren mit Oxalsäure, die vorher auf ihre Reinheit untersucht worden war, als Urtiter eingestellt. Bei der Herstellung der Lösungen wurden ausgewogene Büretten und Maßkolben verwandt.

Der Versuchsraum war ein Kellergewölbe, dessen Temperatur ziemlich leicht zu regulieren war. Während der Versuche wurde die Zimmertemperatur möglichst auf die Versuchstemperatur gebracht, die bei 6° und 18° leicht zu erreichen war, während bei 32° die Zimmertemperatur 4—5° unter der Versuchstemperatur lag und nur in einigen wenigen Fällen diese erreichte.

Über Gang und Berechnung der Versuche vgl. Dissertation p. 21.

Die nach der so beschriebenen Methode ausgeführten Versuche zerfallen in drei Hauptklassen:

I. Neutralisationswärmen bei 6°,
II. Neutralisationswärmen bei 18°,
III. Neutralisationswärmen bei 32°.

Es wurden untersucht die Neutralisationswärme von:

$$HCl + KOH;$$
$$HCl + NaOH;$$
$$HNO_3 + KOH;$$
$$NHO_3 + NaOH.$$

Die Versuche wurden mit verschieden konzentrierten Lösungen angestellt. Die Konzentrationsgrade von Säure und Basis sind: $^1/_2$-, $^1/_4$-, $^3/_8$- und $^1/_{10}$-normal. Eine weitere Ausdehnung dieser Konzentrationsgrenze war mit den benutzten Apparaten nicht möglich; bei $^1/_1$-normal überstieg die Tem-

peraturänderung den Meßbereich der Beckmannsthermometer, bei weniger als $^1/_{10}$-normal erreichten die Ablesefehler eine relativ bedeutende Größe; schon die Versuche bei $^1/_{10}$-normal sind weniger genau.

Die Normalitäten beziehen sich bei sämtlichen Versuchen ebenso wie beim Eiskalorimeter auf 1 Liter Normallösung bei 18° C.

Im folgenden gebe ich die Details der einzelnen Versuche. In den Tabellen bedeuten:

t^a die Temperatur der Säurelösung unmittelbar vor der Mischung.
t^b „ „ „ Basislösung „ „ „ „
t^c die nach Thomsen berechnete Endtemperatur.

$\vartheta = \dfrac{\dfrac{t^a + t^b}{2} + t^c}{2}$ die Versuchstemperatur und W die auf 1 Liter Normal umgerechnete, bei den Versuchen frei gewordene Wärmemenge.

Tabelle 8.

Konzentration: $^1/_2$-normal – HCl + $^1/_2$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	4,525	4,455	7,913	6,201	98,70	103,88	14 327 cal.
2.	4,753	4,728	8,151	6,445	98,87	103,79	14 271

Tabelle 9.

Konzentration: $^3/_8$-normal – HCl + $^3/_8$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	5,652	5,680	8,221	6,943	98,90	104,24	14 300 cal.
2.	4,590	4,522	7,107	5,831	98,82	104,46	14 303

Tabelle 10.

Konzentration: $^1/_4$-normal – HCl + $^1/_4$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	4,183	4,165	5,882	5,028	99,44	104,43	14 353 cal.
2.	4,440	4,402	6,123	5,278	99,44	104,84	14 332



Tabelle 11.

Konzentration: $^1/_2$-normal – HCl + $^1/_2$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	4,987	5,009	8,454	6,726	98,70	103,42	14 434 cal.
2.	4,262	4,304	7,754	6,018	98,74	103,27	14 488

Tabelle 12.

Konzentration: $^3/_8$-normal – HCl + $^3/_8$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	5,254	5,286	7,869	6,569	99,00	103,21	14 470 cal.
2.	5,722	5,727	8,308	7,016	98,99	103,25	14 383

Tabelle 13.

Konzentration: $^1/_4$-normal HCl + $^1/_4$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	4,723	4,657	6,412	5,550	99,44	104,20	14 452 cal.
2.	4,778	4,809	6,517	5,650	99,34	104,00	14 462

Tabelle 14.

Konzentration: $^1/_2$-normal – HNO_3 + $^1/_2$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	4,578	4,602	8,017	6,308	98,32	103,90	14 288 cal.
2.	4,082	4,054	7,503	5,785	98,27	103,90	14 318

Tabelle 15.

Konzentration: $^3/_8$-normal HNO_3 + $^3/_8$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	3,976	4,103	6,616	5,327	98,71	104,03	14 334 cal.
2.	4,034	4,006	6,583	5,300	98,53	103,55	14 257

Tabelle 16.

Konzentration: $^1/_4$-normal HNO_3 + $^1/_4$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	4,468	4,551	6,224	5,360	98,90	103,06	14 310 cal.
2.	4,238	4,264	5,955	5,105	98,94	104,00	14 270

Tabelle 17.

Konzentration: $^1/_2$-normal – HNO_3 + $^1/_2$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	4,145	4,127	7,624	5,556	98,37	103,23	14 488 cal.
2.	4,788	4,772	8,100	6,430	98,20	103,60	14 421

Tabelle 18.

Konzentration: $^3/_8$-normal – HNO_3 + $^3/_8$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	4,054	4,089	6,642	5,356	98,61	103,47	14 393 cal.
2.	4,087	4,010	6,640	5,344	97,87	103,86	14 438

Tabelle 19.

Konzentration: $^1/_4$-normal – HNO_3 + $^1/_4$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	4,520	4,462	6,200	5,445	99,04	105,50	14 420 cal.
2.	4,352	4,361	6,075	5,215	98,47	104,15	14 400

Tabelle 20.

Konzentration: $^1/_2$-normal – HCl + $^1/_2$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	16,351	16,522	19,708	18,072	99,01	102,56	13 779 cal.
2.	16,183	16,375	19,546	17,912	99,05	102,06	13 729
3.	16,810	16,960	20,121	18,503	98,97	102,78	13 646
4.	16,755	16,840	20,078	18,437	98,69	101,53	13 768

Tabelle 21.

Konzentration: $^1/_4$-normal – HCl + $^1/_4$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	17,013	17,106	18,690	17,880	99,55	105,38	13 753 cal.
2.	19,608	16,749	18,302	17,490	99,21	101,39	13 725

Tabelle 22.

Konzentration: $^{1}/_{10}$-normal – HCl + $^{1}/_{10}$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	16,233	16,285	16,906	16,582	99,19	101,96	13 687 cal.
2.	17,015	17,127	17,716	17,397	99,56	101,63	13 618
3.	15,922	16,076	16,652	16,323	99,68	101,43	13 780
4.	16,343	16,478	17,060	16,735	99,62	100,57	13 727

Tabelle 23.

Konzentration: $^{1}/_{2}$-normal – HCl + $^{1}/_{2}$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	16,796	17,001	20,215	18,550	99,16	101,25	13 939 cal.
2.	16,935	16,885	20,256	18,530	99,10	101,52	14 003
3.	16,787	16,919	20,194	18,525	99,13	101,39	13 987
4.	16,313	16,473	19,747	18,070	99,12	101,24	14 030

Tabelle 24.

Konzentration: $^{1}/_{4}$-normal – HCl + $^{1}/_{4}$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	17,548	17,686	19,280	18,448	99,70	101,30	13 952 cal.
2.	17,475	17,719	19,263	18,430	99,91	102,00	14 020

Tabelle 25.

Konzentration: $^{1}/_{10}$-normal – HCl + $^{1}/_{10}$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	16,805	16,821	17,474	100,05	102,46	17,143	13 941 cal.
2.	16,411	16,578	17,160	99,89	100,88	16,827	13 986

Tabelle 26.

Konzentration: $^{1}/_{2}$-normal – HNO_3 + $^{1}/_{2}$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	17,348	18,010	20,918	19,298	98,33	103,28	13 656 cal.
2.	16,633	17,192	20,140	18,502	98,41	103,63	13 620

Tabelle 27.

Konzentration: $^3/_8$-normal – HNO_3 + $^3/_8$-normal – HCl.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	17,363	17,481	19,853	18,630	98,83	103,26	13 660 cal.
2.	17,018	17,285	19,588	18,359	98,60	102,20	13 645

Tabelle 28.

Konzentration: $^1/_4$-normal HNO_3 + $^1/_4$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	18,300	18,350	19,955	19,100	98,95	103,40	13 623 cal.
2.	17,716	17,998	19,475	18,410	98,47	103,28	13 660

Tabelle 29.

Konzentration: $^1/_2$-normal – HNO_3 + $^1/_2$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	16,612	16,646	20,008	18,370	98,19	101,93	13 960 cal.
2.	17,435	17,254	20,704	19,024	98,22	102,15	13 888

Tabelle 30.

Konzentration: $^3/_8$-normal – HNO_3 + $^3/_8$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	17,260	17,354	19,807	18,557	98,63	102,69	13 856 cal.
2.	17,545	17,636	20,088	18,840	98,70	102,40	13 808

Tabelle 31.

Konzentration: $^1/_4$-normal – HNO_3 + $^1/_4$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	17,168	17,203	18,855	18,024	98,90	103,40	13 885 cal.
2.	17,274	17,217	18,911	18,070	98,54	103,10	13 902

Tabelle 32.

Konzentration: $^1/_2$-normal – HCl + $^1/_2$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	30,346	30,379	33,467	31,914	99,16	101,78	12 995 cal.
2.	30,357	30,581	33,578	32,023	99,51	100,98	12 958
3.	30,418	30,491	33,563	32,008	99,15	101,81	13 018

Tabelle 33.

Konzentration: $^1/_4$-normal – HCl + $^1/_4$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	30,499	30,439	32,022	31,220	99,83	101,43	12 990 cal.
2.	30,519	30,463	32,022	31,282	99,01	102,97	12 958

Tabelle 34.

Konzentration: $^1/_{10}$-normal – HCl + $^1/_{10}$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	30,408	30,572	31,111	30,805	100,72	100,99	13 014 cal.
2.	30,531	30,559	31,166	30,855	99,52	101,59	13 075

Tabelle 35.

Konzentration: $^1/_2$-normal – HCl + $^1/_2$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	30,650	30,631	33,821	32,230	98,89	99,90	13 225 cal.
2.	30,549	30,747	33,815	32,230	98,89	100,47	13 209
3.	30,408	30,848	33,784	32,210	98,90	100,45	13 178

Tabelle 36.

Konzentration: $^1/_4$-normal – HCl + $^1/_4$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	30,588	30,451	32,101	31,310	99,32	100,99	13 222 cal.
2.	30,880	30,922	32,481	31,691	99,28	101,06	13 245

Tabelle 37.

Konzentration: $^1/_{10}$-normal – HCl + $^1/_{10}$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	31,037	31,230	31,757	31,470	99,75	102,17	13 202 cal.
2.	30,670	30,510	31,217	30,880	99,24	102,51	13 224

Tabelle 38.

Konzentration: $^1/_2$-normal – HNO_3 + $^1/_2$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	30,237	30,171	33,272	31,739	98,49	103,06	12 900 cal.
2.	30,118	30,345	33,303	31,727	98,33	102,81	12 907

Tabelle 39.

Konzentration: $^3/_8$-normal – HNO_3 + $^3/_8$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	30,095	30,135	32,426	31,210	98,63	102,90	12 971 cal.
2.	30,146	30,059	32,404	31,253	98,65	102,97	12 911

Tabelle 40.

Konzentration: $^1/_4$-normal – HNO_3 + $^1/_4$-normal – NaOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	29,958	30,323	31,659	30,899	98,88	103,23	12 896 cal.
2.	30,537	30,316	31,952	31,189	98,17	103,10	12 982

Tabelle 41.

Konzentration: $^1/_2$-normal – HNO_3 + $^1/_2$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	30,015	30,059	33,158	31,597	98,21	103,04	13 132 cal.
2.	30,055	30,155	33,287	31,672	98,31	102,59	13 163

Tabelle 42.

Konzentration: $^1/_4$-normal – HNO_3 + $^1/_4$-normal – KOH.

	t^a	t^b	t^c	ϑ	H_2O^a	H_2O^b	W
1.	29,961	30,217	31,651	30,900	99,16	102,19	13 161 cal.
2.	29,995	30,410	31,748	30,870	98,65	103,61	13 147

Die experimentell gewonnenen Versuchsergebnisse wurden aus folgenden Gründen berichtigt:

1. weil die Wärmekapazität einer Lösung nicht identisch ist mit der des in der Lösung enthaltenen Wassers,

2. weil bei der Neutralisation Wasser gebildet wird,

3. weil die Temperaturerhöhung im Kalorimeter eine Veränderung des Wasserdampfgehaltes im Dampfraum hervorruft und durch Neubildung von Dampf dem Kalorimeter Wärme entzogen wird.

Schließlich wurden sämtliche Werte auf die 15°-Kalorie umgerechnet. Näheres vgl. Dissertation p. 28—31.

In der folgenden Tabelle gebe ich eine Zusammenstellung der durch Versuch gefundenen mit den korrigierten Werten. Die ersteren, in der Tabelle mit einem Strich bezeichnet, beziehen sich auf 6, 18 und 32° C. und sind das Mittel aus der Zahl der Versuche für die jeweilige Konzentration, während die nebenstehenden Zahlen die korrigierten Werte darstellen.

Tabelle 43.

Zusammenstellung der Versuchsergebnisse.

$t = 0°$ C.

Konzentration	KCl	Konzentration	NaCl
$^1/_2$-normal	14 805	$^1/_1$-normal	14 984
$^1/_4$ „	14 707	$^1/_4$ „	14 580
$^1/_{10}$ „	14 709	$^1/_{10}$ „	14 604

$t = 6°$ C.

Konzentration	KCl′	KCl	NaCl′	NaCl
$^1/_4$-normal	14 481	14 473	14 316	14 352
$^3/_{16}$ „	14 470	14 463	14 323	14 359
$^1/_8$ „	14 435	14 448	14 296	14 331

Konzentration	KNO_3'	KNO_3	$NaNO_3'$	$NaNO_3$
$^1/_4$-normal	14 454	14 472	14 305	14 399
$^3/_{16}$ „	14 378	14 402	14 259	14 345
$^1/_8$ „	14 373	14 405	14 247	14 324

$t = 18°$ C.

Konzentration	KCl′	KCl	NaCl′	NaCl
$^1/_4$-normal	14 009	13 937	13 742	13 714
$^1/_8$ „	14 010	13 957	13 724	13 693
$^1/_{20}$ „	13 916	13 887	13 645	13 681

Konzentration	KNO_3'	KNO_3	$NaNO_3'$	$NaNO_3$
$^1/_4$-normal	13 956	13 912	13 680	13 708
$^3/_{16}$ „	13 895	13 864	13 676	13 695
$^1/_8$ „	13 870	13 838	13 676	13 686

Tabelle 43 (Fortsetzung).

$t = 32°$ C.

Konzentration	KCl'	KCl	NaCl'	NaCl
1/4-normal	13 210	13 155	12 990	12 974
1/8 „	13 212	13 171	12 942	12 922
1/20 „	13 178	13 160	12 995	12 980

Konzentration	KNO_3'	KNO_3	$NaNO_3'$	$NaNO_3$
1/4-normal	13 132	13 103	12 892	12 928
3/16 „	13 107	13 087	12 907	12 935
1/8 „	—	—	12 873	12 892

Anstatt in der Tab. 43 KOH+HCl zu setzen, wurde der Kürze halber KCl gesetzt und ebenso bei den anderen Neutralisationsgleichungen.

Was die Beobachtungsfehler angeht, so zeigen die Versuchsergebnisse nur in wenigen Fällen einen Unterschied zwischen den äußersten Werten bis zu 80 Cal. = 0,6 Proz., so daß die Mittelwerte auf mindestens $\pm{}^3/_{1000}$ genau sind, eine Genauigkeit, wie sie durch das angewandte Verfahren und bei den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht größer erzielt werden konnte.

Wie die vorstehende Zusammenstellung (vgl. Tab. 43) zeigt, ist in den einzelnen Konzentrationen kein Gang der Neutralisationswärme festzustellen und deckt sich dieses mit den bei 0° gefundenen Ergebnissen, bei denen die verdünnten Lösungen unter $^1/_2$-normal keinen über die Fehlergrenze hinausgehenden Unterschied zeigen.

Zur Bestimmung der Temperaturkoeffizienten sind daher die für dieselbe Lösung bei verschiedenen Konzentrationen von $^1/_4$- bis $^1/_{10}$-normal erhaltenen Werte zu einem Mittelwert vereinigt worden.

Die graphische Darstellung dieser Mittelwerte ergibt eine merklich gradlinige Abnahme der Neutralisationswärme mit steigender Temperatur; nur bei KCl zeigt sich eine die Beobachtungsfehler übersteigende Abweichung. Es sind daher die

Werte bei 0°, s_0, und der Temperaturkoeffizient α für die einzelnen Lösungen nach der liniaren Formel:

$$s = s_0(1 - \alpha t) = s_0 - A t$$

mittels kleinster Quadrate berechnet worden.

Wie die Vergleichung der so berechneten mit den beobachteten Werten zeigt, ist nur an einer Stelle (KCl bei 32°) eine Abweichung vorhanden, die 0,3 Proz. übersteigt; höher ist aber auch die Genauigkeit der Beobachtungen nicht zu schätzen.

In der folgenden Tabelle gebe ich eine Zusammenstellung der so berechneten Werte von s_0 und A.

Tabelle 44.

	Neutralisationswärme in 15°-cal. s_0	Abnahme auf ein Grad Temperaturabnahme A	Aus den spez. Wärmen nach J. Thomsen Lösung 0,275 n. A	Differenz
KCl	14 759	49,0	46	+ 3,0
NaCl	14 620	51,8	49	+ 2,8
KNO_3	14 755	51,3	27	+24,3
$NaNO_3$	14 689	55,0	36	+19,0

Zu gleicher Zeit gibt die Tab. 44 eine Zusammenstellung der Werte von A, wie sie nach J. Thomsen aus den spezifischen Wärmen der Lösungen vor und nach der Reaktion berechnet werden kann.[1]

Die Tab. 47 gibt eine Übersicht der berechneten und beobachteten Werte der Neutralisationswärme in 15°-Kal. von KCl, NaCl, KNO_3 und $NaNO_3$ bei den Temperaturen 0°, 6°, 18° und 32°.

Tabelle 45.

	KCl			NaCl		
	beob.	ber.	Abweich.	beob.	ber.	Abweich.
s_0	14 740	14 759	−19	14 592	14 620	+28
s_6	14 461	14 465	− 4	14 347	14 309	−38
s_{18}	13 927	13 876	+51	13 679	13 687	+ 8
s_{32}	13 162	13 190	−28	12 959	12 962	+ 3

1) J. Thomsen, Thermochemische Untersuchungen 1. p. 65.

Tabelle 45 (Fortsetzung).

	KNO_3			$NaNO_3$		
	beob.	ber.	Abweich.	beob.	ber.	Abweich.
s_0	—	14 755	—	—	14 689	—
s_6	14 426	14 447	+21	14 356	14 357	+1
s_{18}	13 871	14 832	−39	13 696	13 694	−2
s_{32}	13 095	13 113	+18	12 918	12 919	+1

Sehr wünschenswert wäre es gewesen, aus der Beobachtung in der von Arrhenius[1]) angegebenen Weise unter Berücksichtigung des Dissoziationsgrades und der Ionisationswärmen von Säure, Basis und Salz die Ionisationswärme des Wassers zu berechnen; diese Berechnung setzt aber eine genauere Kenntnis der Temperaturkoeffizienten des elektrischen Leitvermögens der betreffenden Lösungen voraus als sie nach den vorliegenden Beobachtungen vorhanden ist, und kann erst nach Ausfüllen dieser Lücken mit Aussicht auf Erfolg unternommen werden. Eine Vergleichung der von mir gefundenen Werte mit denen Thomsens und Berthelots habe ich in meiner Dissertation p. 35—36 gegeben.

Alles zusammenfassend, geht aus vorliegenden Untersuchungen hervor:

1. Die Neutralisationswärme ist im hohen Grade von der Temperatur abhängig und läßt sich innerhalb des Beobachtungsintervalles von 0° bis 32° mit großer Annäherung durch die lineare Formel

$$s = s_0 - A\,t$$

darstellen, die Abweichungen der so berechneten von den beobachteten Werten übersteigen kaum die Beobachtungsfehler. Danach würde der Temperaturkoeffizient der Neutralisationswärmen

$$\frac{1}{s}\frac{d\,s}{d\,t} = \frac{A}{s}$$

mit steigender Temperatur zunehmen.

1) S. Arrhenius, Zeitschr. f. phys. Chem. **4.** p. 107. 1889; **9.** p. 339. 1892.

2. Die Neutralisationswärme der K-Salze ist größer als die der entsprechenden Na-Salze; dagegen die Abnahme bei steigender Temperatur größer für die Na- als für die K-Salze. Ein merklicher Unterschied ist für die Nitrate und Chloride nicht vorhanden; die Temperaturänderung ist für die ersteren etwas größer.

3. Eine Abhängigkeit der Neutralisationswärme von der Konzentration konnte nur bei einer stärker konzentrierten Lösung ($^1/_1$-normal) nachgewiesen werden; während sie sich bei verdünnteren Lösungen von $^1/_2$- bis $^1/_{10}$-normal der Beobachtung entzog. Sie scheint von $^1/_1$- auf $^1/_2$-normal stark abzufallen und dann mit zunehmender Verdünnung bis $^1/_{10}$-normal nahezu konstant zu bleiben. Über die verdünnteren Lösungen läßt sich nichts Sicheres aussagen.

4. Einen direkten Schluß auf die Größe der Ionisationswärme des Wassers erlauben die Versuche vorläufig nicht, da die hierzu erforderliche Kenntnis der Temperaturkoeffizienten der Leitfähigkeiten von den Säure- und Alkalilösungen in den hier benutzten Konzentrationen noch fehlt.

Vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Institute der kgl. Universität Münster angefertigt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Prof. Dr. Heydweiller für die freundliche Hilfe und Unterstützung, welche er mir bei der Ausführung der Arbeit hat zuteil werden lassen, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 28. Oktober 1905.)

---

7. *Näherungsweise Bestimmung der Doppelbrechung fester und flüssiger Kristalle; von O. Lehmann.*

Die „Doppelbrechung" eines Kristalles, d. h. die größte Differenz der beiden Brechungsexponenten ist eine Konstante des betreffenden Stoffs, deren rasche, wenn auch nur näherungsweise Ermittelung z. B. für den Chemiker zur Identifizierung eines Präparates mit einem anderen von besonderem Interesse sein kann. Bereits an anderer Stelle ist dies näher ausgeführt[1]), doch wurde bisher nur selten von Bestimmung der Doppelbrechung zu den angedeuteten Zwecken Gebrauch gemacht, da die bekannten Methoden viel zu zeitraubend sind. Das Schleifen eines Prismas aus dem zu untersuchenden Kristall und die Bestimmung der beiden Brechungsexponenten mittels des Spektrometers oder die Anwendung des Kristallrefraktometers kommen meist schon deshalb nicht in Frage, weil die zu untersuchenden Kristalle viel zu klein sind oder nur bei höherer Temperatur, in Lösungen usw. existieren können. Die Bestimmung der Interferenzfarbe unter dem Mikroskop durch Kompensation der Doppelbrechung mittels des Babinetschen Kompensators (oder eines Gipskeiles) oder durch spektrale Zerlegung unter Anwendung eines Spektralokulars führt nur dann zur Kenntnis der Doppelbrechung, wenn die Dicke der Präparate mit genügender Genauigkeit gemessen werden kann, was in der Regel nicht zutrifft. Auch die Ermittelung der beiden Brechungsexponenten durch Suspension in starkbrechenden Flüssigkeiten von gleichen Brechungsexponenten (z. B. Mischungen von Methylenjodid und Benzol) ist nur selten anwendbar und erscheint wenig genau, da im allgemeinen die Dispersion von Kristall und Flüssigkeit erheblich verschieden ist, so daß, wenigstens bei Anwendung von weißem Licht, das

1) Vgl. O. Lehmann, Wied. Ann. 13. p. 506, 1881; Kristallanalyse oder die chemische Analyse durch Beobachtung der Kristallbildung mit Hilfe des Mikroskops, Leipzig, W. Engelmann, 1891, p. 33.

Unsichtbarwerden des Kristalles nicht hinreichend scharf erkannt werden kann.

So erklärt es sich denn, daß die Chemiker derartigen Bestimmungen geringes Interesse, aber um so größeres Mißtrauen entgegenbringen.

In auffälliger Weise trat dies zutage gelegentlich der Versammlung der deutschen Bunsengesellschaft für physikalische Chemie am 3. Juni d. J., in welcher Hr. Tammann auf ein Referat des Hrn. Schenck über flüssige Kristalle mit aller Bestimmtheit erklärte, daß eine Doppelbrechung flüssiger Kristalle bis jetzt nicht nachgewiesen sei und die von mir photographisch aufgenommenen Felderteilungen[1]) sich einfach durch Polarisation an spiegelnden Flächen feinster Tröpfchen erklären ließen, flüssige Kristalle also überhaupt nicht existierten, sondern die betreffenden Stoffe als Emulsionen aufzufassen seien. Die Mehrzahl der Anwesenden schien diese Auffassung zu teilen, da sich nur wenige zu einer Entgegnung meldeten, welche mit Rücksicht auf die beschränkte Zeit von dem Vorsitzenden erst in späterer Sitzung zugelassen wurde. In Nernsts Lehrbuch der theoretischen Chemie 4. Aufl. p. 99 wird Tammanns Einwänden großes Gewicht beigelegt, in Chwolsons neuestem Lehrbuch der Physik Bd. 3 p. 583 wird Tammanns Auffassung des festen Zustandes ein besonderes Kapitel gewidmet und nur flüchtig erwähnt, daß sich meine Untersuchungen damit nicht in Übereinstimmung befinden. Riecke[2]) ist ebenfalls nicht davon überzeugt, daß die von mir beobachteten Körper als flüssige Kristalle bezeichnet werden können, „denn es fehlt ihnen wahrscheinlich die Homogenität“ und Rotarski[3]) kommt mir auf Grund eingehender eigener Untersuchungen nur soweit entgegen, daß er Tammanns Ansicht und die meinige für *gleich*berechtigt erklärt.

Alle diese meiner Auffassung ungünstigen Meinungen dürften darauf zurückzuführen sein, daß die Mitteilungen über Bestimmung der Doppelbrechung bei flüssigen Kristallen[4]) nicht

1) Vgl. O. Lehmann, Flüss. Krist., Leipzig 1904, Taf. I—XXXVIII.

2) E. Riecke, Physikal. Zeitschr. 6. p. 25. 1905.

3) Th. Rotarski, Ann. d. Phys. 17. p. 185. 1905.

4) O. Lehmann, Flüssige Kristalle p. 60 u. Ann. d. Phys. 2. p. 661. 1900.

genügend ausführlich waren und die von mir angegebenen Versuche, der Umständlichkeit wegen, überhaupt nicht wiederholt wurden.

Ich habe mich deshalb bemüht, im Anschluß an jene Versuche ein bequemeres Verfahren ausfindig zu machen und gelangte zu einem solchen durch eine kleine Modifikation einer der früheren Methoden.

Bekanntlich zeigt ein Gipskeil in geeigneter Lage zwischen gekreuzten Nicols farbige Streifen, eine Gipslinse farbige Ringe. Aus der Dicke an einer Stelle und der dort auftretenden Farbe kann man in einfacher Weise die Doppelbrechung berechnen.

Eine Linse von bekannter Form aus einer kristallinischen Flüssigkeit kann nun aber sehr leicht erhalten werden, indem man einen kleinen Tropfen derselben zwischen eine planparallele Platte und eine plankonvexe Linse von bekanntem Krümmungsradius bringt. Das Verfahren ist genau dasselbe, welches man bei dem bekannten Versuch über Newtonsche Ringe anwendet.

Ist h die Dicke der Schicht an einer Stelle, v_1 die Geschwindigkeit des einen, v_2 die des anderen Strahles in der Flüssigkeit, v die Geschwindigkeit in Luft und λ die Wellenlänge, so sind die Zeiten, welche die beiden Strahlen zum Durchdringen der Schicht erfordern h/v_1 bez. h/v_2 und für den ersten dunkeln Ring von der Mitte gerechnet muß die Differenz dieser Zeiten, da dort die Strahlen beim Austritt sich zu linearpolarisiertem Licht von der ursprünglichen Schwingungsrichtung zusammensetzen, $= \lambda/v$ sein, d. h. gleich der Dauer einer ganzen Schwingung. Demnach ist

$$h/v_1 - h/v_2 = \lambda/v$$

oder wenn $n_1 = v/v_1$ und $n_2 = v/v_2$ die beiden Brechungsexponenten bedeuten

$$\lambda = h(n_1 - n_2).$$

Ist a der Radius des dunkeln Ringes und r der Krümmungsradius der Linse, so ergibt sich aus der bei Berechnung der Newtonschen Ringe angewandten Formel[1] $h = a^2/2r$, somit

$$\lambda = a^2(n_1 - n_2)/2r$$

oder

$$n_1 - n_2 = \text{Konst.}/a^2,$$

1) Vgl. F. Kohlrausch, Prakt. Physik, 10. Aufl. p. 288.

d. h. die Doppelbrechung ist umgekehrt proportional dem Quadrate der Ringdurchmesser. Die Konstante ergibt sich leicht, indem man zunächst eine Substanz von bekannter Doppelbrechung beobachtet.

Eigentlich sollte, da die Formel ein bestimmtes λ voraussetzt, zur Beobachtung homogenes Licht verwendet werden. Verzichtet man aber auf Bestimmung der Doppelbrechung für verschiedene Wellenlängen, d. h. der Dispersion der Doppelbrechung, welche in den meisten Fällen entbehrlich ist, so genügt die Anwendung von weißem Licht und gibt genauere Resultate, da man die Ringe verschiedener Ordnung sofort durch ihre verschiedene Färbung unterscheiden kann und die Einstellung auf das empfindliche Violett (Auslöschung von $\lambda = 0{,}000575$) wesentlich sicherer ist als die auf das Maximum der Dunkelheit. Jene Farbe bildet eine fast lineare Grenze zwischen dem roten und grünen Teil des ersten Farbenringes, deren Durchmesser leicht am Okularmikrometer abgelesen werden kann. Ebenso kann man bei den Ringen höherer Ordnung mit genügender Genauigkeit auf die Grenze zwischen rot und grün einstellen. Der Krümmungsradius r der Linse, welche ich gewöhnlich benutze, beträgt 32 mm, ihr Durchmesser 20 mm; es eignen sich aber auch stärker und weniger stark gekrümmte Linsen, selbst gewöhnliche konvexe Brillengläser.

Ist das Gewicht der Linse zu gering, so erscheint das Zentrum des Ringsystems nicht dunkel, da infolge der Adsorptionskraft eine dünne Flüssigkeitsschicht zwischen Linse und Platte verbleibt[1]; ist das Gewicht zu groß, belastet man z. B. die Linse durch ein aufgelegtes schweres ringförmiges Messinggewicht, so wird das dunkle Gebiet und damit das ganze Ringsystem infolge der Deformation der Linse zu groß. Die Änderung kann nach den von Hertz[2]) gegebenen Formeln eventuell berechnet werden und umgekehrt kann man diese Änderung dazu benutzen, jene Formeln zu prüfen oder die Elastizität der angewandten Glassorten zu bestimmen.[3]) Eine Linse aus anisotroper Substanz würde natürlich eine elliptische

---

1) Vgl. O. Lehmann, Flüssige Kristalle, p. 137. § 5.

2) H. Hertz, Schriften gemischen Inhalts, Leipzig 1895, p. 174.

3) Oder um den sphärischen Schliff zu untersuchen.

Verzerrung bedingen, der Versuch könnte also auch dazu dienen, rasch einen Überblick über das *elastische Verhalten* einer isotropen oder anisotropen durchsichtigen Substanz zu gewinnen, was eventuell später in einer besonderen Mitteilung näher erörtert werden soll.

Das Gewicht der gewöhnlich benutzten Linse von den angegebenen Dimensionen hat sich als nicht ganz zureichend erwiesen, so daß die nachstehenden Zahlen mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sind, indes dürfte der Fehler nur gering sein.

Eine andere Unsicherheit ist bedingt durch die Anwendung des Okularmikrometers in Anbetracht der Strahlenbrechung in der Linse. Ich habe deshalb anfänglich an Stelle des Okular- ein Objektivmikrometer benutzt, d. h. an Stelle eines gewöhnlichen Objektträgers aus Spiegelglas einen solchen mit Teilung in $^1/_{10}$ oder $^1/_{100}$ mm gebraucht. Obschon der Brechungsexponent der Flüssigkeit von dem des Glases nicht sehr abweicht, waren doch die Teilstriche deutlich zu sehen, so daß bei gleichzeitiger Anwendung des Okularmikrometers die Verzerrung des Gesichtsfeldes gemessen werden konnte. Der Versuch ergab, daß zwar eine geringe Verzerrung auftritt, dieselbe aber so unbedeutend ist, daß sie vernachlässigt werden kann. Auch der Brechungsexponent der Flüssigkeit zwischen Platte und Linse war ohne nennenswerten Einfluß, so daß in allen Fällen der Radius a mit Hilfe des einmal durch Vergleich mit dem Objektivmikrometer geeichten Okularmikrometers gemessen werden kann.

Läßt man die flüssig kristallinische Masse erstarren, so ändern die Ringe ihren Durchmesser entsprechend der Verschiedenheit der Doppelbrechung der beiden Modifikationen, woraus hervorgeht, daß das Verfahren auch auf die durch Erstarrung gebildeten festen Kristalle anwendbar bleibt und daß nicht, wie man etwa vermuten könnte, durch die Erstarrung etwa eine Änderung des Zwischenraumes zwischen Objektträger und Linse durch Hebung der letzteren infolge der Kristallisationskraft eintritt.[1]) Gleiches gilt auch für die Erstarrung gewöhn-

1) Zuweilen tritt allerdings eine solche Wirkung ein, doch läßt sie sich leicht erkennen durch Änderung des dunkeln Feldes im Zentrum.

licher Schmelzflüsse. Da die Doppelbrechung der bei der Erstarrung entstehenden Kristalle natürlich davon abhängig ist, mit welcher Fläche sie dem Objektträger aufliegen, ein optisch einachsiger Kristall z. B., dessen Achse gerade senkrecht steht, gar keine Doppelbrechung hervorbringt, so sind die Ringe nur dann vollkommen ausgebildet, wenn das ganze Gesichtsfeld von einem einheitlichen Kristall ausgefüllt ist, entsprechend dem Verhalten einer Gipslinse. Stoßen aber z. B. in der Mitte des Gesichtsfeldes zwei Kristallmassen von verschiedener Orientierung zusammen, so hat in der Hälfte, in welcher die Doppelbrechung stärker ist, das Ringsystem kleineren Durchmesser, es erscheint an der Grenze der beiden Gebiete gebrochen. Im allgemeinen werden Kristalle verschiedenster Orientierung im Gesichtsfeld entstehen, man erhält deshalb entsprechend ein Ringsystem mit mannigfachen „*Verwerfungen*“, um einen in der Geologie üblichen Ausdruck zu gebrauchen. Diese Verwerfungen stören die Messungen nicht, da es sich ja nur darum handelt, die *größte* Doppelbrechung, d. h. den *kleinsten* Wert von *a* festzustellen. Bei öfters wiederholter Messung wird man sicher die Grenze feststellen können, welche der Wert von *a* nicht unterschreiten kann. Die verschiedenen Substanzen zeigen in dieser Hinsicht bedeutende Unterschiede, die ebenfals zu ihrer Charakterisierung und Erkennung beitragen können. Während bei manchen Verwerfungen auftreten, bei welchen die einen Ringsegmente doppelt so großen Radius haben wie die anderen, sind bei anderen die Unterschiede kaum zu bemerken, so daß die Verwerfungen überhaupt nur undeutlich hervortreten.

Natürlich muß man auch darauf Rücksicht nehmen, welche Modifikation der Substanz vorliegt. Beispielsweise besitzt das salpetersaure Ammoniak *fünf* feste Modifikationen.[1]) Jede Um-

1) Vier derselben habe ich bereits früher beobachtet, vgl. Zeitschr. f. Kristallogr. **1.** p. 105. 1877 (Dissertation 1876), Flüssige Kristalle p. 188. Neuerdings fand ich durch Beobachtung eines Präparates in flüssiger Luft unter dem Mikroskop eine fünfte Modifikation, welche einige Grade unter 0° (Hr. Dr. Sieveking fand mittels Thermoelementes ca. – 4°) durch plötzliche Umwandlung der gewöhnlichen Modifikation entsteht und sich beim Erwärmen ebenso plötzlich in diese bei derselben Temperatur zurückverwandelt. Zur näheren Feststellung der Umwandlungstemperatur dürfte das Registrierthermometer von Siemens & Halske (vgl. Hoffmann u.

wandlung bedingt natürlich eine sprungweise Änderung des Ringsystems, bei Umwandlung in die reguläre Modifikation verschwindet dasselbe ganz. Man macht hierbei die auffallende Beobachtung, daß *in der Nähe des Dunkelraumes im Zentrum die Umwandlung beträchtlich erschwert* erscheint in Übereinstimmung mit anderen ähnlichen Beobachtungen über den Einfluß der Adsorptionskraft auf die Umwandlung.[1]) Eingehendere Mitteilung hierüber muß auf spätere Gelegenheit verschoben werden.

Nachstehend gebe ich eine Zusammenstellung der Ringdurchmesser[2]), welche bei verschiedenen Substanzen gefunden wurden. Bei manchen ist dabei nur der Ring erster Ordnung angegeben, da die anderen sich wegen zahlreicher Verwerfungen oder anderer Störungen nicht hinreichend scharf bestimmen ließen. Nach obigem sollte sein: $I:II:III:IV = 1:\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{4}$.

Pikrinsäure	**I**	**77,**	**II**	**106,**	**III**	**130,**	**IV**	**145**
Akridin	**I**	**41,**	**II**	**52,**	**III**	**63 (unregelmäßig)**		
Succinylobernsteinsäureester	**I**	**32,**	**II**	**49,**	**III**	**62**		
Bromzimtaldehyd	**I**	**23,**	**II**	**36,**	**III**	**46**		
Orthoquecksilberditolyl, stabil	**I**	**26,**	**II**	**37,**	**III**	**46,**	**IV**	**52**
Schwefel, rhombisch (?)	I	26,	II	39,	III	47,	IV	57
Toluylendiamin	I	70						
Triphenylmethan, labil	I	100 (unregelmäßig)						
Triphenylguanidin, labil	I	52,	II	63,	III	90		
Resorcin	I	38 (unregelmäßig)						
Acetamid	I	71,	II	98,	III	118,	IV	136
Orthoamidobenzoesäure	I	36,	II	43,	III	60		
Phenylpyrazin	I	60						
Metanitroparacettoluid	I	44,	II	58,	III	73		
Orcin	I	200 (unregelmäßig)						
Nitronaphtalin	I	30,	II	39,	III	47		
Benzoin	I	52						
Benzophenon	I	37,	II	41,	III	50,	IV	61
Azobenzol	I	46,	II	63				
Benzil	I	112,	II	151,	III	188,	IV	219
Tolylphenylketon	I	75,	II	106,	III	130		

Rothe, Zeitschr. f. Instrumentenk. **25.** p. 273. 1905) besonders geeignet sein, welches mir nicht zur Verfügung steht.

1) O. Lehmann, Flüssige Kristalle, p. 84 § 21 u. Fig. 95. p. 58.

2) In Okularmikrometerteilen. 1 Teil war = 0,0236 mm, denn die Eichung ergab 55 Teile = 1,3 mm. Die Vergrößerung war 55 fach.

Die Tabelle soll nur zeigen, wie groß ungefähr die Unterschiede bei verschiedenen Substanzen sind, auf Genauigkeit macht sie keinen Anspruch, schon deshalb, weil, wie bemerkt, die Belastung der Linse noch nicht die richtige war. Die Unsicherheit kommt zum Ausdruck, wenn man versucht, aus den beobachteten Durchmessern d die Konstante der Formel zu bestimmen. Es ist

$$n_1 - n_2 = \frac{\lambda \, . \, 2r \, . \, 4}{0{,}0236^2 \, . \, d^2} = \frac{\text{Konst.}}{d^2},$$

somit

$$\text{Konst.} = \frac{0{,}000575 \, . \, 64 \, . \, 4}{0{,}0236^2} = 242.$$

Nun ist z. B. für Benzil

$$n_1 = 1{,}6784, \quad n_2 = 1{,}6588\text{ [1]},$$

somit

$$n_1 - n_2 = 0{,}0196$$

und

$$\text{Konst.} = 0{,}0196 \, . \, 112^2 = 245$$

in relativ guter Übereinstimmung mit obigem. Für Tolylphenylketon ist (nach Bodewig)

$$n_1 = 1{,}7170, \quad n_2 = 1{,}5629,$$

somit

$$n_1 - n_2 = 0{,}1541$$

und

$$\text{Konst.} = 75^2 \, . \, 0{,}1541 = 870.$$

Dieser Wert weicht von dem obigen so bedeutend ab, daß wohl anzunehmen ist, die Brechungsexponenten gehörten einer anderen Modifikation zu, oder die von mir untersuchte Substanz sei mit der von Bodewig gemessenen nicht identisch.

Für rhombischen Schwefel ist

$$n_1 = 2{,}2405, \quad n_2 = 1{,}9505,$$

somit

$$n_1 - n_2 = 0{,}2900$$

und

$$\text{Konst.} = 196.$$

Auch hier ist möglicherweise anzunehmen, daß eine andere

1) Diese und die folgenden Brechungsexponenten gelten für Natriumlicht, d. h. $\lambda = 0{,}0005896$.

Modifikation vorlag. Vielleicht liegt auch der Grund der Nichtübereinstimmung darin, daß sich die Kristalle bei manchen Substanzen nie in der Lage auf dem Glas ausscheiden, welche die stärkste Doppelbrechung ergibt. Eine genauere Untersuchung müßte dies aufklären.

Bei Stoffen, die in kleinen Kriställchen oder dünnen Blättern auftreten, die sich in verschiedener Orientierung übereinanderlagern (z. B. Wallrath), treten Störungen hinzu, indem ähnlich wie bei den Glimmerkombinationen von Reusch Drehung der Polarisationsebene und elliptische Polarisation auftritt. Die Methode läßt sich dann überhaupt nicht mehr anwenden.

Noch komplizierter werden die Erscheinungen bei „fließenden Kristallen", deren Individuen sich nicht nur in verschiedensten Richtungen übereinanderschieben, sondern auch deformieren. Immerhin kann man z. B. bei ölsaurem Ammoniak noch einigermaßen erkennen, daß für den ersten Ring *d* etwa 80 beträgt. Bei Cholesterylbenzoat mag *d* für den ersten Ring etwa 100 sein. Nach dem Erstarren wurde gefunden: I 42, II 64, III 82. Bei Cholesterylacetat war ein Ring nicht mehr deutlich zu erkennen. Nach dem Erstarren war I ca. 140. Gleiches gilt für Cholesterylpropionat. Nach dem Erstarren wurde gefunden für die labile Modifikation: I 116, für die stabile I 58, II 80.

Sehr schön treten aber im fließend kristallinischen Zustand die durch die Drehung der Polarisationsebene bedingten Farben auf. Am besten eignen sich für solche Beobachtungen Mischungen aus Cholesterylpropionat mit -acetat, -benzoat und -oleat, welche so hergestellt werden können, daß sie bei gewöhnlicher Temperatur fließend kristallinisch bleiben. Bei der gewöhnlich benutzten 55 fachen Vergrößerung war dann das Gesichtsfeld von allen Farben des Spektrums erfüllt, beginnend mit dunklem Violett in der Nähe des schwarzen Zentrums und allmählich durch blau, grün, gelb, orange übergehend in rot am Rande des Gesichtsfeldes. Beim Drehen am Polarisator oder Analysator ändern sich natürlich die Farben, ebenso auch bei Änderung der Temperatur.

In manchen Fällen kann man, wenn eine deutliche Ringbildung nicht zustande kommt, dieselbe verbessern durch Hin-

und Herschieben der Linse auf dem Objektträger, da dann durch Homöotropie[1]) sich von selbst die Struktur mehr oder minder einheitlich gestaltet. Beispielsweise ließ sich so bei Cholesteryloleat erkennen, daß I ca. 80 beträgt. Besonders auffällig zeigt sich diese Wirkung bei flüssigen Kristallen, z. B. Azoxyphenetol. Hat man ein solches Präparat durch Schmelzen des *reinen* Stoffs auf dem Objektträger und nochmaliges Erwärmen nach dem Erstarren hergestellt, so ist der Anblick zwischen gekreuzten Nicols der in Fig. 95 a. a. O.[2]) angedeutete. Verschiebt man die Linse oder den Objektträger z. B. durch einen kurzen raschen Ruck am drehbaren Objekttisch, so tritt die in Fig. 96 (bez. 2) dargestellte Verschiebung der an der oberen und unteren Fläche haftenden Felder ein, die beim Zurückdrehen wieder verschwindet. Preßt man aber Linse und Objektträger bei der Verschiebung mit den Fingern gegeneinander, so werden in das Muster gewissermaßen Streifen eingerissen, die schwarz erscheinen, wenn die Verschiebung parallel einer Nicoldiagonale erfolgte. Setzt man das Hin- und Herschieben der Linse so lange fort, bis das ganze Gesichtsfeld schwarz geworden, also die ganze Felderteilung zerstört und die Doppelbrechung anscheinend verschwunden ist, so ist die Struktur der an den Glasflächen haftenden Schichten und damit auch die der ganzen Flüssigkeit eine einheitliche geworden. Man braucht nun nur um 45° zu drehen, um in prachtvollster Weise das Ringsystem aufleuchten zu sehen, in einer Vollkommenheit, wie es ohne diese Wirkung der Homöotropie (namentlich auch bei festen Kristallen, der Verwerfungen wegen) nie zu erhalten ist.

Die Verwerfungen sind übrigens ein deutlicher Beweis dafür, daß bei flüssigen Kristallen mit parallelen Molekülen, d. h. solchen, welche beiderseits am Glas anhaften und in ihrer Struktur die früher vorhandenen festen Kristalle, aus welchen sie entstanden sind, nachahmen, ganz ebenso wie feste Kristalle in verschiedener Richtung verschiedene Doppelbrechung zeigen, ja es wäre möglich sie in Zahlen zu bestimmen.

---

1) Vgl. O. Lehmann, Flüssige Kristalle, p. 35, § 4.

2) O. Lehmann, Flüssige Kristalle, p. 58 oder Wied. Ann. **41.** p. 529. 1890. Fig. 1.

Gleiches gilt auch für die fließenden Kristalle von *Paraazoxybenzoesäureäthylester*. Hier wurde gefunden:

Fließende Kristalle:	I 27,	II 37,	III 49,	IV 60		
Feste „	I 64,	II 88,	III 108,	IV 124,	V 136,	VI 140.

Betrachtet man den oben berechneten Wert der Konstante 242 als richtig, so ergibt sich aus den Werten für den ersten Ring die Doppelbrechung der fließenden Kristalle = 0,33, die der festen = 0,058, d. h. *die Doppelbrechung der fließend kristallinischen Modifikation ist bedeutend größer* als die *der festen*, nämlich 5,7 mal so groß.

Bei *Paraazoxyphenetol* wurde gefunden

für die flüssigen Kristalle:	I 26,	II 37,	III 47,	IV 54,	V 60
„ „ festen „	I 21,	II 30,	III 37.		

Hiernach beträgt die Doppelbrechung der flüssigen Kristalle wie bei den vorigen 0,33, die der festen 0,55, d. h. das Verhältnis ist das umgekehrte, die festen Kristalle haben 1,67 mal stärkere Doppelbrechung als die flüssigen. Das Ergebnis steht in guter Übereinstimmung zu meiner früheren direkten Bestimmung der Doppelbrechung durch Suspension in gleich stark brechenden Flüssigkeiten. Ich hatte gefunden[1])

für die flüssigen Kristalle:	$n_1 = 1{,}8$,	$n_2 = 1{,}5$,	$n_1 - n_2 = 0{,}3$
„ „ festen „	$n_1 = 1{,}9$,	$n_2 = 1{,}5$,	$n_1 - n_2 = 0{,}4$,

somit wäre die Doppelbrechung der festen Kristalle 1,33 mal so groß als die der flüssigen. Unter Anwendung von *rotem* Licht, d. h. bei Einschaltung einer intensiv gelblich eosinroten Gelatinefolie über den Polarisator fand sich

für die flüssigen Kristalle:	I 33,	II 44,	III 49,	IV 57,	V 63
„ „ festen „	I 20,	II 30,	III 40,	IV 50,	

also ungefähr dasselbe Verhältnis.

Bei *Paraazoxyanisol* wurde gefunden

für die flüssigen Kristalle:	I 27,	II 37,	III 46
„ „ festen „	I 21,		

also fast genau dasselbe wie für Azoxyphenetol.

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 2. p. 661. 1900.

Azoxyanisol-phenetol ergab

für die flüssigen Kristalle:	I 25,	II 35,	III 48,	IV 51,	V 54,
	VI 61,	VII 66,	VIII 70		
„ „ festen „	I 22,	II 34,			

also ebenfalls ziemlich dasselbe wie die vorigen.

Durch diese einfachen sehr leicht zu wiederholenden, auch zur Projektion für größere Zuhörerzahl geeigneten, im übrigen infolge der Farbenpracht auch sehr anregenden Versuche dürften wohl die immer noch zutage tretenden Zweifel über die Doppelbrechung der flüssigen Kristalle endgültig zurückgewiesen sein.[1]) Reflexion oder Totalreflexion an unsichtbaren feinen suspendierten *Tröpfchen* oder Doppelbrechung durch *Spannungen* in der umgebenden Flüssigkeit in der Nähe der Oberfläche solcher Tröpfchen, wie Tammann annimmt, können die beschriebenen Erscheinungen unmöglich erklären, noch weniger die in der folgenden Notiz beschriebene Drehung der Polarisationsebene und den Dichroismus bei flüssigen Kristallen.

Karlsruhe, den 3. Oktober 1905.

---

1) Die zur Untersuchung erforderlichen Präparate sind zu beziehen von der chemischen Fabrik E. Merck in Darmstadt. Geeignete Mikroskope nebst den sonstigen nötigen Utensilien, Linsen etc. liefert die Firma Voigt & Hochgesang (R. Brünnée), Göttingen, untere Maschstraße 26. Neuerdings ist auch die optische Werkstätte C. Zeiss in Jena auf meine Veranlassung mit der Ausbildung eines möglichst vollkommenen Apparates zur Beobachtung flüssiger Kristalle beschäftigt, welcher gestattet, *während* der subjektiven Beobachtung *Serien—Momentan*—Photographien herzustellen. Beide Firmen, ferner auch Dr. Steeg & Dr. Reuter in Homburg v. d. H. beabsichtigen auch gebrauchsfertige Präparate zu liefern. Diapositive und gemalte Projektionsbilder sind zu haben bei J. Schober (Obrist), Hoflichtdruckanstalt, Karlsruhe, Belforterstr. 10. Beispiele solcher Bilder findet man in Meyers Konversationslexikon 6. Aufl. 1905, Bd. 11. p. 708, Tafel „flüssige Kristalle“.

(Eingegangen 4. Oktober 1905.)

---

8. *Drehung der Polarisationsebene und der Absorptionsrichtung bei flüssigen Kristallen;* *von O. Lehmann.*

Die in der vorigen Mitteilung beschriebenen Farbenringe, welche zur Bestimmung der Doppelbrechung dienen können, treten in normaler Weise in flüssigen Kristallen nur dann auf, wenn die Struktur einheitlich ist, sei es, daß sich die flüssigen Kristalle aus reinen am Glas haftenden festen Kristallen gebildet haben und infolgedessen ihre Struktur nachahmen[1]) oder indem sie durch Deformation infolge der Homöotropie[2]) in Massen von annähernd einheitlicher Struktur verwandelt wurden. Hindert man dies durch Zusatz einer sehr geringen Menge eines Lösungsmittels z. B. Xylol, Öl oder Kolophonium, welches das Anhaften am Glas unmöglich macht (indem es das Glas benetzt, während sich die flüssig-kristallinische Masse durch ihre Oberflächenspannung in Tropfen zusammenzuziehen sucht), so bilden sich zwar auch Farbenringe, indes andere als im vorigen Falle; auch wird im allgemeinen die flüssig-kristallinische Masse aus dem Zentrum des Gesichtsfeldes ganz verdrängt, eben weil die benetzende Lösung in den engen Kapillarraum hineingezogen, die nicht benetzende flüssig-kristallinische Masse dagegen durch die Kapillardepression herausgestoßen wird. Schon in geringer Entfernung vom Zentrum verschwinden die Farbenringe ganz, dagegen sieht man nun in regelmäßiger Folge helle und dunkle Ringe abwechseln, deren Auftreten durch die Drehung der Polarisationsebene bedingt ist. Diese Drehung entspricht vollkommen derjenigen, welche man bei den Glimmerwendeltreppen von Reusch[3]) beobachtet.[4]) Da die Dicke der flüssig-kristallinischen Schicht vom Zentrum gegen den Rand des Gesichtsfeldes hin anwächst, so ändert sich auch der Betrag der Drehung der Polarisationsebene

---

1) Vgl. O. Lehmann, Flüssige Kristalle p. 51, § 13; p. 58, § 3 und p. 168—170.

2) l. c. p. 35, § 4 und p. 58, Absatz 2 von unten.

3) F. E. Reusch, Pogg. Ann. 138. p. 628. 1869.

4) Vgl. E. Mallard, Traité de crist. 2. p. 262, 305. 1884.

stetig mit dem Radius und demgemäß werden alle diejenigen ringförmigen Zonen dunkel erscheinen, in welchen die Drehung in den Kreuzen und Büscheln der Kristalltropfen oder Aggregate von solchen derart ist, daß die Schwingungsebene des Lichtes mit der des Polarisators übereinstimmt, das Licht somit von dem gekreuzten Analysator ausgelöscht wird, d. h. die Kreuze und Büschel intensiv schwarz auf hellem Grunde hervortreten. In den zwischenliegenden Zonen ist dies nicht der Fall, die Kreuze und Büschel sind wenig oder gar nicht sichtbar, und um sie hervortreten zu lassen, ist es nötig, Polarisator oder Analysator zu drehen. Dann aber werden sie natürlich in den erst betrachteten Zonen unsichtbar, d. h. beim Drehen eines der beiden Nicols erweitern oder verengen sich die Ringe. Bei allen drei zuletzt genannten Substanzen (Azoxyphenetol, Azoxyanisol und Azoxyphenetol-anisol) tritt *Erweiterung* der Ringe ein beim Drehen des Polarisators *im Sinne des Uhrzeigers*, Verengung im entgegengesetzten Falle. In diesem scheinen sie nacheinander im Zentrum zu verschwinden.

Der Durchmesser der Ringe ergab sich (wie oben in Teilen des Okularmikrometers, 1 Teil = 0,0236 mm) bei 55facher Vergrößerung bei *Paraazoxyphenetol* zu:

I 48, II 60, III 78, IV 86, V 95, VI 109, VII 118, VIII 126, IX 132, X 139, XI 148, XII 151, XIII 156.

Bei Paraazoxyanisol wurde gefunden:

I 55, II 70.

Bei Paraazoxyanisol-phenetol:

I 42, II 60, III 80, IV 90, V 104, VI 118.

Die Unterschiede der drei Stoffe sind also auch in dieser Hinsicht geringfügig. Gleiches gilt für Mischungen derselben.

An anderer Stelle[1]) habe ich darauf hingewiesen, daß man die schönsten Polarisationserscheinungen erhält bei Mischungen von p-Azoxyanisol und p-Azoxyphenetol in solchem Verhältnis, daß die dunklen Kreuze und Büschel *völlig schwarze* Farbe annehmen, d. h. bei welchem keine Drehung der Polarisationsebene auftritt. Dies ist also nicht etwa in dem Sinne zu verstehen, daß die Drehung der einen Substanz die der anderen

1) O. Lehmann, Meyers Konversationslexikon 6. Aufl. 11. 708, 1905.

aufhebt, was nicht möglich wäre, da beide im gleichen Sinne drehen, sondern so, daß das Präparat bei derjenigen Dicke, bei der die intensiven Farben erster Ordnung auftreten, die Polarisationsebene gerade um 180° drehen muß. Da der Durchmesser des ersten schwarzen Ringes bei Azoxyphenetol nur wenig von dem des ersten farbigen abweicht, läßt sich das Zusammenfallen beider, also die Herstellung prachtvoller Demonstrationspräparate, welche neben gesättigten Interferenzfarben intensiv schwarze Kreuze und Büschel aufweisen, erzielen durch passende Beimischungen, welche die molekularen Richtkräfte und damit die Doppelbrechung etwas schwächen. Anscheinend ist hierzu bereits eine Beimischung von Azoxyanisol ausreichend, obschon dessen Doppelbrechung nur unerheblich von der des Azoxyphenetols abweicht. Ein anderes Mittel bieten isotrope Beimischungen.[1])

Daß die Drehung der Polarisationsebene auf Verdrehung der Molekularstruktur beruht, läßt sich deutlich erkennen durch nähere Untersuchung des Dichroismus. In der Nähe des Zentrums erscheinen die weißen und gelben Felder in ganz derselben Gestalt und Anordnung, mag man Polarisator oder Analysator benutzen, falls nur die Hauptschnitte in beiden Fällen gleiche Lage haben. Je weiter indes die betrachteten Stellen vom Zentrum abliegen, um so deutlicher tritt ein Unterschied hervor zwischen Benutzung des Polarisators und des Analysators und schließlich zeigt sich gar keine Ähnlichkeit mehr zwischen dem Bilde, welches man erblickt, wenn man den Nicol vor dem Präparat, und dem, wenn man ihn dahinter anbringt. Diese Verhältnisse entsprechen ganz denjenigen, welche ich früher bei fließenden Kristallen von Paraazoxybenzoesäureäthylester beobachtet habe an solchen Stellen, wo nachweislich infolge von Zwillingsbildung die innere Struktur und damit die Richtung der stärksten Absorption verdreht ist.[2]) Natürlich wächst auch diese Drehung mit der Dicke des Präparates.

Karlsruhe, 3. Oktober 1905.

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 8. p. 908. 1902.
2) O. Lehmann, Flüssige Kristalle p. 39. Figg. 44—51.

(Eingegangen 4. Oktober 1905.)

9. *Über den Einfluß der Belichtung auf die thermoelektrische Kraft des Selens; von Franz Weidert.*

(Auszug aus der Inaugural-Dissertation.)[1]

I. Einleitung.

Bezüglich ihres elektrischen Verhaltens nehmen einige Modifikationen des Selens eine ganz eigenartige Stellung ein; nicht nur wird ihre Leitfähigkeit schon durch schwache Beleuchtung außerordentlich gesteigert, sondern sie besitzen auch von allen untersuchten Substanzen die größte thermoelektrische Kraft. — Zur Unterscheidung der hier hauptsächlich in Betracht kommenden Modifikationen, ist im folgenden von der von Siemens[2]) eingeführten Bezeichnungsweise Gebrauch gemacht. Siemens unterscheidet je nach der Herstellung folgende drei die Elektrizität leitende Modifikationen:

Modifikation I. Kristallinisches Selen, durch Erhitzen des *amorphen* Selens auf 100°.

Modifikation II. Grobkörniges Selen, durch zehnstündiges Erhitzen des *amorphen* auf 200°.

Modifikation III. Durch 24stündiges Erhitzen des *geschmolzenen* Selens auf 200—210°.

Eine *genaue* Klassifizierung der leitenden Selenmodifikationen (deren es offenbar mehr als die drei genannten gibt) ist bisher noch nicht möglich gewesen, da die geringsten Verschiedenheiten bei der Herstellung die Eigenschaften außerordentlich stark verändern, und gerade die lichtempfindlichen offenbar die wenigst stabilen sind, so daß man es stets mit Mischungen der einzelnen zu tun hat.

Schon längst vor Entdeckung der Lichtempfindlichkeit des Selens hatte A. Matthiessen[3]) gelegentlich seiner aus-

1) F. Weidert, Inaugural-Dissertation, Rostock 1905.

2) W. Siemens, Pogg. Ann. **156.** p. 334. 1875 und **159.** p. 117. 1876.

3) A. Matthiessen, Pogg. Ann. **103.** p. 412. 1858.

führlichen und in vieler Hinsicht auch fundamentalen Untersuchungen über die elektromotorischen Kräfte der reinen Metalle, auch die des Selens bestimmt und den anderen Substanzen gegenüber ungewöhnlich hohen Wert von 805 Mikrovolt (Blei gleich Null gesetzt und aus der Originaltabelle umgerechnet) pro Grad Celsius bei 20° mittlerer Temperatur gefunden, so daß also Selen ans *äußerste* Ende der thermoelektrischen Spannungsreihe zu stehen kommt. Während indessen die für Metalle ausgeführten Messungen mit Recht auch heute noch als sehr zuverlässige gelten können, darf man dem Werte für Selen keine große Bedeutung beilegen, da einerseits für die Messung der thermoelektrischen Kraft des Selens die Versuchsanordnung keine ganz einwandfreie war und andererseits die Modifikation des benutzten Selens nicht genügend bekannt ist. Matthiessen schreibt darüber nur, das Selen stammte aus der Sammlung des Heidelberger chemischen Instituts, und an einer anderen Stelle ist es „körniges“ Selen genannt, aber ohne Angabe der Art der Überführung in diesen Zustand.

Righi[1]) versuchte deshalb im Anschluß an eine größere Arbeit über die elektromotorische Kraft von Ketten, bei denen Selen die Stelle eines Elektrolyten vertritt, auch die thermoelektrische Kraft des Selens genauer zu bestimmen, indem er das Selen in Form doppelt gebogener Stäbchen anwandte, an deren Enden Bleidrähte befestigt waren, so daß man die Kontaktstellen in Bäder von bekannter Temperatur bringen konnte. Die Überführung des Selens in die leitende Modifikation geschah bei 120° C. Righi fand nun für zwei Stäbe, bei denen das Blei gut mit dem Selen verschmolzen war, die Werte 506 und 612 Mikrovolt pro Grad Celsius, für einen dritten dagegen, bei dem das Blei nur um das Stäbchen herumgeschlungen war, 887 Mikrovolt. Weitere Untersuchungen liegen meines Wissens in der Literatur über diesen Gegenstand nicht vor.

Da also das Selen eine so außerordentlich hohe thermoelektrische Kraft besitzt, und andererseits die starke Abnahme

1) A. Righi, Sulla forza elektromotrice del Selenio. Padova 1888 Tip. del Seminario; Beibl. **12**. p. 683. 1888; Naturwissenschaftl. Rundschau **4**. p. 236.

des elektrischen Widerstandes bei Bestrahlung auf eine bedeutende molekulare Umlagerung schließen läßt, so daß man annehmen darf, bei Bestrahlung müssen sich auch andere physikalische Konstanten, als Leitfähigkeit allein, mehr oder weniger ändern, habe ich auf Veranlassung von Herrn Prof. Dr. L. Grunmach versucht, ob sich nicht auch eine *Änderung der thermoelektrischen Kraft bei Belichtung* nachweisen ließe.

Dabei waren hauptsächlich folgende Gesichtspunkte für die Ausführung maßgebend:

Da das Licht die charakteristischen Veränderungen in der Hauptsache nur an der Oberfläche des Selens hervorruft, mußte das Selen, ähnlich wie bei den bekannten Selenzellen, in dünnen, auf eine isolierende Unterlage ausgebreiteten Schichten untersucht werden. Jedoch lassen sich hier die die Elektroden bildenden Drähte nicht wie dort in dichten mehrfachen Windungen spiralig nebeneinander anordnen, sondern nach Art der Thermoelemente darf nur *ein* Ableitungsdraht an jedem Ende in möglichst großem Abstand von dem anderen angebracht werden. Aus diesem Grunde einerseits und andererseits wegen der geringen Leitfähigkeit des Selens nehmen diese Thermoelemente einen enormen Widerstand an, der sich außerdem durch Bestrahlung ändert. Es konnte also die sonst zur Bestimmung der kleinen thermoelektrischen Kräfte gebräuchliche Messungsmethode mit Hilfe des Galvanometers hier nicht zur Anwendung kommen, sondern es mußte eine elektrometrische Methode gewählt werden.

II. Form und Art der Herstellung der Selenthermoelemente.

1. *Die benutzten Selensorten.* Zuerst wurde das *gewöhnliche käufliche* Selen des Handels (in schrotförmigen Kügelchen von Kahlbaum) versucht. Die großen Verunreinigungen jedoch, die diese Sorte enthält, machen es zur Herstellung von lichtempfindlichen Selenzellen vollkommen unbrauchbar. Es kamen deshalb ausschließlich folgende zwei Sorten zur Verwendung:

1) *Stangenselen,* bezogen durch die Firma Clausen & v. Bronck, Berlin.

2) *Kristallisiertes Selen* von Merck, als chemisch rein bezogen.

Nach Angabe der meisten Autoren ist dieses das reinste

der von den verschiedenen Fabriken als chemisch rein gelieferten Seelensorten.

2. *Die Träger der Selenschichten.*[1]) Ein Haupterfordernis neben gutem Benetzen der Unterlage war ein tadelloses Isolationsvermögen derselben, da bei dem hohen Widerstand der Präparate von 50—150 Millionen Ohm der geringste Isolationsfehler schon den größten Teil des nutzbaren Stromes aufgezehrt hätte. Es wurden deshalb hierfür verschiedene Materialien versucht: Glimmer, Glas, Ton, Schiefer, Porzellan.

Auf *Glimmer* haften die Schichten, schon wegen der Biegsamkeit desselben, zu schlecht (auch auf mattiertem). Auch ist die Gesamtdicke solcher Präparate viel zu gering, um ein gleichmäßiges Temperaturgefälle von einem Ende zum anderen zu gewährleisten.

Glas hat den großen Vorzug einer absolut planen Oberfläche, aber auch hier benetzt das geschmolzene Selen selbst mattiertes Glas freiwillig viel zu wenig.

Weit besser haftet das Selen auf *Schiefer*, der auch in der Praxis vielfach zur Herstellung der Selenzellen benutzt wird, und vor allem auf *Ton*. Während aber die Isolationsfähigkeit dieser Materialien für gewöhnliche Selenzellen ganz gut ausreichen würde, ist sie leider für den vorliegenden Zweck viel zu gering, denn die Messung des spezifischen Widerstandes ergab für gewöhnlichen Ton der Berliner Königl. Porzellanmanufaktur $\sigma = 2$ und $9 . 10^8$ Ohmzentimeter.

Für Ton Nr. 0,1466 der Berliner Königl. Porzellanmanufaktur $\sigma = 22$ und $34 . 10^8$ Ohmzentimeter.

Für guten Schiefer ohne Kupferadern, wie er für elektrotechnische Zwecke Anwendung findet, $\sigma = 16 . 10^8$ Ohmzentimeter.

Es wurde deshalb schließlich *Biskuitporzellan* der Berliner Königl. Porzellanmanufaktur gewählt, das einen spezifischen Widerstand von $\sigma = 15000 . 10^8$ Ohmzentimeter ergab.

Da aber auch hier das geschmolzene Selen die unpräparierte matte Oberfläche nur *bisweilen* gut benetzte, wurde die Oberfläche der Porzellanplatten noch im Sandstrahlgebläse aufgerauht. Es kamen zwei verschieden starke Mattierungen zur

1) Ausführlicher in der Inaugural-Dissertation p. 9.

Anwendung: eine grobe und eine sehr feinkörnige, wie sie zur Herstellung von Mattglas benutzt werden. Auf den stark aufgerauhten Platten floß das geschmolzene Selen sehr gut (wenn auch nicht so, wie auf Ton), auf den ganz fein mattierten haftete es gewöhnlich erst nach längerem Hin- und Herstreichen. Eine zwischen diese beiden Mattierungen liegende wäre wahrscheinlich die vorteilhafteste gewesen, war aber leider nicht erhältlich.

3. *Herstellung und Montierung der Selen-Thermoelemente.* Die zu den definitiven Messungen benutzten Präparate wurden schließlich folgendermaßen hergestellt:

Platten aus Biskuitporzellan der Berliner Königl. Porzellanmanufaktur von 75 mm Länge, 25 mm Breite und 2,5 mm Dicke wurden auf einer Seite im Sandstrahlgebläse aufgerauht, im Wasser durch Abbürsten sorgfältig gereinigt, und frei an der Luft trocknen lassen. Unmittelbar vor dem Aufstreichen des Selens wurde jede einzelne Platte in der Flamme des Bunsenbrenners nochmals ausgeglüht. Damit die Selenschicht nicht etwa in geschmolzenem Zustand Metallspuren in Form von Seleniden von den Elektroden her aufnehmen könnte, wurden diese immer erst nachträglich angebracht. Die ausgeglühte Porzellanplatte wurde zunächst auf einer ca. 5 mm dicken Messingplatte über einer kleinen Bunsenflamme erhitzt, eine gewisse Menge Selen aufgebracht und dieses mit einem Glasstab zu einer gleichmäßigen Schicht ausgestrichen bis auf eine Entfernung von ca. 6—7 mm von den Schmalseiten der Platte. Die Temperatur wurde dabei so hoch gewählt, daß ein starkes Verdampfen des Selens eintrat. Dann wurde die Flamme gelöscht, und das Ganze *langsam und ruhig erkalten lassen.*[1])

Ein ständiges Hin- und Herstreichen bis kurz vor das Erstarren der Schicht, um bei schlecht sich benetzenden Platten

1) An dieser Stelle sei eine Erscheinung mitgeteilt, die besonders deutlich bei zwischen Glas eingeschlossenen sehr dünnen Selenschichten zu beobachten war. Während nämlich bekanntlich das amorphe Selen in kaltem Zustand in dünnen Schichten glasklar rubinrot durchscheint, ist es in heißem bez. in geschmolzenem Zustand vollkommen schwarz. Erst beim Abkühlen nimmt es wieder allmählich die rubinrote Färbung an. Ob diese Erscheinung auch schon von anderer Seite beobachtet wurde, konnte ich aus der Literatur nicht ersehen.

das Zusammenlaufen zu verhindern, ist unzulässig, da sich dann schon während des Erkaltens eine kristallinische blaugraue Modifikation bildet, die sogenannte „*harte*".[1])

Um eine exakte Messung der Temperaturdifferenz der Kontaktstellen zu ermöglichen (siehe später), wurden die Ableitungselektroden folgendermaßen hergestellt: An Platindrähte von 0,05 mm Durchmesser wurden in ihrer Mitte 0,05 mm dicke Konstantandrähte (Widerstandsdraht Iª Iª von Fleitmann, Witte & Co. in Schwerte) gelötet und zwar vermittelst reinen Zinns, da dessen Schmelzpunkt (230°) über dem des Selens (217°) liegt. Dann wurden die an den Enden mit kleinen Gewichten beschwerten Platindrähte in einem Abstand von ca. 8 mm von den Enden der mit Selen bestrichenen

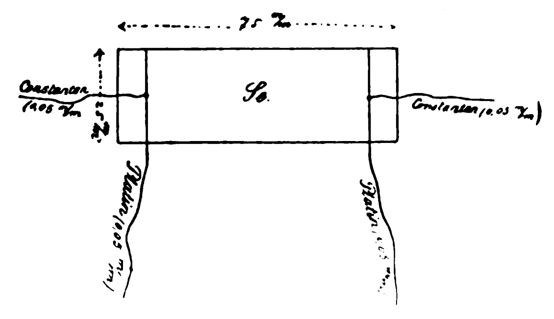


Fig. 1.

Porzellanplatte über dieselbe gehängt, und zwar so, daß die angelöteten Konstantandrähte in die Mittellinie der Platte zu stehen kamen und schließlich mit Hilfe eines heißen Glasstäbchens durch geschmolzenes Selen mit der ausgebreiteten Selenschicht verbunden, so daß die dünnen Platindrähte ganz in Selen eingebettet waren. Zuletzt wurde dann noch das eine Ende der Platindrähte dicht an der Platte abgeschnitten, so daß die fertigen Selenthermoelemente die in Fig. 1 dargestellte Form annehmen.

Man hat also so ein Platin–Selen–Platin-Thermoelement, an dessen Berührungsstellen Platin–Selen sich allemal noch Konstantan–Platin-Thermoelemente zur Temperaturmessung befinden.

1) Vergl. z. B. E. Ruhmer, Physikal. Zeitschr. 3. p. 528—532. 1902.

4. *Das Sensibilisieren der Selenschichten.* Die ersten, zwischen Glas eingeschlossenen Selenschichten wurden im Paraffinbad sensibilisiert. Bei den offenen Schichten war diese sehr sichere Methode leider nicht mehr anwendbar, und es mußte das Erhitzen im Luftbade vorgenommen werden. Hierzu diente ein Trockenkasten aus vernietetem Eisenblech. Wände, Tür und Decke waren doppelt, so daß die heißen Flammengase den zu heizenden Innenraum *allseitig* umspülten. Die Dimensionen des Innenraumes betrugen 17 cm Breite, 17 cm Tiefe, 24 cm Höhe. In einer Entfernung von 14 cm über dem inneren Boden befand sich ein Drahtnetz mit einer Kupferplatte von 10 cm Breite, 11 cm Länge und 0,5 cm Dicke, auf die die zu sensibilisierenden Präparate gelegt wurden. Um möglichst genau die Temperatur dieser Platte bestimmen zu können, war an der einen Schmalseite ein würfelförmiger Kupferklotz angebracht, in dessen Bohrung das Quecksilbergefäß eines von oben in das Innere des Kastens ragenden Thermometers steckte. Zur sicheren Konstanthaltung der Temperatur war durch ein zweites Loch in der Decke des Kastens ein Thermoregulator nach Reichert in das Innere eingeführt. Auf diese Art war neben großer Konstanz gewährleistet, daß die Präparate *möglichst rasch* die verlangte Temperatur annahmen und auf ihrer ganzen Fläche gleich hoch erhitzt wurden, was bei Kasten mit einfacher Wand und von kleineren Dimensionen trotz starker Asbestbekleidung nicht zu erreichen war.

Nachdem die Temperatur im Innern konstant geworden war, wurden die zu sensibilisierenden, wie oben beschrieben, mit Drähten versehenen Präparate rasch auf die Kupferplatte gelegt, eine bestimmte Zeit erhitzt und meist dann ganz langsam ($^1/_2$—2 Stunden) im Kasten abkühlen lassen, da ein langsames Abkühlen von den meisten Autoren[1]) zur Erreichung möglichst großer Empfindlichkeit als vorteilhaft empfohlen wird. Dagegen ist es nicht nötig, die Präparate nach Siemens' Vorschrift 10 Stunden lang zu erhitzen, sondern es genügen im allgemeinen $^1/_2$—2 Stunden, wie auch fast stets in der Literatur angegeben wird. Im allgemeinen wurde denn auch

1) Vgl. z. B. W. v. Uljanin, Wied. Ann. **34.** p. 241. 1888. — S. Kalischer, Wied. Ann. **31.** p. 101. 1887.

dieses Vorgehen gewählt, abgesehen von den paar Präparaten, wo absichtlich Modifikation I hergestellt werden sollte. Die folgende Tabelle enthält eine Übersicht über die zu den *definitiven* Messungen benutzten und im folgenden vorkommenden Präparate.

Nummer des Thermoelementes	Entfernung der Pt-Elektroden in mm	Selen von der Firma	Gewicht des pro qcm aufgestrichenen Selens in mg	Dicke der Selenschicht in mm	Querschnitt der Schicht in qmm	Art der Mattierung der Porzellanplatte	Temperatur bei der Sensibilisierung	Dauer der Erwärmung bei der Sensibilisierung	Bemerkungen
25	57,8	Cl. & v. Br.	14,63	0,0305	0,763	Fein	192°	$1^3/_4$ Std.	
26	58,0	Merck	35,70	0,0744	1,860	Rauh			
27	56,5	„	18,68	0,0389	0,973	„	195	$2^1/_2$ „	*Gleichzeitig* sensibilisiert. Dauer des Erkaltens ca. 3 Std.
28	58,5	„	6,52	0,0136	0,340	Fein			
30	57,0	Cl. & v. Br.	14,06	0,0293	0,732	„	192	$1^1/_2$ „	Dauer des Erkaltens $^1/_2$ St.
34	52,0	Merck	21,24	0,0443	1,107	„	93	5 „	In den *kalten* Kast. eingelegt

Die Bestimmung der in dieser Tabelle angegebenen *mittleren* Schicktdicken erfolgte durch Wägung eines ausgemessenen Stückes der Selenschicht, und unter Zugrundelegung des von Siemens[1]) angegebenen Wertes von 4,796 für das spezifische Gewicht des metallischen Selens.

III. Versuchsanordnung.

1. *Die Beleuchtungsvorrichtung.* Von der für die allerersten Orientierungsversuche gewählten Beleuchtung der Selenschichten durch Tageslicht wurde für die Hauptmessungen wegen der Inkonstanz und zeitweisen geringen Stärke desselben abgesehen. Statt dessen wurde die Beleuchtung durch elektrisches Glühlicht in einem gegen das Tageslicht vollkommen abgeschlossenen Kasten vorgezogen. Die Anordnung und die Dimensionen desselben sind in Fig. 2 dargestellt. Um

1) W. Siemens, Pogg. Ann. **159**. p. 117. 1876.

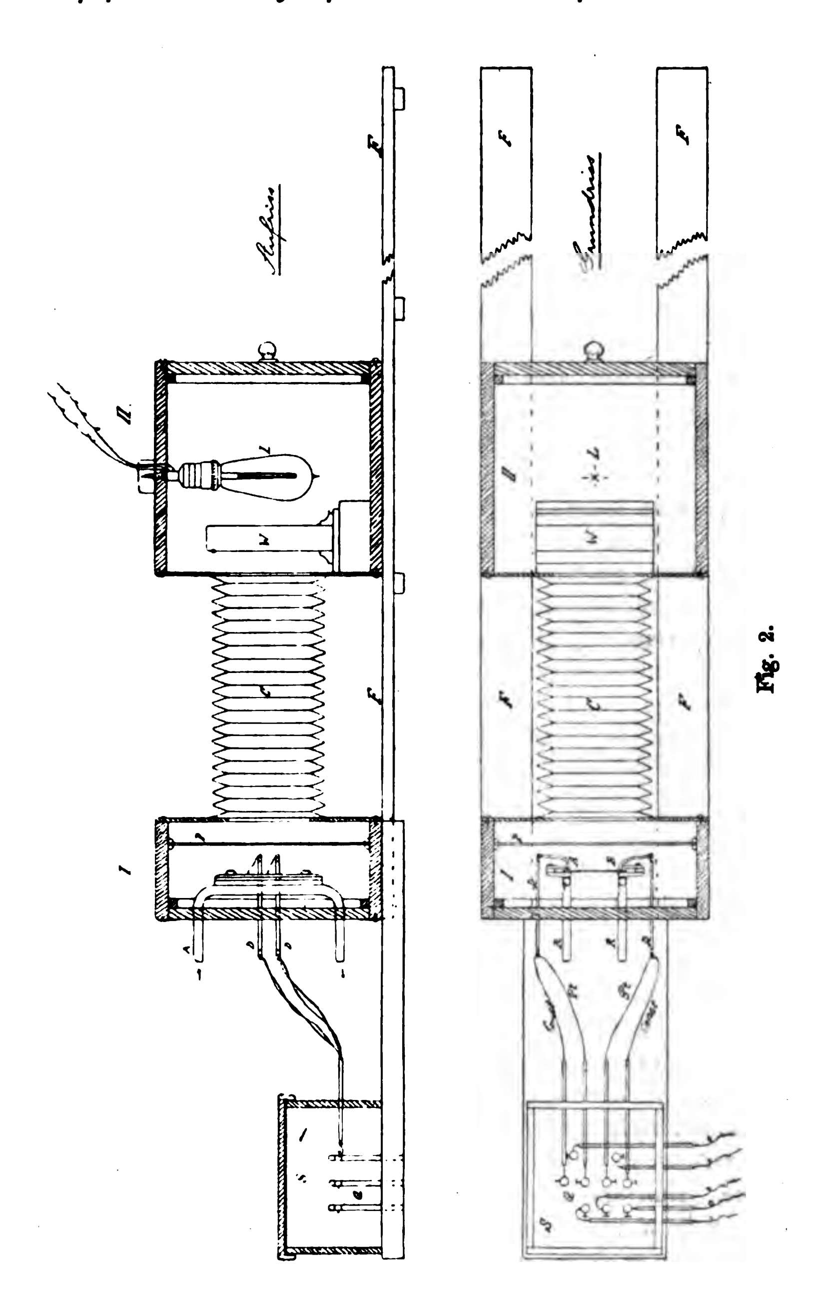


Fig. 2.

die Beleuchtungsstärke in genügend weiten Grenzen leicht variieren zu können, sind Selenzelle und Lichtquelle in zwei getrennten, durch einen langen quadratischen Kamerabalgen *c* verbundenen Kasten untergebracht. An den flacheren, das Selenthermoelement enthaltenden Kasten sind zwei Führungsleisten *F* angeschraubt, auf denen sich der größere Kasten II mit der Lichtquelle leicht hin- und herschieben ließ. Das Innere beider Kasten und des Balgens war zur Vermeidung von Reflexen sorgfältig matt geschwärzt.

Als Lichtquelle diente eine 32kerzige durch Akkumulatoren gespeiste *Auer-Osmiumlampe* für 16 Volt, die mit Hilfe eines eingeschalteten Regulierwiderstandes und eines Präzisionsampèremeters auf konstanter Lichtstärke gehalten werden konnte. Da die Osmiumlampen erst nach etwa 70—80 Brennstunden eine konstante Lichtstärke zu geben pflegen, war die Lampe, ehe sie zu den Versuchen benutzt wurde, in der Fabrik außer ihrer gewöhnlichen Formierungszeit noch 80 Stunden anhaltend bei normaler Spannung gebrannt worden.

Der Osmiumglühlampe wurde trotz ihrer Empfindlichkeit gegen Erschütterungen vor der Kohlenfadenglühlampe der Vorzug gegeben, weil sie ein weißeres Licht liefert als jene und bei gleicher Helligkeit um 56 $^0/_0$ weniger Wärme entwickelt. Außerdem liegen bei den Osmiumlampen die leuchtenden Fäden sehr nahe zusammen (ca. 7 mm), so daß der Fehler, den man dadurch begeht, daß man annimmt, die Fäden lägen in einer Ebene, geringer wird, als bei der Kohlenfadenlampe.

Um die Wärmestrahlung der Lampe zu absorbieren, befand sich vor derselben eine mit destilliertem Wasser gefüllte Küvette *W* aus Spiegelglas. Die Dicke der Wasserschicht betrug 26,6 mm, die der Spiegelgläser zusammen 5,1 mm. Außerdem war der flache Kasten I zur Vermeidung schädlicher Luftströmungen durch eine 2,5 mm dicke Glasplatte *P* abgeschlossen. Schätzt man die Dicke der Glühlampenbirne noch zu 0,3 mm, so befand sich zwischen Selenschicht und Lichtquelle also eine Wasserschicht von 26,6 mm und eine Glasschicht von 7,9 mm Dicke. Nun erscheint aber ein Objekt durch eine Platte von der Dicke d und dem Brechungsexponenten n betrachtet um das Stück $a = d.(n - 1)/n$ näher. Also mußte unter Zugrundelegung obiger Dimensionen von der gemessenen Entfernung

zwischen Lichtquelle und Selen allemal 9,4 mm abgezogen werden, um die optisch wirksame Entfernung zu erhalten.

Da es bei den vorliegenden Untersuchungen weniger auf die Kenntnis der absoluten Flächenhelligkeiten ankam, als vielmehr auf das Verhältnis der Helligkeiten innerhalb einer Versuchsreihe, wurde von einer besonderen Photometrierung der Lampe abgesehen, und den Berechnungen der nominelle Wert von 32 Normalkerzen zugrunde gelegt.

Die größtmögliche Entfernung zwischen der Mittellinie der Lampe und der Selenschicht betrug 1212,5 mm, die in Rechnung zu setzende Entfernung also $1212,5 - 9,4 = 1203,1$ mm. Bei dieser Entfernung der Lampe, die durch Marken auf den Laufschienen genau festgelegt war, empfing also die Selenschicht eine Flächenhelligkeit von $32/1,203^2 = 22,1$ Meterkerzen. Ebenso waren bei den Entfernungen Marken angebracht, wo die Flächenhelligkeit auf der Selenschicht nach obiger Berechnung *genau* das 3-, 5-, 10-, 15- und 20fache betrug, entsprechend Helligkeiten von ca. 66,3, 110,5, 221, 331,5 und 442 Meterkerzen.

2. *Die Erwärmungs- und Kühlvorrichtung.* Um die Kontaktstellen der Selen–Platin-Thermoelemente auf konstanter Temperaturdifferenz erhalten zu können, wurde folgende Einrichtung gewählt, die außerdem in Fig. 3 nochmals in Ansicht dargestellt ist:

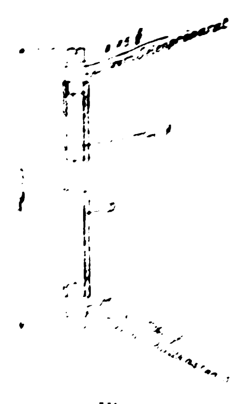


Fig. 3.

In die abnehmbare Rückwand des Kastens I sind zwei doppelt gebogene Messingrohre RR von 9,5 mm innerem Durchmesser eingekittet. Auf die mittleren geraden Teile derselben sind Messingschienen von 5 mm Dicke und 128 mm Breite aufgelötet. Auf diese können dann die Porzellanplatten mit ihren Enden aufgelegt und durch aufschraubbare Messingbacken be-

festigt werden. Die als Unterlage dienenden Messingschienen stehen 58 mm voneinander ab, so daß also die Porzellanplatten auf ihrer unteren Fläche bis auf eine Entfernung von 8,5 mm vom Ende aufliegen. Die oberen aufzuschraubenden Messingbacken, die mehr zur Befestigung, als zur Wärmeübertragung dienen sollen, greifen beiderseits nur 3 mm über die Porzellanplatte über; die Selenschichten, die, wie oben erwähnt, an den schmalen Enden der Platten 6—7 mm breite Streifen unbedeckt ließen, blieben also immer noch ca. 3—4 mm von den Kanten der Messingbacken entfernt. Trotzdem wurden, um mit Sicherheit jeglichen Erdschluß zu vermeiden, beiderseits zwischen Porzellan und Messing noch Glimmerschichten gelegt. Das eine Rohr wurde durch durchströmenden Wasserdampf geheizt, während das andere mit der Wasserleitung in Verbindung stand. Durch Wechsel der zuleitenden Gummischläuche konnte beliebig Seite *A* oder *B* geheizt bez. gekühlt werden.

Um die zu einem Thermoelement gehörigen vier Zuleitungsdrähte isoliert bis zu einer Stelle führen zu können, wo die Berührungspunkte mit den sich anschließenden Kupferleitungen auf ein und derselben Temperatur gehalten werden konnten, sind in die abnehmbare Rückwand, auf der die eben beschriebene Heizvorrichtung sitzt, zu beiden Seiten derselben je zwei Glasröhren *D* von 7 mm äußerem Durchmesser eingekittet. Eine solche Röhre ist in Fig. 4 nochmals in $\frac{1}{2}$ natürlicher Größe dargestellt. An beiden Enden derselben sind kurze Messingzylinder *M M* von den aus der Figur ersichtlichen Dimensionen eingekittet, die durch einen angelöteten Platin- bez. Konstantandraht von 0,2 mm miteinander leitend verbunden sind. Zur leicht lösbaren Befestigung der Drähte der Selenpräparate, bez. zum weiteren Anschluß der Leitungen dienen kleine Schrauben mit Unterlegscheibchen. Wären in den Glasröhren und weiter bis zu dem Schaltkasten *S* (siehe später), in dem sich die Kupferleitungen anschlossen, überall die gleichen Platin- und Konstantandrähte von 0,05 mm Durch-


Fig. 4.

messer verwandt worden, so wäre der Widerstand der zur Temperaturmessung dienenden Platin–Konstantan-Thermoelemente unzulässig hoch geworden. Wenn aber an Stellen verschiedener Temperatur Drähte aus dem gleichen Material, aber von einer anderen Stärke angesetzt wurden, so war sehr darauf zu achten, daß die geringen Verschiedenheiten in der Härte bez. dem Material der Drähte nicht schon ebenfalls störende thermoelektrische Kräfte hervorrufen konnten. Beim Konstantan machte dies weiter keine Schwierigkeiten, da verschiedene Proben von Konstantandraht von 0,2 mm und von 0,05 mm gegen einander absolut keine thermoelektrische Wirkung erkennen ließen. — Anders beim Platin. Hier ergab die Messung für Draht von 0,15 mm gegen solchen von 0,05 mm die hohe elektromotorische Kraft von 8 Mikrovolt pro 1° C. Temperaturdifferenz. Ein anderer Draht von 0,2 mm gab gegen den von 0,05 mm immer noch 4 Mikrovolt pro 1° C. Es lag nun die Vermutung nahe, diese bedeutenden Unterschiede würden durch verschiedene Härte der Drähte bedingt. Indessen änderte sich die thermoelektrische Kraft durch längeres gleichzeitiges Erhitzen der verschieden dicken Drähte im elektrischen Ofen (um keine Flammengase an das Platin gelangen zu lassen) in keiner Weise. Da die thermoelektrische Verschiedenheit der Drähte also offenbar auf ihren verschiedenen Verunreinigungen beruhte, wurden von Heräus in Hanau Platindrähte von 0,2 und 0,05 Durchmesser bezogen, die aus dem gleichen Stück hergestellt und zusammen in gleicher Weise ausgeglüht waren. Diese übten denn auch nicht die geringste thermoelektrische Wirkung aufeinander aus.

Es sei hier noch bemerkt, daß trotzdem alle vier zur Verwendung kommenden Drahtsorten, also Platin von 0,2 und 0,05 mm und Konstantan von 0,2 und 0,05 mm, im elektrischen Ofen gemeinsam $^1/_2$ Stunde auf 350° erhitzt worden waren, damit nicht etwa die dünnen Drähte bei der Sensibilisierung der Selenpräparate beim Erhitzen auf 200° noch nachträglich eine andere Härte annehmen könnten, als die dickeren.

3. *Der Schaltkasten.* Um die Kontaktstellen der Platinbez. Konstantandrähte mit den weiterführenden Kupferleitungen alle auf gleicher Temperatur halten und auch gleichzeitig die verschiedenen Schaltungen zur Spannungs-, Widerstands- und

Temperaturmessung rasch und sicher bewirken zu können, waren die äußeren Schrauben der Glasröhren *D* durch je zwei Platin- bez. Konstantandrähte von 0,2 mm Durchmesser mit den vier mittleren Quecksilbernäpfen *Q* in dem Schaltkasten *S* verbunden. Ebenso waren die nach außen führenden Kupferleitungen an Quecksilbernäpfe angeschlossen.

Die Ausführung dieser Quecksilbernäpfe ist aus Fig. 5 ersichtlich. In das Grundbrett des Schaltkastens, das zwischen den Führungsleisten *F* am Boden des schmalen Kastens I angeschraubt ist, sind Glasröhren *G* von 9 mm äußerem Durchmesser eingekittet; auf diesen sitzen, mit einer Bohrung und Klemmschraube versehen, Messingstücke *E*, und diese erst tragen die eigentlichen Quecksilbernäpfe *H* aus Hartgummi. Der Kontakt des Quecksilbers mit den Messingzylindern *E* erfolgt durch die an die letzteren angedrehte durchgehende Befestigungsschraube. Durch amalgamierte Kupferbügel konnte jede beliebige Verbindung zwischen den einzelnen Leitungsenden hergestellt werden. Die Leitungen selbst waren sämtlich vermittelst dünner Glasröhren durch die Wände des Kastens geführt, der noch zum Schutz gegen Luftströmungen durch einen übergreifenden Deckel vollkommen abgeschlossen war.

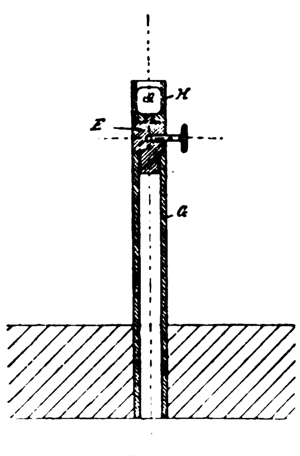


Fig. 5.

Die Konstanz der Temperatur im Innern dieses Kastens *S* wurde mittels eines durch den Deckel eingeführten Thermometers des öfteren kontrolliert. Es zeigte sich dabei, daß die Temperatur entweder ganz konstant blieb, oder daß eine Änderung derselben nur so langsam auftrat, daß zwischen den einzelnen Verbindungsstellen keine Temperaturdifferenzen bestehen konnten.

IV. Schaltungsschema, allgemeine Messungsmethode und Beschreibung der benutzten Instrumente.

Die Wahl des Schaltungsschemas war durch folgende Überlegungen bedingt:

1. Die Messung der thermoelektrischen Kräfte der Selenpräparate mußte aus den schon eingangs erwähnten Gründen elektrometrisch erfolgen, und zwar wurde, da Spannungsmessungen durch direkte Ablesung der Ausschläge wegen etwaiger Änderungen[1]) der Empfindlichkeit der Instrumente während einer Messungsreihe nicht genügend sicher erschienen, der Messung durch Kompensation der Vorzug gegeben, so daß das Elektrometer nur als Nullinstrument zu dienen hatte.

2. Die hohen Widerstände der Selenpräparate konnten nur durch direkte Ausschläge eines Galvanometers von *hoher* Empfindlichkeit, also auch hohem Widerstand gemessen werden. (Durch Strom- und Spannungsmessung.)

3. Die zur Temperaturmessung dienenden Konstantan–Platin-Thermoelemente hatten bei den einzelnen Präparaten je nach der eingespannten Länge der 0,05 mm dicken Platin- bez. Konstantandrähte etwas verschiedenen Widerstand, der aber schon so hoch war, daß diese Unterschiede nicht durch Vorschalten eines großen Widerstandes genügend unschädlich gemacht werden konnten. Es mußten deshalb zur eigentlichen Temperaturbestimmung stets die thermoelektrischen Spannungen der Konstantan–Platin-Thermoelemente gemessen werden, was am bequemsten durch Vergleichung der Ausschläge eines geeichten Galvanometers bei verschiedenen Vorschaltwiderständen geschehen konnte (vgl. später). Hierzu ist aber, im Gegensatz zu dem bei der Widerstandsmessung Gesagten, ein Galvanometer von geringem Widerstand erforderlich.

Es wurde deshalb des benutzte Siemenssche *astatische*

---

[1]) In der Tat zeigte sich später, daß das Elektrometer (nach Dolezalek) bei seiner großen Empfindlichkeit sehr leicht durch äußere elektrische Störungen beeinflußt wurde. Nun war aber in dem Zimmer, in dem die Messungen stattfanden, häufig mit größeren Mengen von Emanium und Radium gearbeitet worden; offenbar hatte dadurch der Raum eine gewisse induzierte Radioaktivität angenommen, denn das Elektrometer konnte mitgeteilte Ladungen nicht lange halten, trotz seiner sorgfältigen Isolation aller Teile durch Bernstein. Es hätte also überhaupt schon deshalb nur bei unbegrenzt zur Verfügung stehenden Strommengen für direkte Ablesungen Verwendung finden können, nicht aber hier, wo infolge des hohen inneren Widerstandes der Selenthermoelemente nur geringe Ströme geliefert werden konnten.

Galvanometer[1]) mit zwei verschiedenen Spulenpaaren versehen: Auf den unteren Glockenmagneten wirkten zwei hintereinander geschaltete Spulen von zusammen 8,2 *Ω* Widerstand, auf den oberen dagegen zwei Spulen von zusammen 6500 *Ω* in Hintereinanderschaltung. Beide Spulenpaare liefen in besondere Klemmen aus und gaben Empfindlichkeiten von $500 . 10^{-10}$ bez. $16 . 10^{-10}$ Amp. pro Millimeter Ausschlag.

Als Elektrometer sollte ursprünglich das Kapillarelektrometer zur Anwendung kommen. Indessen gelang es wohl nach langwierigen Versuchen, die Empfindlichkeit auf ein außerordentlich hohes Maß zu treiben, ohne die präzise Einstellung einzubüßen. Ich habe etwa gegen 20 Kapillarelektrometer von verschiedener Weite und mehreren Formen besonders nach den von Ostwald[2]) angegebenen Methoden zusammengestellt und, wenn ich dieselben für gewöhnliche Messungen anwandte, zum Teil eine größere Empfindlichkeit erhalten, als sie z. B. von Ostwald als unter normalen Verhältnissen erreichbar bezeichnet wird; bei einer Form wurden nämlich schließlich Empfindlichkeiten von 0,00004 Volt pro 1 Proz. des Okularmikrometers erreicht. Ich hoffe hierüber vielleicht gelegentlich an anderer Stelle ausführlicher berichten zu können. Jedoch funktionierten sämtliche Kapillarelektrometer nur so lange sicher, als die Widerstände des Elektrometerkreises nicht mehr als ca. $^1/_2$ Millionen *Ω* betrugen, abgesehen von der langsameren Einstellung bei hohen Widerständen. Bei den enorm hohen Widerständen der Selenpräparate ergaben sich nämlich schon verschiedene Einstellungen je nach der Größe des Widerstandes des Stromkreises, weil das Elektrometer stets selber Sitz einer elektromotorischen Kraft war. Trotz des verschiedenartigsten Vorgehens und peinlicher Sauberkeit ist es nicht gelungen, diese zu beseitigen, indem es offenbar unmöglich ist, die beiden in Betracht kommenden Quecksilberoberflächen auf genau gleicher Beschaffenheit zu erhalten. *Bei Messungen unter normalen Verhältnissen macht sich dies allerdings in keiner Weise störend bemerkbar*, weil hier der

1) Eingehend beschrieben in L. Grunmach, Lehrb. d. magnet. und elektr. Maßeinheiten und Meßmethoden, p. 353—357. 1895.

2) Ostwald-Luther, Physiko-chemische Messungen, II. Aufl. p. 333—342.

Widerstand des Stromkreises im Verhältnis zu dem sehr hohen inneren (scheinbaren) Widerstand des Kapillarelektrometers verschwindend klein ist. Da die Nullage nämlich als die Einstellung des Instrumentes in kurzgeschlossenem Zustand definiert ist, so ändert sich hier, wenn man das Elektrometer jetzt an die zu messende Stromquelle von nicht zu großem Widerstand anlegt (bis zu 1000 Ω und mehr, je nach dem Widerstand des Kapillarelektrometers), der Widerstand des Elektrometerkreises praktisch nicht, sondern nur die elektromotorische Kraft desselben. Hat dagegen die Stromquelle einen *nicht* zu vernachlässigenden Widerstand, so müßte man als Nulllage diejenige Einstellung betrachten, die sich herstellt, wenn man das Instrument durch einen Widerstand gleich dem der Stromquelle schließt. In der Tat ließ sich leicht durch den Versuch beweisen, daß die Kapillarelektrometer infolge ihrer hohen Empfindlichkeit schon verschiedene Nullstellungen ergaben, wenn man sie einmal ganz kurz schloß und dann durch verschiedene sehr hohe Widerstände. Schon beim Schließen durch 500000 Ω zeigten sich deutliche Differenzen gegen vollkommenen Kurzschluß.

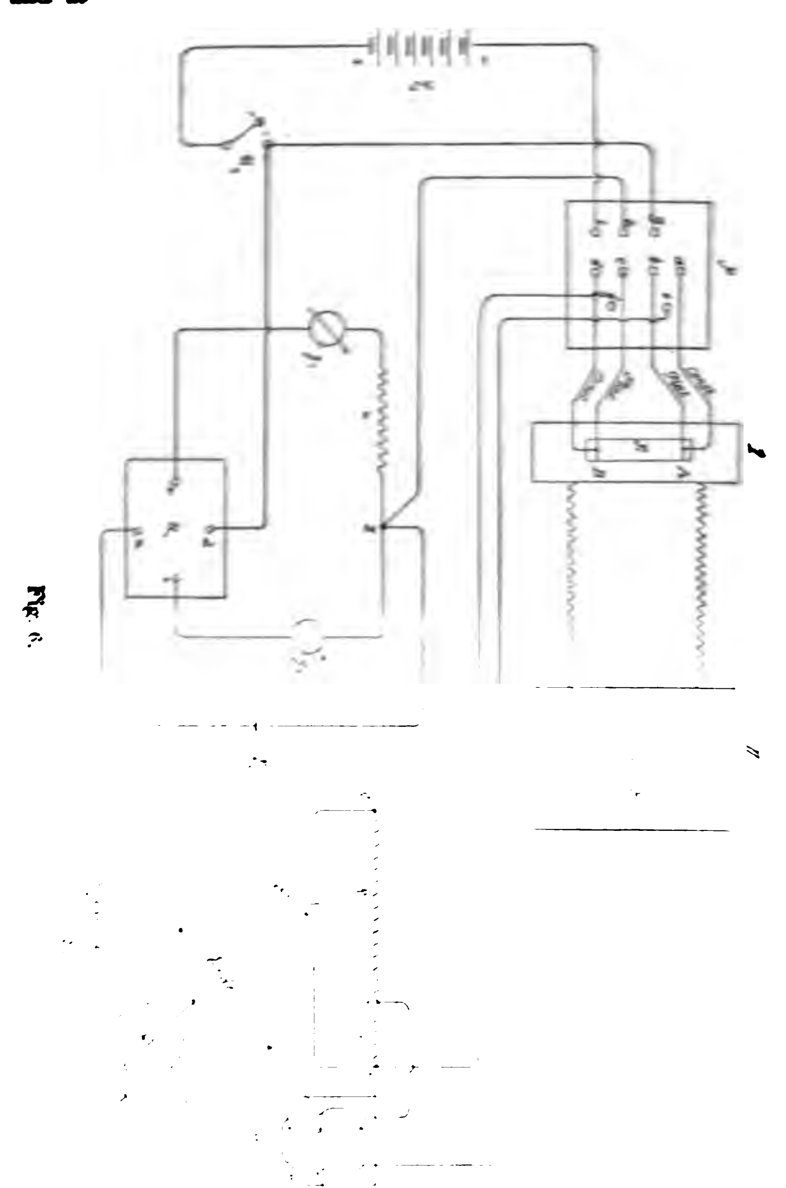
Es mußte deshalb schließlich von der Verwendung der Kapillarelektrometer leider abgesehen werden, und es wurde statt dessen ein Quadrantelektrometer nach Nernst-Dolezalek[1]) benutzt. Durch eine kleine Kohle–Zinkbatterie von 100 Zellen, deren einer Pol zur Erde abgeleitet war, wurde die Nadel auf konstantem Potential erhalten. Ferner war das eine Quadrantenpaar zur Erde abgeleitet, während dem anderen die zu messende Spannung zugeführt wurde. Es ergab sich so eine Empfindlichkeit von 0,00027 Volt pro Millimeter Ausschlag bei 2400 mm Skalenabstand.

Das eigentliche Schaltungsschema ist in Fig. 6 dargestellt. I und II sind die schon oben erwähnten Kasten, die das Selenpräparat, bez. die Lampe enthalten, *S* ist der Schaltkasten mit den Quecksilbernäpfen *a* bis *i*.

Von dem nur schematisch gezeichneten Selenpräparat *Se* führen die beiden Platinelektroden zu den inneren Quecksilber-

1) Beschreibung vgl. F. Dolezalek, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **21.** p. 345. 1901.

näpfen *b* und *c*, die Konstantandrähte zu den äußeren Näpfen *a* und *d*.


Fig. 6.

Zur *Messung der thermoelektrischen Kraft der Selenpräparate* werden b mit e und c mit f durch amalgamierte Kupferbügel verbunden. Dann liegen beide Pole der Selenzelle an dem rechts gezeichneten Kompensationsapparat, der von den Widerständen einer Siemensschen Meßbrücke älterer Konstruktion gebildet wurde. Q ist das Quadrantelektrometer, dessen Nadel durch die Batterie E_3 geladen ist. U_1 ist eine auf Hartgummi montierte Quecksilberwippe, deren einer mittlerer Quecksilbernapf m sowohl mit dem Napf k wie mit der Erde ständig verbunden bleibt; ferner sind o und p miteinander verbunden. Ist nun die Wippe nach vorn umgelegt, so ist m mit o und n mit p verbunden, und da o und p in leitender Verbindung stehen, so liegen also beide Quadrantenpaare an Erde (Nulllage). Wird die Wippe dagegen nach der anderen Seite umgelegt, so bleibt das eine Quadrantenpaar und Napf m an Erde liegen; der Napf l dagegen ist jetzt mit dem anderen Quadrantenpaar verbunden. Ist die Kompensation erreicht, so darf das Elektrometer keinen Ausschlag mehr geben. Als Vergleichsspannung dient ein Akkumulator mit der elektromotorischen Kraft E_2, die Spannung der Selenzelle ist dann

$$e' = E_2 \cdot \frac{r}{R + r},$$

r und R sind in Siemenseinheiten angegeben. Da nur ihr Verhältnis in Betracht kommt, ist eine Umrechnung in Ohm nicht erforderlich.

Soll dagegen der *Widerstand der Selenzelle* gemessen werden, so werden in dem Schaltkasten S die Näpfe b mit h und c mit i durch Bügel verbunden, der Schalter U_3 geschlossen und in dem Quecksilberumschalter U_2 ein Kupferbügel von u nach t gelegt. Es geht dann der Strom der Meßbatterie mit der bekannten Spannung E_1 über U_3, u und t durch die Spulen g_2 hoher Empfindlichkeit, dann über z, h und b durch das Selenpräparat und über c und i zurück zur Batterie.

Um ferner die *Temperaturdifferenz* A—B zu messen, werden in $S\,a$ mit g, b mit c und d mit h und in U_2 u mit v verbunden; U_3 bleibt offen. Dann geht der Strom des Konstantan–Platin–Konstantan-Thermoelementes (der hohe Widerstand der Selenzelle kann als unendlich groß im Vergleich zu

dem des Stromkreises angesehen werden. Genaueres vgl. später) von a über g, u und v durch die Galvanometerspulen g_1 geringen Widerstandes, durch den Rheostaten w und über z und h nach d zurück.

Mit Hilfe des Kalomelnormalelementes E_4 von großen Dimensionen[1]) (25 qcm Quecksilberoberfläche) kann schließlich noch jederzeit die Empfindlichkeit des Spulenpaares g_1 von geringer Empfindlichkeit bestimmt werden. Wird nämlich in U_3 v mit x verbunden, so geht der Strom des Normalelementes über den Vorschaltwiderstand w durch die Spulen g_1. Ist also E_4 die elektromotorische Kraft des Kalomelelementes, w_i sein innerer Widerstand, g_1 der Widerstand des Galvanometers, w der vorgeschaltete Widerstand und α der unter diesen Verhältnissen hervorgebrachte Ausschlag, so ist die Empfindlichkeit

$$c_1 = \frac{E}{(w + g_1 + w_i) \cdot \alpha} \text{ Amp. pro Millimeter Ausschlag.}$$

Zur Messung der Empfindlichkeit der Wickelung von 3,2 Ω Widerstand wurde stets $w = 80000\ \Omega$ gewählt. Der innere Widerstand w_i der Kalomelelemente betrug ca. 12 Ω.

Durch Kompensation gegen ein Westonnormalelement bei verschiedenen Temperaturen wurde die elektromotorische Kraft der beiden in Betracht kommenden Kalomelelemente bestimmt zu:

Kalomelelement I: $E = 1{,}0748 + 0{,}00009 \cdot (t - 20^0)$,

Kalomelelement II: $E = 1{,}0752 + 0{,}00009 \cdot (t - 20^0)$.

Da nun die beiden Glockenmagnete des Galvanometers auf derselben Achse sitzen, das richtende Drehmoment des Erdmagnetismus für beide also dasselbe ist, und da wegen der festen Aufstellung des Instrumentes die Lage der Spulen zu den Magneten immer dieselbe blieb, so brauchte die Empfindlichkeit für das zweite Spulenpaar von hohem Widerstand nicht jedesmal besonders bestimmt zu werden, wenn man das Verhältnis der Empfindlichkeiten ein für allemal genau gemessen hatte, da ja dieses nach dem oben Gesagten ein konstanter

1) Nach W. Ostwald, Zeitschr. f. physik. Chemie 1. p. 406. 1887. — Er gibt an, daß es bei diesen Dimensionen schon für äußere Widerstände $\geqq 1000\ \Omega$ brauchbar sei.

Wert bleiben muß, der zu Anfang der Versuche zu 0,03139 bestimmt wurde. Nennt man die Empfindlichkeit für das Spulenpaar von 3,2 Ω Widerstand c_1, die des anderen von 6500 Ω c_2, so ist also stets $c_2 = 0{,}03139 \,.\, c_1$.

Außerdem wurde noch ein für allemal das *Verhältnis der Empfindlichkeiten für verschiedene Punkte der Skala* bestimmt, und hieraus eine Kurve zur Korrektion der Ausschläge aufgestellt, da die einfache Umrechnung auf Bogenmaß nicht genügt hätte. Als Normalempfindlichkeit wurde dabei die gesetzt, die sich bei einem Vorschaltwiderstand $w = 80000\ \Omega$ ergibt (vgl. oben p. 830).

Um vollkommenste Isolation aller Teile zu erreichen, wurden sämtliche Batterien und Apparate auf Glas gestellt, und ebenso alle Leitungen als Luftleitungen über Glasstäbe geführt. Insbesondere wurde eine Untersuchung auf etwaige Isolationsfehler an der Einspannvorrichtung der Porzellanplatten vorgenommen. Zu dem Zweck wurde eine leere Porzellanplatte an den Enden einige Millimeter breit platiniert und in derselben Art wie bei den Selenpräparaten Elektroden angelötet; diese Platte wurde dann in die Heizvorrichtung eingespannt, die Verbindungen der angelöteten Drähte mit den Klemmen hergestellt und wie bei einer Messungsreihe durch das eine Rohr Dampf und durch das andere Wasser geleitet. Als dann ebenso geschaltet wurde, wie zur Widerstandsmessung der Selenpräparate, ergab sich eine *völlige* Isolation aller Teile. Ebenso wurden auch die Schalter U_1, U_2 und U_3 auf ihre Isolation untersucht und *absolut sicher isolierend* gefunden.

Eichung der Konstantan–Platin-Thermoelemente. Um auch die Temperaturdifferenzen *selbst* der Seiten A und B der Selenthermoelemente bestimmen zu können und nicht bloß ihre Schwankungen während einer und derselben Messungsreihe, mußte für die benutzten Platin- und Konstantandrähte die Größe ihrer thermoelektrischen Kraft als Funktion der Temperaturdifferenz bestimmt werden. Aus der aufgenommenen Kurve ergab sich, daß für die bei den Messungsreihen vorkommenden durchschnittlichen Temperaturen einer gemessenen elektromotorischen Kraft E eine Temperaturdifferenz

$$t_2 - t_1 = 0{,}02550 \,.\, E \,.\, 10^6$$

entspricht.

V. Die eigentlichen Messungen.

(An Selenmodifikation II.)

Bekanntlich zeigen die Selenpräparate eine große *Trägheit*[1]), indem nach einer Belichtung der Widerstand nicht sofort wieder den hohen Wert erreicht, den er vordem im Dunkeln hatte; vielmehr ist hierzu eine Zeit bis zu einigen Stunden erforderlich. Es wurden deshalb die Selenpräparate stets am Tage vor der Messung in den Kasten I eingesetzt, so daß sie vor Beginn einer Untersuchung über Nacht gut ausgeruht hatten. Aus demselben Grunde wurden die Messungen auch bei *zunehmender* Helligkeit gemacht. Bei wachsender Beleuchtung haben die Selenzellen allerdings auch eine geringe Trägheit, jedoch ist dieselbe bei weitem nicht so groß, als bei abnehmender Beleuchtung. Nach Marc[2]) soll das reine Selen in genügend dünnen Schichten sogar *überhaupt keine* Trägheit bei *wachsender* Helligkeit besitzen.

Außerdem zeigte es sich, daß die empfindlichen Selenpräparate nicht vollkommen stabil sind, so daß sie bei der Erwärmung bez. Abkühlung ihrer Enden zu Anfang bisweilen geringe Änderungen des Widerstandes, sowie der thermoelektrischen Spannung aufwiesen, trotzdem die Temperaturverhältnisse schon konstant geworden waren.

Es rührt dies offenbar daher, daß die Modifikation II, die ja nach Siemens eine Lösung von III in I sein soll, für jede bestimmte Temperatur ein anderes Mischungsverhältnisse dieser

1) Die Literatur hierüber ist außerordentlich groß. Über *neuere* Untersuchungen vgl. z. B. E. Ruhmer, Physik. Zeitschr. **3**. p. 468—474. 1902. Ferner R. Marc, Zeitschr. f. anorg. Chemie **37**. p. 470. 1903.

2) R. Marc kommt durch seine Versuche zu dem Schluß, daß bei *Belichtung* reines Selen an und für sich *keine* Trägheit besitzt, sondern daß diese Erscheinung nur von dem Vorhandensein unbelichteter Selenteile herrührt. Bei Verdunkelung dagegen soll Trägheit wirklich vorhanden sein. Als er auch noch den Einfluß plötzlicher Temperaturänderung untersuchte, fand er *allgemein*, daß bei allen Selenmodifikationen „eine Verringerung des Widerstandes, sei es durch Erwärmen oder Belichten bei I, sei es durch Abkühlen bei III, sich *momentan* vollzieht, während die Vergrößerung des Widerstandes *allmählich* vor sich geht“.

beiden Modifikationen aufweist[1]), so daß nach jeder Temperaturänderung erst eine gewisse Zeit vergehen muß, bis sich das zugehörige Mischungsverhältnis eingestellt hat. Es wurde deshalb nicht eher als 2—4 Stunden, nachdem mit dem Durchleiten von Dampf bez. Wasser begonnen war, mit einer Messungsreihe angefangen. Hierdurch wurden allerdings die Versuche sehr zeitraubend, jedoch war ein so langsames Vorgehen unbedingt erforderlich.

Unmittelbar vor Beginn einer Messungsreihe und ebenso gleich nach Beendigung derselben wurden die Spannungen der Akkumulatorenbatterien E_1 und E_2 mittels eines Präzisionsvoltmeters gemessen, sowie auf die oben beschriebene Art die Empfindlichkeit des Spulenpaares von 3,2 Ω Widerstand. Für die Berechnung ist aus diesen zu Anfang und Ende gefundenen Werten allemal das Mittel genommen.

Dann wurden für die erwähnten Flächenhelligkeiten von 0 bis 20 . 22,1 (= 0 bis 442 Meterkerzen) jedesmal nacheinander der Widerstand, die elektromotorische Kraft des Selen–Platin-Thermoelementes, sowie die Temperaturdifferenz der beiden Kontaktstellen gemessen und die zugehörigen Zeiten notiert.

Um Schwankungen der Nullage des Galvanometers zu eliminieren, wurden die Nullagen allemal vor und nach jeder Ablesung bestimmt. Besonders zur Temperaturmessung waren nämlich sehr genaue Galvanometerbeobachtungen nötig, da die durch Änderung der Temperaturdifferenz der Kontaktstellen hervorgebrachten Änderungen der thermoelektrischen Kräfte meist größer sind, als die durch das Licht hervorgebrachten. Leider waren nun infolge der Nähe anderer Laboratorien, sowie von elektrischen Bahnen häufig beträchtliche magnetische Strörungen vorhanden. Selbst das Umhüllen des ganzen Instrumentes mit einem dicken schmiedeeisernen Rohr war noch nicht ausreichend, äußere Einflüsse vollständig unschädlich zu machen. Es blieb deshalb, da ein Drehspulengalvanometer leider nicht zur Verfügung stand, an manchen Tagen nichts anderes übrig, als die Messungsreihen einfach abzubrechen.

---

1) Teilweise schon von Siemens festgestellt. Pogg. Ann. **159.** p. 117. 1876. — Neuerdings genauer untersucht von R. Marc, Zeitschr. f. anorgan. Chemie **37.** p. 466. 1903.

Wie schon oben erwähnt, wurde die wirkliche Temperaturdifferenz der Seiten A und B für jedes frisch eingespannte Selenpräparat nur einmal bestimmt, indem (vgl. Fig. 6) a mit g, b mit c, d mit h und u mit v verbunden wurden. Schaltet man dann nacheinander die Widerstände w_1 und w_2 vor das Galvanometer, wobei dieses die Ausschläge α_1 und α_2 ergeben möge, so hat man zur Berechnung der elektromotorischen Kraft E des Hilfsthermoelementes Konstantan–Platin–Konstantan, dessen innerer Widerstand W betragen möge, die beiden Gleichungen

$$E = c_1 \cdot \alpha_1 \cdot (W + g_1 + w_1)$$

und

$$E = c_1 \cdot \alpha_2 \cdot (W + g_1 + w_2).$$

Eliminiert man hieraus $W + g_1$, und setzt den gefundenen Wert von E in die frühere Gleichung auf p. 831 ein, so ergibt sich die Temperaturdifferenz zu

$$t_2 - t_1 = 0{,}02550 \cdot (w_2 - w_1) \cdot c_1 \cdot \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot 10^6.$$

Genau genommen wirkt bei dieser Schaltung auf das Galvanometer das Konstantan–Platin–Konstantan-Thermoelement nicht allein, sondern es ist ihm ein Konstantan–Selen–Konstantan-Thermoelement parallel geschaltet. Ursprünglich wurde denn auch beabsichtigt, die Temperatur jeder Seite für sich zu bestimmen, durch Verbinden von g mit a und h mit b bez. von g mit c und h mit d. Jedoch ist dieses zeitraubende und wegen der magnetischen Störungen ungenauere Verfahren nicht erforderlich, weil der Widerstand der Selenschicht im Vergleich zu dem des Konstantan–Platin-Thermoelementes als unendlich groß zu betrachten ist, wie denn auch der Versuch ergab, daß die Selenthermoelemente für sich allein nicht imstande waren, auch nur die geringste Ablenkung des Galvanometers hervorzurufen. Da ferner nach Righi[1]) die thermoelektrische Kraft des Selens von Zimmertemperatur bis zur Schmelztemperatur fast linearen Verlauf hat, so kann man auch für die Korrektion der ge-

1) A. Righi, Sulla forza electromotrice del Selenio. Padova 1888. — Naturwissenschaftl. Rundschau 4. p. 236.

messenen Werte auf einheitliche Verhältnisse innerhalb der in Betracht kommenden Grenzen anstandslos direkt mit der Temperaturdifferenz rechnen, ohne Rücksicht auf die Temperaturen der Kontaktstellen selbst.

Ist also auf diese Art für ein bestimmtes Selenpräparat die Temperaturdifferenz einmal gemessen worden, so genügt es dann, solange dieses Präparat eingespannt bleibt, zur Vergleichung der Temperaturen immer nur die Galvanometerausschläge bei demselben Vorschaltwiderstand w zu vergleichen, indem sich dann die Temperaturdifferenzen wie die zugehörigen korrigierten Galvanometerausschläge verhalten. Als passende Größe eignete sich $w = 100\ \Omega$.

Die Schaltung für diese Messung der elektromotorischen Kraft der Selenthermoelemente wurde schon oben bei der Erklärung des Schaltungsschemas ausführlich beschrieben. Jedoch ist noch folgendes hinzuzufügen: Für r wurde ein Widerstand von 100 S.-E. gewählt. Ferner wurde R nicht vollständig abgeglichen, bis das Elektrometer keinen Ausschlag mehr zeigte, sondern es wurde zwischen zwei meist um 100 S.-E. auseinanderliegenden Widerständen interpoliert. Es geschah dies hauptsächlich, weil bei der großen Schwingungsdauer des Elektrometers ein vollkommenes Abgleichen zu lange Zeit erfordert hätte.

Auch bei den Elektrometerbeobachtungen wurde die Nulllage doppelt abgelesen; die Änderung derselben wurde dann bei der Berechnung auf die um *genau* gleiche Zeiten auseinanderliegenden Ablesungen gleichmäßig verteilt.

Daß bei der Messung jedes einzelnen Punktes noch die Zeit notiert wurde, bezweckte einmal, einen Anhalt zu geben über die Zeit, die von der erfolgten Helligkeitsänderung bis zur betreffenden Messung verstrichen war; ferner war dies aber auch nötig, um die Temperaturdifferenz für den Moment interpolieren zu können, in dem die Messung der thermoelektrischen Kraft des Selenpräparates erfolgte.

Ist also R der durch Interpolation gefundene Widerstand, bei dem völlige Kompensation besteht, $t_2 - t_1$ die ebenfalls durch Interpolation gefundene Temperaturdifferenz in dem Moment, in dem die Bestimmung von R erfolgte, so ergibt sich die thermoelektrische Kraft des Selen–Platin-Thermoelementes

pro 1° C. Temperaturdifferenz (im Durchschnitt zwischen 20 und 80°) zu

$$e = \frac{e'}{t_2 - t_1} = E_2 \cdot \frac{r}{R + r} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1}.$$

In den Kurventafeln sind des besseren Vergleiches halber nicht die ganzen elektromotorischen Kräfte e' eingetragen, sondern nur diese für 1° C. Temperaturdifferenz umgerechneten thermoelektrischen Spannungen e. Ebenso auch nicht die Widerstände der Selenpräparate selbst, die ja der wechselnden Schichtdicke wegen ziemlich verschiedene Werte haben, sondern der jeweilige *spezifische* Widerstand σ des Selens. Man erhält diesen aus den Messungen folgendermaßen:

Wie schon oben erwähnt, wurde der Widerstand aus einer Strom- und Spannungsmessung berechnet. Ist also E_1 die Spannung der Meßbatterie, e' die elektromotorische Kraft des Selenthermoelementes, c_2 die Empfindlichkeit des Spulenpaares von 6500 Ω Widerstand und α der hervorgebrachte Ausschlag, so ist bei der angegebenen Schaltung, da an dem Selenthermoelement das Platin der erwärmten Seite den negativen Pol bildet, der Widerstand $W = (E_1 + e')/\alpha . c_2$, wenn Seite A (vgl. Schaltungsschema Fig. 6) und $W = (E_1 - e')/\alpha . c_2$, wenn Seite B erwärmt wird.

Im Durchschnitt betrug e' 0,06—0,07 Volt, die Spannung der Meßbatterie 10—14 Volt.

Bezeichnet man schließlich noch mit l die Entfernung der Platinelektroden in Zentimeter und mit q den mittleren Querschnitt der Selenschicht in Quadratzentimeter, so ist ihr spezifischer Widerstand

$$\sigma = \frac{W . q}{l} \text{ Ohmzentimeter.}$$

Mitteilung der Beobachtungsresultate.

Die Resultate der aufgenommenen zehn Messungsreihen sind in den Kurven I bis X enthalten. Um jedoch einen Anhalt über die ganze Art der Beobachtung zu geben, seien für Messung VII die Daten des Beobachtungsjournals mitgeteilt.[1]) Es gelten hierbei folgende Bezeichnungen (zum Teil schon im Schaltungsschema enthalten):

1) Die ausführliche Mitteilung aller 10 Messungsreihen findet sich in der Inaugural-Dissertation p. 44—83.

E_1 = Spannung der Akkumulatorenbatterie E_1 zur Messung des Widerstandes.
E_2 = Spannung des Akkumulators E_2 für den Kompensationsapparat.
n_0 = Ruhelage an Galvanometer bez. Elektrometer.
n = Ablesung an Galvanometer bez. Elektrometer.
c_1 = Empfindlichkeit des Galvanometers bei Benutzung des Spulenpaares von 3,2 Ω Widerstand.
c_2 = Empfindlichkeit des Galvanometers bei Benutsung des Spulenpaares von 6500 Ω Widerstand ($c_2 = 0{,}03139 \cdot c_1$).
t_c = Temperatur des Kalomelnormalelementes.
$t_a - t_b$ bez. $t_b - t_a$ = Temperaturdifferenz der Kontaktstellen

$$= 0{,}0255\,(w_2 - w_1)\,e_1 \cdot \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot 10^6.$$

L = *Relative* Flächenhelligkeit auf der Selenschicht, wobei mit $L = 1$ die Flächenhelligkeit von 22,1 Meterkerzen (größtmögliche Entfernung der Lampe) zu verstehen ist (vgl. oben p. 821). Also: Absolute Flächenhelligkeit gleich $22{,}1 \cdot L$ Meterkerzen.
w = Vorschaltwiderstand w in Ω.
R und r = Kompensationswiderstände (wobei r stets gleich 100 S.-E.).
e = Spannung des Selen—Platin-Thermoelementes in Volt pro 1° C. Temperaturdifferenz.

$$e = E_2 \frac{100}{R + 100} \cdot \frac{1}{t_a - t_b}.$$

σ = spezifischer Widerstand der Selenschichten in Ohmzentimeter.

6. März 1905.

Messung VII.

Präparat Nr. 26. — Seite A erwärmt.

Spannung der Meßbatterien:

Zu Anfang	Zu Ende	Im Mittel
E_1 = 14,32	14,32	14,32 Volt
E_2 = 2,030	2,030	2,030 „

Empfindlichkeit des Galvanometers:

Zu Anfang

t_c = 19,0°	n_0 = 504,5		503,5
	n =	238,0	

Zu Ende

t_c = 21,0°	n_0 = 499,5		499,0
	n =	232,0	

Hieraus mittlere Empfindlichkeit

$c_1 = 503{,}7 \cdot 10^{-10}$ $c_2 = 15{,}81 \cdot 10^{-10}$ Amp. pro mm.

1. Relative Flächenhelligkeit $L = 0$.

a) Bestimmung der Temperaturdifferenz $t_a - t_b$ (12^{01}).

w	=		100	250		250	100	
n_0	=	504,0			504,0			504,5
n	=		814,0	662,5		663,0	815,0	

Hieraus: $t_a - t_b = 62,04^{\circ}$.

b) Bestimmung des Widerstandes (2^{07}).

n_0	=	502,5		502,0
n	=		415,0	

$\sigma = 33,63 \,.\, 10^4$ Ohmzentimeter.

c) Bestimmung der thermoelektrischen Kraft (2^{12}).

R	=		2800	2700		2700	2800	
n_0	=	307,2			305,2			303,5
n	=		312,2	301,3		299,6	308,7	

R = 2748,0 S.-E. $e = 1134,0 \,.\, 10^{-6}$ Volt.

d) Bestimmung der Temperaturdifferenz $t_a - t_b$ (2^{16}).

w = 100 (auch für alle folgenden Punkte)

n_0	=	501,0		501,5
n	=		816,0	

2. Relative Flächenhelligkeit $L = 1$ (2^{19}).

a) Bestimmung des Widerstandes (2^{27}).

n_0	=	502,0		502,0
n	=		325,5	

$\sigma = 16,59 \,.\, 10^4$ Ohmzentimeter.

b) Bestimmung der thermoelektrischen Kraft (2^{31}).

R	=		2800	2700		2700	2800	
n_0	=	297,8			297,8			297,3
n	=		300,8	291,8		291,7	300,3	

R = 2767,2 S.-E. $e = 1127,5 \,.\, 10^{-6}$ Volt.

c) Bestimmung der Temperaturdifferenz $t_a - t_b$ (2^{37}).

n_0	=	501,0		502,0
n	=		815,5	

3. Relative Flächenhelligkeit $L = 3$ (2^{38}).

a) Bestimmung des Widerstandes (2^{49}).

n_0	=	500,0		501,0
n	=		297,5	

$\sigma = 14,42 \,.\, 10^4$ Ohmzentimeter.

b) **Bestimmung der thermoelektrischen Kraft** (2^{57}).

R =		2800	2700		2700	2800	
n_0 =	298,0			298,2			298,2
n =		300,0	290,8		291,4	299,9	

R = 2777,2 S.-E. e = $1124{,}3 \cdot 10^{-6}$ Volt.

c) **Bestimmung der Temperaturdifferenz** $t_a - t_b$ (3^{03}).

n_0 =	500,5		500,5
n =		814,5	

4. Relative Flächenhelligkeit $L = 5$ (3^{04}).

a) **Bestimmung des Widerstandes** (3^{13}).

n_0 =	500,0		500,0
n =		280,0	

$\sigma = 13{,}29 \cdot 10^4$ Ohmzentimeter.

b) **Bestimmung der thermoelektrischen Kraft** (3^{18}).

R =		2800	2700		2700	2800	
n_0 =	298,4			298,2			298,3
n =		299,6	290,6		290,5	299,3	

R = 2787,0 S.-E e = $1121{,}9 \cdot 10^{-6}$ Volt.

c) **Bestimmung der Temperaturdifferenz** $t_a - t_b$ (3^{24}).

n_0 =	500,0		500,0
n =		813,5	

5. Relative Flächenhelligkeit $L = 10$ (3^{25}).

a) **Bestimmung des Widerstandes** (3^{25}).

n_0 =	499,5		499,5
n =		251,0	

σ = 11,75 Ohmzentimeter.

b) **Bestimmung der thermoelektrischen Kraft** (3^{40}).

R =		2800	2700		2700	2800	
n_0 =	298,1			297,9			298,2
n =		298,4	289,5		289,8	298,8	

R = 2796,5 S.-E. e = $1119{,}3 \cdot 10^{-6}$ Volt.

c) **Bestimmung der Temperaturdifferenz** $t_a - t_b$ (3^{45}).

n_0 =	500,0		499,5
n =		813,0	

6. Relative Flächenhelligkeit $L = 15$ (8^{46}).

a) Bestimmung des Widerstandes (8^{57}).

n_0 =	500,0		499,5
n =		238,5	

σ = 10,97 . 10^4 Ohmzentimeter.

b) Bestimmung der thermoelektrischen Kraft (4^{06}).

R =		2800	2700		2700	2800	
n_0 =	296,9			296,4			296,5
n =		297,0	288,0		287,6	296,7	

R = 2797,2 S.-E. e = 1120,1 . 10^{-6} Volt.

c) Bestimmung der Temperaturdifferenz $t_a - t_b$ (4^{10}).

n_0 =	499,0		500,0
n =		812,5	

7. Relative Flächenhelligkeit $L = 20$ (4^{11}).

a) Bestimmung des Widerstandes (4^{21}).

n_0 =	500,0		499,5
n =		225,0	

σ = 10,62 . 10^4 Ohmzentimeter.

b) Bestimmung der thermoelektrischen Kraft (4^{26}).

R =		2800	2700		2700	2800	
n_0 =	296,7			296,3			296,8
n =		297,8	288,8		288,9	297,9	

R = 2785,8 S.-E. e = 1120,2 . 10^{-6} Volt.

c) Bestimmung der Temperaturdifferenz $t_a - t_b$ (4^{32}).

n_0 =	499,5		499,0
n =		814,0	

8. Lampe wieder ausgeschaltet (4^{32}).

a) Bestimmung des Widerstandes (4^{40}).

n_0 =	498,5		498,0
n =		382,0	

σ = 25,22 . 10^4 Ohmzentimeter.

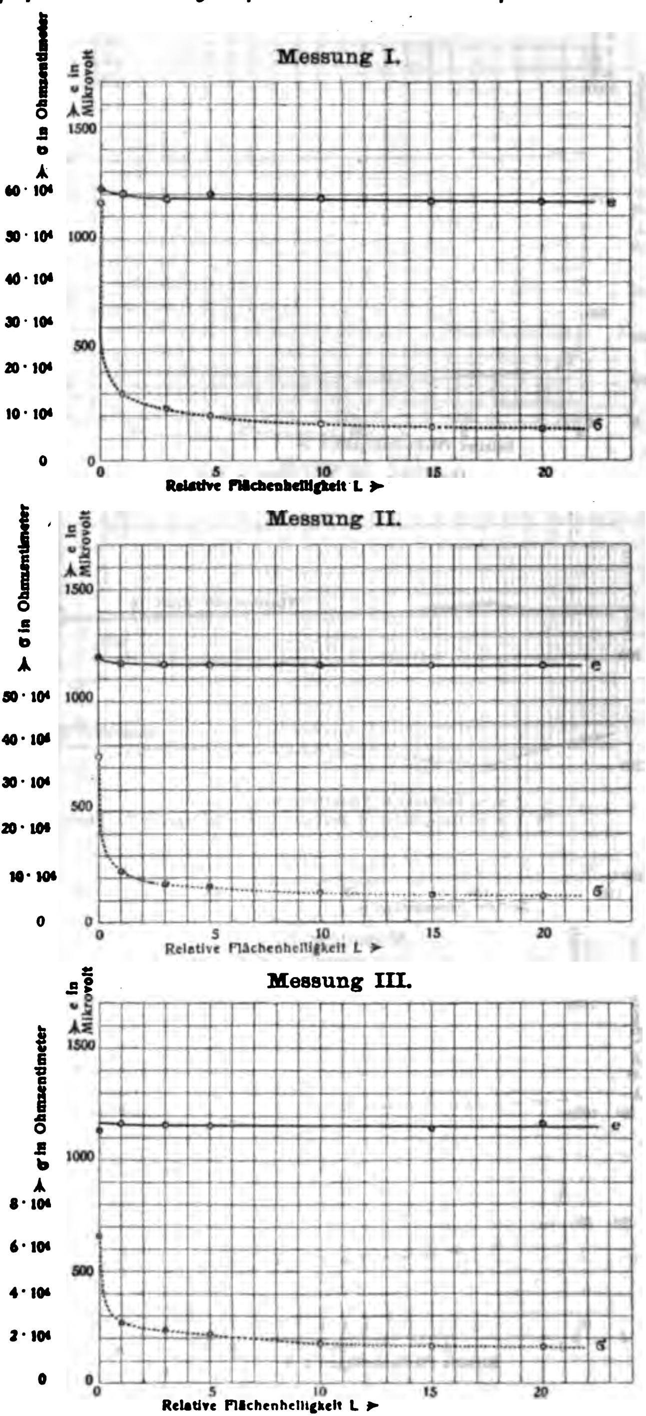
b) Bestimmung der thermoelektrischen Kraft (4^{45}).

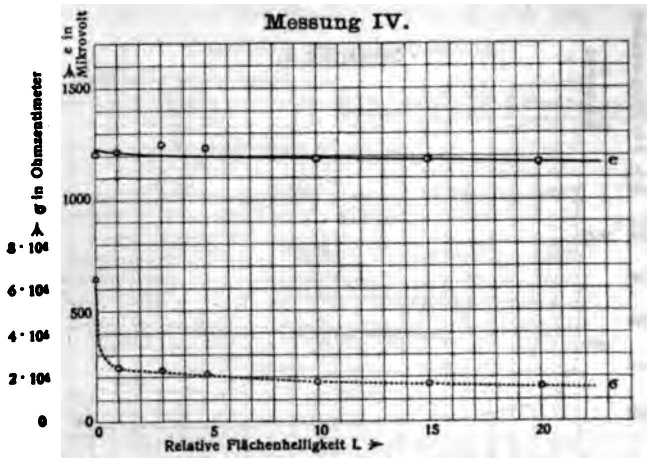
R =		2800	2700		2700	2800	
n_0 =	297,3			297,9			298,3
n =		302,2	293,2		293,6	302,7	

R = 2749,0 S.-E. e = 1136,8 . 10^{-6} Volt.

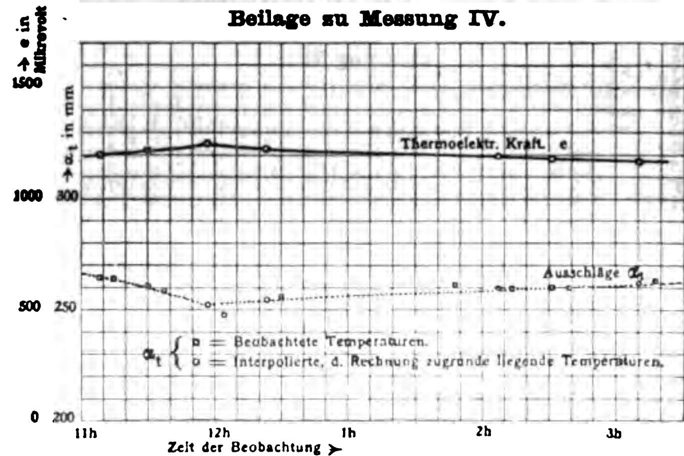
c) Bestimmung der Temperaturdifferenz $t_a - t_b$ (4^{50}).

n_0 =	499,0		498,5
n =		812,0	

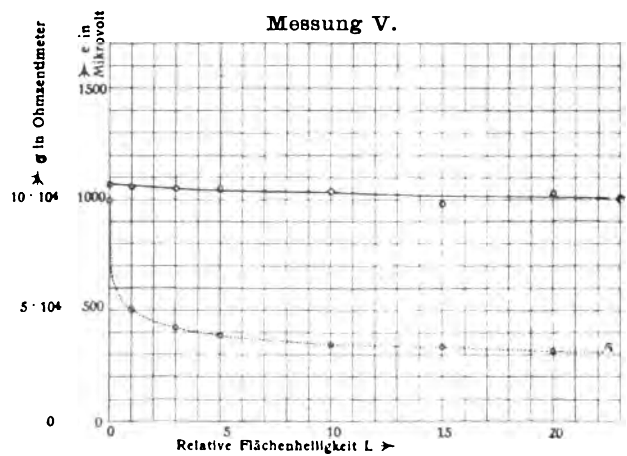

Messung I.
σ in Ohmzentimeter
e in Mikrovolt
1500
1000
500
0
60 · 10⁴
50 · 10⁴
40 · 10⁴
30 · 10⁴
20 · 10⁴
10 · 10⁴
0
5
10
15
20
e
σ
Relative Flächenhelligkeit L
Messung II.
σ in Ohmzentimeter
e in Mikrovolt
1500
1000
500
0
50 · 10⁴
40 · 10⁴
30 · 10⁴
20 · 10⁴
10 · 10⁴
e
σ
Relative Flächenhelligkeit L
Messung III.
σ in Ohmzentimeter
e in Mikrovolt
1500
1000
500
8 · 10⁴
6 · 10⁴
4 · 10⁴
2 · 10⁴
e
σ
Relative Flächenhelligkeit L



Messung IV.
e in Mikrovolt
σ in Ohmzentimeter
1500
1000
500
0
8 · 10⁴
6 · 10⁴
4 · 10⁴
2 · 10⁴
0
e
σ
0
5
10
15
20
Relative Flächenhelligkeit L



Beilage zu Messung IV.
e in Mikrovolt
α_t in mm
1500
1000
500
0
300
250
200
Thermoelektr. Kraft e
Ausschläge α_t
α_t { □ = Beobachtete Temperaturen.
○ = Interpolierte, d. Rechnung zugrunde liegende Temperaturen.
11h
12h
1h
2h
3h
Zeit der Beobachtung



Messung V.
e in Mikrovolt
σ in Ohmzentimeter
1500
1000
500
0
10 · 10⁴
5 · 10⁴
0
σ
0
5
10
15
20
Relative Flächenhelligkeit L



Messung VI.

σ in Ohmzentimeter: 0, 5 · 10⁴, 10 · 10⁴

e in Mikrovolt: 0, 500, 1000, 1500

e

σ

0 5 10 15 20

Relative Flächenhelligkeit L

Messung VII.

σ in Ohmzentimeter: 0, 10 · 10⁴, 20 · 10⁴, 30 · 10⁴, 40 · 10⁴

e in Mikrovolt: 0, 500, 1000, 1500

e

σ

0 5 10 15 20

Relative Flächenhelligkeit L

Messung VIII.

σ in Ohmzentimeter: 0, 10 · 10⁴, 20 · 10⁴, 30 · 10⁴, 40 · 10⁴

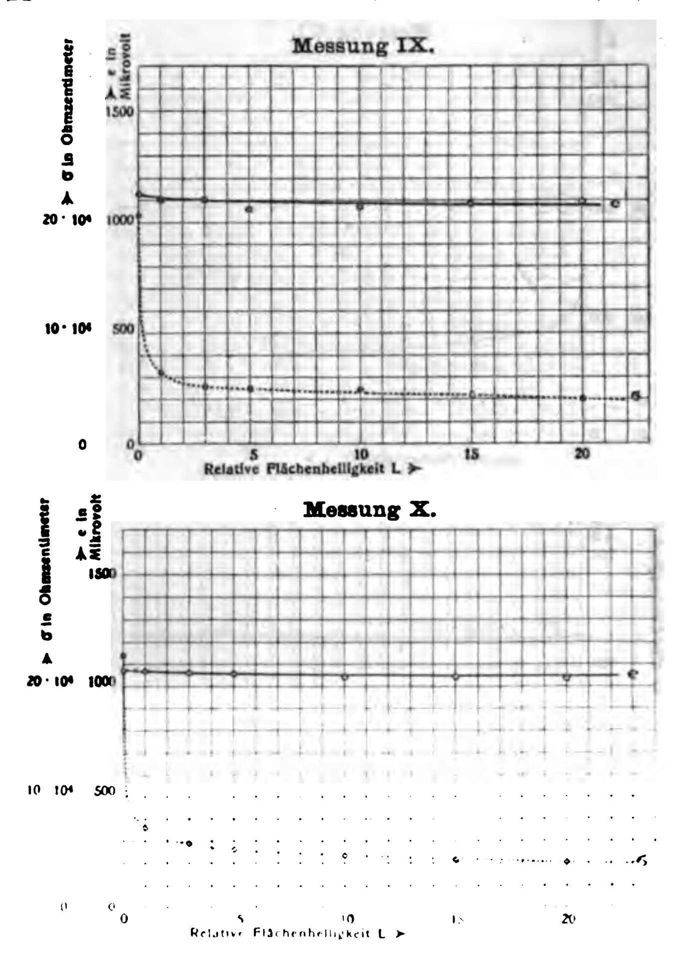
e in Mikrovolt: 0, 500, 1000, 1500

e

σ

0 5 10 15 20

Relative Flächenhelligkeit L



Diskussion der erhaltenen Resultate.

Zunächst folgt aus den in Kurven aufgetragenen gemessenen Werten die Tatsache, daß, wie von vornherein erwartet, *die* **thermoelektrische Kraft der Modifikation II des Selens infolge Belichtung sich ändert** *und zwar zeigt sich bei allen 10 Messungsreihen mehr oder weniger deutlich eine* **Abnahme** *derselben (ca. 3—4 Proz. innerhalb der untersuchten Grenzen von 0—112 Meterkerzen). Ferner ist aus den Kurven ersichtlich, daß diese Änderung der thermoelektrischen Kraft in einem gewissen Verhältnis zu der Änderung des Widerstandes*

steht, indem auch sie bei wachsender Beleuchtung zuerst rasch und dann langsamer abnimmt. Ob jedoch Proportionalität zwischen der Abnahme der thermoelektrischen Kraft und der des Widerstandes besteht, läßt sich aus der vorliegenden Untersuchung nicht entnehmen.

Daß gerade eine Abnahme der thermoelelektrischen Kraft zu beobachten ist, würde sich gut mit der älteren Anschauung über Thermoelektrizität decken, wonach ein gewisser Zusammenhang mit der elektrischen Leitfähigkeit bestehen soll, insofern als schlechte Leiter im allgemeinen hohe elektromotorische Kräfte geben.[1]) Wenn also ein und derselbe Leiter durch irgendwelche Ursachen eine größere Leitfähigkeit bekommt, so müßte hiernach seine thermoelektrische Kraft sinken.

Leider war es nicht möglich, am Schluß einer Messungsreihe, weil die Aufnahme einer solchen an sich schon viel Zeit erforderte, das langsame Wiederansteigen des Widerstandes und der thermoelektrischen Kraft nach Verdunkelung zu beobachten, also eine vollständige Trägheitskurve aufzunehmen. Es wurde aber doch zur Kontrolle bei Messung VI und VII zu Ende nach dem Ausschalten der Lampe wenigstens *einmal* der Widerstand und die thermoelektrische Kraft bestimmt, wobei sich wieder *eine Vergrößerung* derselben ergab (siehe oben p. 840 bei der Mitteilung der Versuchsreihe VII).

Es könnte dann noch der Einwand erhoben werden, daß die beobachtete Spannungsabnahme gar nicht eine Folge der Änderung der thermoelektrischen Kraft sei, sondern nur der des inneren Widerstandes bei vorhandenen Isolationsfehlern. Wenn diese Annahme zuträfe, dann würde das Selenthermoelement einen, wenn auch geringen Strom geliefert und das Elektrometer nur die vom inneren Widerstande abhängige Klemmenspannung gemessen haben. Jener Einwand ist jedoch deshalb hinfällig, weil erstens, wie schon oben betont, ausreichende Isolation vorhanden war und weil außerdem etwaige Isolationsfehler gerade das umgekehrte Resultat hervorgebracht haben würden, indem dann bei zunehmender Beleuchtung, also bei fallendem inneren Widerstand und gleichbleibendem

---

1) Vgl. Thermoelektrizität, bearb. von F. Braun in A. Winkelmann, Handb. d. Physik. II. Aufl. 1905. **4.** p. 748.

äußeren (etwaige Isolationsfehler), die Klemmenspannung hätte *steigen* müssen.

Eine Zusammenstellung der Dunkelwiderstände und der thermoelektrischen Kräfte pro 1° C. ist in folgender Tabelle enthalten.

Nummer der Messungsreihe	Nummer der benutzten Zelle	Gesamtwiderstand im Dunkeln in Megohm	Spezifischer Widerstand im Dunkeln in Ohmzentimeter	Thermoelektrische Kraft im Dunkeln pro 1° C. in Mikrovolt
I	25	442,0	58,33 . 10^4	1216,5
II	25	284,8	37,54	1191,5
III	28	114,2	6,64	1138,0
IV	28	111,5	6,48	1203,8
V	27	57,9	9,97	1071,0
VI	27	59,0	10,16	1079,2
VII	26	104,9	33,63	1134,0
VIII	26	101,0	33,24	1055,7
IX	30	160,0	20,55	1120,5
X	30	177,5	22,80	1078,1
		Mittel:	23,93 . 10^4	1128,8

Auffallend ist hier vor allem die Tatsache, daß die thermoelektrische Kraft der benutzten Selenschichten bedeutend größer ist als die von Matthiessen und Righi angegebenen Werte von 805 bez. 506 und 612 Mikrovolt pro Grad Celsius Temperaturdifferenz. Sie beträgt nämlich *im Dunkeln* gegen Platin 1129 Mikrovolt (Mittel aus den zehn Messungsreihen), gegen Blei also 1130 Mikrovolt. Selbst unter Berücksichtigung der Abnahme von 3—4 Proz. *bei Beleuchtung* ergeben sich noch ca. 1090 Mikrovolt, also immer noch reichlich mehr als die obigen Werte. Von der Verschiedenheit des benutzten Temperaturintervalls allein kann diese Differenz nicht wohl herrühren, da ja nach Righi (vgl. p. 834) die thermoelektrische Kraft des Selens von Zimmertemperatur bis zum Schmelzpunkt fast linearen Verlauf hat. Eine wahrscheinlichere Ursache ist vielmehr die Verschiedenheit der benutzten Modifikationen, da die in dünnen Schichten hergestellten Präparate höchstwahrscheinlich von wesentlich anderer molekularer Beschaffenheit sind, als die Selenstäbe von Righi.

Die gemessenen spezifischen Widerstände dagegen stimmen im wesentlichen, wenigstens der Größenordnung nach, mit den von Siemens angegebenen überein. Sie betragen nämlich im Dunkeln im Mittel $23{,}9 \cdot 10^4$ Ohmzentimeter gegen $37{,}6 \cdot 10^4$ bei Siemens (in seiner Originalabhandlung ist für Mod. II der Wert, auf Quecksilber bezogen, gleich $4 \cdot 10^9$ angegeben). Eine größere Übereinstimmung ist kaum zu erwarten, da ja der Wert von Siemens nur stark abgerundet angegeben ist, und vor allem die geringsten Verschiedenheiten bei der Herstellung den spezifischen Widerstand des Selens außerordentlich verschieden werden lassen.

Zur Beurteilung der Kurven sei nochmals darauf hingewiesen, daß die Genauigkeit der Messung der thermoelektrischen Kraft im wesentlichen von der Genauigkeit der Messung der Temperaturdifferenz abhing, die aber der magnetischen Störungen wegen vielfach nicht mit der wünschenswerten Sicherheit ausgeführt werden konnte (vgl. p. 833). Es zeigt sich dies besonders deutlich an Messung IV und VIII, wo nicht nur die Kurve für die thermoelektrische Kraft, sondern auch die für den spezifischen Widerstand am unregelmäßigsten verläuft, da während dieser beiden Messungen, wie sich später herausstellte, zu Anfang gerade in einem anderen Raum des Instituts mit einem großen Elektromagneten gearbeitet wurde. Trägt man außerdem bei IV die Galvanometerausschläge für die Messung der Temperaturdifferenz und der thermoelektrischen Kräfte als Funktion der Zeit auf (siehe p. 842), so ist die Abhängigkeit beider voneinander leicht ersichtlich. Bei anderen Messungen dagegen, wo die Temperaturdifferenz richtig bestimmt wurde, kann dieselbe schwanken, ohne daß die für 1° C. Temperaturdifferenz umgerechnete Kurve der thermoelektrischen Kräfte einen unregelmäßigen Verlauf nähme.

Schließlich verdient noch hervorgehoben zu werden, daß die Versuche gleichzeitig eine Bestätigung der neuerdings die Oberhand gewinnenden Theorie bilden, daß die Lichtempfindlichkeit *nicht*, wie Bidwell[1]) ursprünglich annahm, von der Bildung von Seleniden in der Schicht abhängt, trotzdem das Vorhandensein *ganz geringer* Verunreinigungen auf die Licht-

1) S. Bidwell, Phil. Mag. 40. p. 233—256. 1895.

empfindlichkeit der Zellen günstig einzuwirken scheint.[1]) Bidwell führt nämlich an, daß selbst bei Verwendung reinsten Selens bei der gewöhnlichen Form der Selenzellen, wo die ganze Schicht von vielen dicht nebeneinanderliegenden Metalldrähten durchsetzt ist, die Bildung von Seleniden mit Sicherheit angenommen werden könnte, so daß die Lichtempfindlichkeit des Selens nicht auf physikalische, sondern auf chemische Ursachen zurückzuführen sei. Um nun diese Annahme zu widerlegen, stellte G. Berndt[2]) und gleichzeitig A. H. Pfund[3]) Selenzellen aus reinstem Selen und mit Kohle- statt Metallelektroden her, so daß das Vorhandensein von Seleniden ausgeschlossen war. Trotzdem erwiesen sich auch diese Zellen als lichtempfindlich. Derselbe Beweis wird nun auch durch die zu den vorliegenden Versuchen benutzten Präparate erbracht. Auch bei diesen ist die Möglichkeit einer Bildung von Seleniden in der eigentlichen Schicht ausgeschlossen, da ja, wie oben beschrieben, zuerst immer nur ein reines Selen aufgestrichen wurde und erst nach dem vollkommenen Erkalten desselben die beiden Elektrodendrähte ganz an den Enden in ca. 60 mm Abstand voneinander angebracht wurden. Trotzdem also so die eigentliche wirksame Selenfläche mit keinerlei Metall in Berührung gekommen war, zeigen diese Präparate dieselbe hohe Lichtempfindlichkeit, wie die Selenzellen normaler Konstruktion.

Untersuchung der Modifikation I.

Die ursprüngliche Absicht, auf dieselbe Art, wie Modifikation II auch die bei 100° herzustellende Modifikation I zu untersuchen, die ja noch lichtempfindlicher ist, mußte leider vorläufig aufgegeben werden, da sich herausstellte, daß hierzu wieder eine ganz andere Versuchsanordnung hätte gewählt werden müssen. Am meisten störte offenbar der große Widerstand dieser Präparate; so hatte z. B. Präparat Nr. 34 einen Gesamtwiderstand von $4.2 . 10^9\ \Omega$ und einen spezifischen Widerstand von $890 . 10^4$ Ohmzentimeter im Dunkeln. Außerdem

1) R. Marc, Zeitschr. f. anorg. Chemie 37. p. 459. 1903.
2) G. Berndt, Physik. Zeitschr. 5. p. 121—124. 1904.
3) A. H. Pfund, Phil. Mag. (6) 7. p. 16—39. 1904.

hatten diese Präparate von vornherein beträchtliche elektromotorische Kräfte, die nicht durch Temperaturdifferenzen hervorgerufen sein konnten, da sie selbst nach 24stündigem Durchfließen kalten Wassers durch *beide* Röhren der Heizvorrichtung sich nicht änderten. Da das Selen in der Modifikation I ja als ein Elektrolyt aufzufassen ist, so liegt die Ursache hierfür vermutlich in einer geringen molekularen Verschiedenheit des Selens beider Enden, die durch das unvermeidliche nicht absolut gleichmäßige Aufstreichen oder nicht gleichmäßige Erhitzen beim Sensibilisieren im Wärmekasten hervorgerufen sein kann.

Ferner erwiesen sich die Präparate der Modifikation I als sehr stark polarisierbar, im Gegensatz zu Modifikation II, die weder Polarisierbarkeit noch das Vorhandensein eigener elektromotorischer Kräfte zeigte.

In der kurzen, noch zu Gebote stehenden Zeit wurden wohl diese Verhältnisse (z. B. auch die elektromotorischen Kräfte der Modifikation I bei Elektroden *verschiedenen* Materials) näher untersucht, wobei ich zu interessanten Resultaten über den elektrolytischen Charakter der Modifikation I gelangte.

Bei eingehenderem Literaturstudium stellte sich indessen am Schlusse der Arbeit heraus, daß diese Resultate nicht neu, sondern nur eine Bestätigung waren der Ergebnisse, die Righi[1]) in seinen sorgfältigen Untersuchungen gefunden hatte. Aus diesem Grunde, und weil diese Dinge auch außerhalb des Rahmens dieser Arbeit fallen, sehe ich hier von einer Mitteilung derselben ab.

Auch an dieser Stelle erlaube ich mir nochmals, Herrn Prof. Dr. L. Grunmach meinen aufrichtigen Dank auszusprechen, sowohl für die freundliche Überlassung der Arbeit, als auch ganz besonders für die liebenswürdige Teilnahme und die stets bereitwillige Unterstützung bei den mannigfachen sich entgegenstellenden Schwierigkeiten.

Berlin, Physik. Inst. d. techn. Hochschule, Juni 1905.

1) A. Righi, Sulla forza elektromotrice del Selenio. — Padova. Tip. del Seminario 1888.

(Eingegangen 19. Oktober 1905.)

10. *Selbstgegenfritter (Autoantikohärer); von P. Lohberg.*

Meine Bemühungen seit 1901 ein elektrisches, selbsttätiges, die Anwendung eines Klopferapparates entbehrlich machendes Organ zur Wahrnehmung elektrischer Wellen, und zwar einen Selbstgegenfritter, sog. Autoantikohärer herzustellen, dessen Empfindlichkeit nach Willkür geregelt werden kann, sind von Erfolg begleitet. Meine bisherige Zurückhaltung (abgesehen von der Patentschrift Nr. 140340, Klasse 21a vom 28. XI. 1901 ab, und einem kleinen Bericht im Mechaniker Nr. 20. 1904) erklärt sich aus dem Bestreben, den im vorliegenden Wellendetektor sich abspielenden Vorgang (1. frittendes, 2. entfrittendes und 3. regenerierendes Moment) einwandsfrei zu erklären, ferner durch Benutzung von Vakuumzellen auch einen regulierbaren, sog. trockenen Autoantikohärer von „unbeschränkter“ Dauer zu schaffen und zur Entscheidung der bezüglich der Schäferschen Platte zwischen Neugschwender und Marx geführten Polemik (Physik. Zeitschr. 1901) einen Beitrag zu liefern. Wenn mir dies auch nicht in allen Stücken gelungen — was den letzteren Punkt betrifft, so wird hervorgehoben, daß die Wirksamkeit der Vakuumautoantikohärer, vorausgesetzt, daß von den Elektroden und den abgelösten Teilen jede Dampf- oder Gasspur entfernt ist, auf anderen Gesetzen beruht als die hier in Frage kommenden Flüssigkeitsantikohärer — so sei es doch gestattet von den zahlreichen, von mir getroffenen Anordnungen, die, abgesehen von der willkürlichen Regelung des Elektrodenabstandes, dadurch gekennzeichnet sind, daß Elektrizitätsleiter in fein zerteiltem Zustande, wie Feilspäne, Grat, Pulver irgendwelcher Art etc., in dünne Flüssigkeitshäutchen von geringer Ausdehnung (destilliertes Wasser, Glyzerin, Öl etc.) eingebettet werden, eine Form zu beschreiben, die sehr schnell auf Wellenstöße antwortet und dem 1903 bekannt gewordenen Responder des Amerikaners De Forest am meisten verwandt zu sein scheint.

Einem Hartgummizylinder ist eine aus einem Einmarkstück hergestellte Platte (Anode) aufgelagert, die in der Mitte

etwas erhöht und rings um die Erhöhung mit einer Aussparung versehen ist. Auf der Erhöhung wird ein aus einem dielektrischen Stoff gefertigtes Gitter, etwa ein Seidengewebe, befestigt, und dieses mit käuflichem Glyzerin durch Bestreichen mit einer in jene Flüssigkeit getauchten Feder getränkt. Dieses Gitter wird mit photographischem Papier, etwa Chlorsilberzelloidinpapier, die Schichtseite der Anode zugewandt, überdeckt und letzteres am Rande (durch einen Gummiring) gespannt.

Parallel zur mit der Wasser- oder Gasleitung verbundenen Anodenplatte ist die Grundplatte eines vermittelst Schraubenmikrometers der Höhe nach verstellbaren Tauchkolbens gelagert, und an der Grundplatte sind nahe am Umfang Grammophonspitzen (Kathodenspitzen) angebracht.

Dieses Kathodensystem ist in ein zylindrisches Schutzgehäuse aus Hartgummi eingeschlossen, auf dessen Deckfläche das Schraubenmikrometer befestigt ist. Die beiden, mit Gewinde ausgestatteten Ebonitzylinder werden zu einem Ganzen vereinigt.

Diese Zellenanordnung wird mit einer geringen elektromotorischen Kraft (etwa 1,5 Volt), einem Rheostaten, einem Vertikalgalvanometer und einem Hufeisentelephon in Reihe geschaltet. Vermittelst des Schraubenmikrometers werden die Kathodenspitzen durch das Zelloidin mit den strahlenempfindlichen Teilchen und die Flüssigkeitshäutchen hindurch gegen die Anode gedrückt und langsam zurückgezogen, so daß sich unter Einwirkung des Lokalgleichstroms, so zu sagen, Einzelfritter bilden, die Galvanometernadel ausschlägt und die Telephonmembran angezogen wird. Wesentlich ist dabei, daß die feinen Leiterteilchen nicht zum Stromschluß gezwungen werden, sondern daß ihnen eine gewisse Freiheit gewahrt bleibt, bis sie (öfters nach einigem Widerstreben, je nach der Natur des verwendeten flüssigen Mittels) dem Zwange sich fügen, während sie durch Hertzsche Wellen von dem Zwange wieder befreit werden. Ist der Widerstand der verwendeten Flüssigkeit sehr groß, so ist es zweckmäßig den Strom zur Lockerung der Emulsionsschicht mehrfach zu unterbrechen (Wirkung der Selbstinduktion) oder den Funkenstrom eines kleinen Oszillators durchgehen zu lassen.

Wirken auf diese parallel geschalteten, fertigen Einzel-

fritter durch Zustrahlung oder Zuleitung längs eines Drahtes Hertzsche Wellen ein, so geht die Nadel zurück, das Telephon spricht laut an. Hört die Bestrahlung auf, so geht die Nadel wieder vor, nimmt die Anfangsstellung wieder ein, das Telephon verstummt.

Durch angemessene Regelung des Elektrodenabstandes kann die Empfindlichkeit soweit gesteigert werden, daß die Rückkehr zum Anfangszustand augenblicklich erfolgt, der Empfänger also für rasche Zeichenübermittelung, zum Abhören der Morsezeichen mit dem Fernhörer oder Klopfer geeignet wird. Die Galvanometernadel kann dabei ganz ausgeschaltet werden.

Als Wellensender wurde ein einfacher Oszillator benutzt, der aus einer größeren, isolierten, mit einem Zustrahlungsdraht versehenen Kugel und zwei zu beiden Seiten derselben befindlichen, kleineren Kugeln besteht, die mit der Sekundärspule eines Ruhmkorff verbunden sind, oder eine Influenzmaschine, bei welcher der Außenbelag der einen Leydener Flasche durch einen isolierten Draht mit einem größeren Metallkörper in Verbindung steht. Schon der Influenzfunke eines der Kathodenantenne genäherten, geriebenen Hartgummistabes oder das Funkenspiel eines elektrischen Gasanzünders genügten zur Entfrittung.

Hört die dekohärierende Wirkung, auch bei Veränderung des Elektrodenabstandes, bez. erneuter Loslösung von Anodenteilchen auf, so fehlt es vor allem an geeigneter Flüssigkeit an den wirksamen Stellen. Diesem Übelstand wird dadurch abgeholfen, daß die Aussparung der Anodenplatte konzentrisch durchbrochen und dieser Hohlraum mit einem nach außen führenden, abgepaßten, mit geeigneter Flüssigkeit gefüllten kommunizierenden Rohr verbunden ist, so daß der Flüssigkeitsverbrauch im Innern von außen durch Zurückziehen der Kathodenspitzen gedeckt werden kann, oder dadurch, daß die Zellen neu formiert werden.

Auch gestattet oben beschriebene Anordnung zur Ausnutzung anderer Anodenstellen und anderen Zellinhalts eine Drehung der Kathodengrundplatte vorzunehmen, was bei Verwendung etwa einer Kathodenspitze von Vorteil ist.

Eine einwandsfreie Erklärung von dem in dem Autoantikohärer sich abspielenden Vorgängen, insbesondere von dem

automatischen, regenerierenden Moment zu geben, ist mir, wie schon hervorgehoben, nicht möglich.

Daß ich gelegentlich beim Eintauchen von Anodenspitzen in dünne, sog. dielektrische Flüssigkeitsschichten, ohne die Kathodenplatte zu berühren, als Antwort auf Wellenimpulse den 1903 von Schlömilch und Fessenden veröffentlichten Effekt beobachtete — sicher durch elektrolytische Beimengungen, also Polarisation, bedingt —, mag nicht unerwähnt bleiben; doch kann vorliegender Wellenanzeiger nicht als eine bloße Variante von Schlömilchs Detektor bezeichnet werden, da letzterer nach Rothmund und Lessing[1]), wenn der Spitze das negative Vorzeichen gegeben wird, bei Reizung durch elektrische Wellen, selbst unter Verwendung kleinerer Spannungen, eine, wenn auch schwache Verstärkung des Stromes anzeigt.

Meines Erachtens handelt es sich bei sog. nassen Autoantikohärern:

1. um den Aufbau von zarten metallischen Brücken und um durch Ohm-, vielleicht auch bei Verwendung von Elektroden aus verschiedenen Metallen um durch Peltier-Wärme veranlaßte Bildung von feinen Dampf- bez. Gasbläschen in der mikroskopischen Umgebung der Kathodenspitze und Ionisation der Molekel derselben durch losgelöste positive Metallionen, so daß labile chemische Verbindungen entstehen (frittendes Moment);

2. um Freiwerden von Bestandteilen dieser Verbindungen bei Auflagerung elektrischer Wellen — Sauerstoff wandert rasch nach der Anode, um sich mit dieser zu verbinden, Wasserstoff hemmt nicht nur die Leitung, sondern übt auch einen Druck auf die Enden der zarten Metallstege aus, so daß diese, vom Zwang befreit, sich zur Seite neigen — ferner auch um gleichzeitiges Freiwerden von Energie in Form von Wärme und damit Verstärkung der elektromotorischen Kraft des von der Kathode zur Anode fließenden Thermostroms (entfrittendes Moment) und

3. um Entweichen bez. Depolarisation des sich ausbreitenden, isolierenden Wasserstoffs, um frische Brückenbildung und erneute Dissoziation der durch den Gleichstrom bedingten Dampf- bez. Gasbläschen (regenerierendes Moment).

---

1) Vgl. V. Rothmund u. A. Lessing, Ann. d. Phys. **15.** p. 193. 1904.

Der springende Punkt bei diesem Erklärungsversuch ist die Annahme, daß durch elektrische Wellen hoher Frequenz Elektrolyse, Zerfall labiler Verbindungen hervorgebracht wird. Bedenkt man, daß chemische Wirkungen infolge eines etwa durch luftfreies, destilliertes Wasser geschickten Entladungsstromes schon seit langer Zeit nachgewiesen sind[1]) und daß schon der Öffnungsextrastrom derartige Wirkungen hervorzurufen imstande ist, so gewinnt jene Annahme an großer Wahrscheinlichkeit; ich möchte sagen, sie kann a priori zur Tatsache gestempelt werden. Daher ist auch erklärlich, daß die Natur des verwendeten dielektrischen Gitters eine Rolle spielt; enthält dessen Gerüst, gleichgültig ob durch die Art der Herstellung oder durch nachträgliche Behandlung Spuren von Stoffen, die fähig sind, Wasserstoff im Entstehungszustande aufzunehmen, so kann auch ohne Verwendung von Chlorsilberzelloidinpapier rasche Selbstgegenfritterwirkung erzielt werden, wenn man nur dafür Sorge trägt, z. B. durch Druck der Kathodenspitzen gegen die Anode und langsames Zurückziehen derselben[2]), daß in die Flüssigkeitshäutchen Leiterteilchen eingebettet sind.

Schon 1899 soll Aschkinass die Wirkung des bekannten Neugschwenderschen Silberspiegelschlitzes durch Wellenelektrolyse erklärt haben. Wasserdampf dissoziiert sich in regelmäßiger Weise und rekonstruiert sich wieder, falls überhaupt die für die Bildung von Häutchen notwendigen Bedingungen erfüllt sind; ist dies nicht der Fall, so tritt, namentlich bei starker Bestrahlung, Lodgeeffekt, damit Kohärernadelausschlag ein, wie ihn auch Bornemanns[3]) Kontakt (Bleikathodenspitze gegen stark erhitzte, dann abgekühlte Kupferanodenfläche) nach kurzer Betriebsdauer zeigt. Der Vorgang in dem Dampf- bez. Gashäutchen ist nicht ein eigentlich elektrolytischer.[4])

Auch das Ansprechen von Tommasinas[5]) Elektroradiophon, bei dem ein teigiges Gemenge aus Glyzerin (allein oder mit

1) Vgl. Müller-Pouillet III. 9. Aufl. p. 294.
2) Th. Sundorph, Ann. d. Phys. **10.** p. 189. 1903.
3) K. Bornemann, Beibl. **28.** p. 163. 1904.
4) K. Klüpfel, Ann. d. Phys. **16.** p. 574. 1905.
5) Th. Tommasina, Compt. rend. **2.** 1901; Physik. Ztschr. **2.** 1901.

Vaselin gemischt), Feilspänen und isolierendem Pulver zwischen zwei kleinen flachen, aus Platindrähten gewickelten Spiralen gebracht wird, ist jenem Welleneffekt zuzuschreiben. Auf gleiche Ursache führt De Forest[1]) die Funktion seines Responders zurück, bei dem die Zwischenräume zwischen 1,6 mm voneinander abstehenden Metallelektroden von je 3,2 mm Durchmesser mit einem Gemisch angefüllt sind, das aus Glyzerin oder Vaselin mit einer Spur von Wasser oder Alkohol, aus Feilspänen und einem Depolarisationsmittel z. B. Bleioxyd besteht. Seiner Erklärungsweise fügt De Forest in einer späteren Abhandlung (Electrician vom 4. Nov. 1904) die bemerkenswerten Worte hinzu:

„The electrolysis due to the combined action of the Hertzian and local currents demonstrate several features new to the generally accepted ideas of electrolysis action and open up lines of speculation and research of unusual interest to the physicist."

Zum Schluß sei betont, daß es gelingen muß, einen empfindlichen, wellenelektrolytischen Apparat zu schaffen, der Wellenimpulse unmittelbar aufzeichnet. Der Amerikaner Kittsee hat schon 1900 diese Aufgabe dadurch zu lösen versucht, daß er eine mit Antenne verbundene Metallspitze einen chemisch präparierten Papierstreifen (Polreagenzpapier) berühren ließ, der unter ihr durch Vermittelung eines mit der Erde verbundenen Metallzylinders vorwärts bewegt wird;[2]) meines Erachtens muß aber erst vor Einwirkung der Hertzschen Wellen die verwendete chemische Verbindung in sog. labilen Zustand versetzt werden, wenn eine rasche Übersetzung der von der Sendestation ausgehenden Zeichen von kürzerer oder längerer Dauer in Punkte oder Striche erfolgen soll.

1) De Forest, Electrical World and Engineer vom 11. April 1903; Elektrotechn. Zeitschr. vom 13. August 1903.

2) A. Righi-Dessau, Die Telegraphie ohne Draht. p. 362.

(Eingegangen 7. November 1905.)

11. *Über das Haften von heißem Holzkohlepulver an kalten Körpern; von G. Tammann.*

Taucht man in heißes, ausgeglühtes Holzkohlepulver, welches wenig okkludierte Gase enthält, einen Glasstab von Zimmertemperatur, so bedeckt sich derselbe, soweit er in das Pulver eingetaucht wurde, mit einer Schicht Pulver, deren Dicke mit der Temperaturdifferenz zwischen Stab und Holzkohlepulver wächst. Läßt man den Stab die Temperatur des Pulvers annehmen, indem man das Pulver einige Zeit mit dem Stabe umrührt, so bleibt fast nichts am Stabe haften. Zieht man den Stab gleich nach dem Eintauchen aus dem heißen Pulver heraus, so haftet das Holzkohlepulver am Stabe nur so lange, als zwischen dem Pulver und dem Stabe eine genügende Temperaturdifferenz existiert. Wenn diese sich nach kurzem Verweilen des mit Holzkohlepulver bedeckten Stabes an der Luft verkleinert hat, so fällt das Kohlepulver plötzlich vom Stabe ab.

Die Erscheinung ist von der Natur des kalten Körpers unabhängig. An Stäben und Drähten aus Platin, Kupfer, Eisen, Messing, Glas und Kohle haften bei gleicher Temperaturdifferenz zwischen dem kalten Körper und dem warmen Holzkohlepulver und bei gleichen Dimensionen der kalten Körper ungefähr gleiche Mengen des Holzkohlepulvers. Dagegen ist die Erscheinung nur auf einen pulverförmigen Körper, nämlich Holzkohle, beschränkt. Allerdings bleibt, wenn man in gefälltes, geglühtes und pulverisiertes Kieselsäureanhydrid einen kalten Stab taucht, beim Herausziehen desselben etwas Pulver an einzelnen Stellen des Stabes haften, aber bei der Abkühlung lösen sich diese Klümpchen nicht wie die Kohleteilchen vom Stabe. Während das Holzkohlepulver den kalten Körper gleichmäßig überzieht und an demselben nur so lange haftet, als eine hinreichende Temperaturdifferenz zwischen Stab und Pulver besteht, haftet das Kieselsäurepulver nur lokal und die Ursache seines Haftens scheint von der Temperaturdifferenz

zwischen kaltem Körper und Pulver unabhängig zu sein. Die bei der Kieselsäure beobachtete Erscheinung trat auch bei Eisenoxyd- und Chromoxydpulver, allerdings in erheblich abgeschwächtem Maße, auf. Keinerlei Wechselwirkung zwischen dem kalten Körper und dem heißen Pulver wurde bei Kupferoxyd, Kaliumkarbonat und Graphitpulver bemerkt. Von allen geprüften Kohlenstoffarten, verschiedenen Präparaten, Retorten-Bogenlichtkohle, Graphit und Holzkohle, trat die Erscheinung des Haftens nur bei der Holzkohle auf. Ein Unterschied zwischen Fichten- und Lindenholzkohle war nicht zu bemerken.

Die Intensität der Anziehung zwischen heißem Holzkohlepulver und einem Glasstab von Zimmertemperatur in Abhängigkeit von ihrer Temperaturdifferenz erlauben folgende Versuche zu beurteilen. An einem Glasstabe von 5 mm Durchmesser blieben beim Eintauchen in Lindenholzkohlepulver bei den unten angegebenen Temperaturen folgende Gewichtsmengen Kohlepulver an je 1 qcm Oberfläche hängen und fielen während der Abkühlung des Pulvers vom Stabe ab.

Temperatur des Holzkohlepulvers	Menge des Pulvers pro 1 qcm Oberfläche
200°	sehr wenig
300	0,010 g
450	0,035
600	0,032

Beim letzten Versuche ist, trotz höherer Temperatur des Kohlepulvers, eine etwas geringere Menge haften geblieben. Doch lehrt der Augenschein, daß mit weiter steigender Temperatur des Pulvers die haftende Menge wächst. So kann man mit einem Platindraht oder Glasstabe durch mehrmaliges Eintauchen in Holzkohlepulver, das im Porzellanrohr auf 1400° erhitzt ist, fast die ganze Menge des Pulvers aus dem Porzellanrohr herausziehen.

Die Menge, welche an einem Stabe aus Dochtkohle bei einer Pulvertemperatur von 950° hängen blieb, betrug ebenfalls 0,035 g pro 1 qcm. Es scheint also die Menge des haftenbleibenden Pulvers von der Natur des kalten Körpers wenig beeinflußt zu werden. Dagegen scheinen die Dimensionen des kalten Körpers in ziemlich verwickelter Weise die Menge des

haftenden Pulvers zu beeinflussen. Drei Glasstäbe von 0,7, 0,45 und 0,3 cm Durchmesser wurden je 3,0 cm tief in schwachglühendes Holzkohlepulver getaucht, es blieben an den drei Stäben 0,296, 0,241 und 0,125 g Pulver hängen. Man kann weder sagen, daß die Menge des Pulvers proportional der Masse noch der Oberfläche des kalten Körpers zunimmt. Die pro 1 qcm haften gebliebenen Mengen betragen 0,042, 0,057 und 0,044 g. Mit abnehmender Dicke des Stabes wächst also zuerst die Menge und nimmt dann ab.

Auf eine elektrische Anziehung kann die Anziehung zwischem heißem Pulver und kaltem Körper nicht zurückgeführt werden, denn am Haften des Holzkohlepulvers wird nichts geändert, ob der Stab aus einem Isolator (Glas) oder einem mit der Erde verbundenen Leiter (einem Kupferdraht) besteht.

Taucht man einen heißen Körper in kaltes Holzkohlepulver, welches sich mit Gasen beladen hat, so wird das Pulver durch die sich entwickelnden okkludierten Gase aufgewirbelt. Ist das Holzkohlepulver frei von Gasen, so ist auch ein heißerer Körper, der in dasselbe eingeführt wird, ohne Wirkung auf das Pulver. Da die Entwickelung von Gasen aus dem Pulver durch Einführung eines heißen Körpers eine Abstoßung zwischen kaltem Pulver und heißem Körper hervorzubringen scheint, so lag die Vermutung, daß im umgekehrten Falle die Anziehung zwischen dem kalten Körper und dem heißen Pulver ebenfalls auf einen Gasstrom zurückzuführen ist, nahe. Durch die Okklusion von Gasen im erkaltenden Pulver würde sich ein Gasstrom ausbilden, welcher das Pulver an den kalten Körper drückt. Für diese Auffassung spricht vor allem der Umstand, daß die Erscheinung nur bei demjenigen Pulver, welches die größten Gasmengen absorbiert, auftritt. Andererseits könnte die Tatsache, daß glühendes Kohlepulver, welches keine Gase okkludiert, ebenfalls stark angezogen wird, gegen jene Auffassung vorgebracht werden. Da dieser Einwand nicht gut ganz zurückzuweisen ist, so wurde ein Versuch angestellt, der zur Entscheidung unserer Frage führen mußte.

Man darf wohl erwarten, daß, wenn die fragliche Anziehung durch einen Gasstrom verursacht wird, dieselbe mit dem Druck der umgebenden Luft stark abnehmen wird, da

erstens die Menge der Luft, welche vom Holzkohlepulver okkludiert wird, mit abnehmendem Druck abnimmt und da zweitens die lebendige Kraft des Gasstromes ebenfalls abnimmt.

Führt man in ein Glasrohr von etwa 20 mm Durchmesser, auf dessen Boden Holzkohlepulver liegt, durch ein engeres zentral angeschmolzenes Rohr einen Glas- oder Metallstab, der mit diesem Rohr durch ein Stückchen Kautschukschlauch verbunden ist, so kann man durch Verschiebung des Stabes im Schlauch das Ende des Stabes in das erhitzte Pulver tauchen und aus demselben wieder in die oberen kalten Teile des Glasrohres ziehen, wobei der Druck der Luft im evakuierten Rohre sich nicht merklich ändert. Es ergab sich bei dieser Versuchsanordnung, daß bis zu einem Druck von 0,5 mm der Luft im Rohr die Erscheinung des Haftens des Holzkohlepulvers am kalten Körper, dem Augenschein nach zu urteilen, sich nicht änderte.

Hieraus muß man wohl schließen, daß die Anziehung zwischen einem kalten Körper und heißem Kohlepulver nicht durch einen Gasstrom verursacht wird. Es würde dann, so weit ich hier sehen kann, wohl nur die Annahme eines Kraftfeldes besonderer Art, welches mit der Temperaturdifferenz zwischen dem Holzkohlepulver und dem kälteren Körper verschwindet, übrig bleiben.

Göttingen, Institut für anorganische Chemie.

(Eingegangen 12. November 1905.)

12. *Über einen neuen Kitt für physikalische Apparate; von B. Walter.*

Die Bedeutung des Siegellacks für die Zusammensetzung provisorischer physikalischer Apparate ist schon beinahe sprichwörtlich geworden. Nichtsdestoweniger hat aber doch diese Substanz ihre Schattenseiten. In erster Linie gehört dazu die Eigenschaft, daß sie bei gewöhnlicher Temperatur schon recht spröde ist, so daß sie beispielsweise von einer polierten Glasplatte, auf die sie in heißem Zustande aufgebracht ist, nach dem Erkalten meist schon von selbst abspringt. Ein weiterer Übelstand des Siegellacks ist der, daß sein Schmelzpunkt schon verhältnismäßig hoch liegt, so daß die in Frage kommenden, oft recht kostbaren Gegenstände sowohl beim Auf- wie beim Abkitten häufig in bedenklich hohem Grade der Gefahr des Zerspringens ausgesetzt sind.

Aus diesen Gründen dürfte es angezeigt sein, die Aufmerksamkeit der Physiker auf einen Kittstoff zu lenken, der die genannten Nachteile nicht hat und dabei doch eine so ausgezeichnete Klebkraft besitzt, daß er für die Zusammensetzung physikalischer Apparate oft geradezu als eine ideale Substanz bezeichnet werden muß. Es ist dies ein von der New York-Hamburger Gummiwaren-Kompagnie hierselbst hergestellter Stoff, den ich schon vor einigen Jahren zur Anstellung exakter elektrischer Durchschlagsversuche benutzt und daselbst seiner großen Klebkraft sowie seiner pechschwarzen Farbe halber als *Piceïn* (pix, picis das Pech) bezeichnet habe.[1]) Derselbe ist mir nun aber auch inzwischen für eine große Reihe anderer physikalischer Zwecke, vor allem für die Zusammensetzung gas- und flüssigkeitsdichter Apparate geradezu unentbehrlich geworden, so daß ich daher seine Eigenschaften hier noch etwas ausführlicher besprechen möchte.

1) B. Walter, „Ein Verfahren zur Bestimmung der elektrischen Durchschlagsfestigkeit hochisolierender Substanzen.“ Elektrotechn. Zeitschrift 24. p. 796. 1903.

Das Piceïn schmilzt bei etwa 80° C., zeigt aber doch bei gewöhnlicher Temperatur noch genügende Festigkeit und Klebkraft, um selbst schwerere Apparate bei verhältnismäßig kleinen Kittflächen fest miteinander zu verbinden. Ferner ist es auch bei Zimmertemperatur noch genügend plastisch, so daß es selbst bei Stoffen von ungleichem Ausdehnungskoeffizienten keine Neigung zum Abspringen zeigt. Daher stellt es denn auch u. a. einen ausgezeichneten Kitt für Glas auf Metall dar. Gerade hierbei ist nun aber der niedrige Schmelzpunkt der Substanz von großem Vorteil, da man deswegen die Gegenstände beim Auf- und Abkitten nur ganz leicht anzuwärmen hat und sie auch einfach mit den Händen voneinander trennen kann, ohne sich die Finger zu verbrennen, alles Umstände, die für die Sicherheit des Arbeitens von großer Bedeutung sind. Als Beispiel sei erwähnt, daß ich eine größere, 8 mm dicke *Quarzplatte*, die an der einen Ecke einen deutlichen Sprung zeigt, schon mehrfach gasdicht auf Metallgefäße aufgekittet habe, ohne daß der Sprung weiter gegangen wäre.

Das Piceïn ist in Wasser gar nicht, in Alkohol erst nach tagelangem Verweilen — und auch dann nur spurenweise — löslich, so daß dasselbe daher auch mit Vorteil als Kittsubstanz für Gefäße verwandt werden kann, die zugleich für wässerige wie für alkoholische Lösungen dienen sollen (z. B. Absorptionsgefäße). Andererseits löst sich das Piceïn wieder sehr leicht in Benzin sowie auch in Terpentinöl, so daß man daher in diesen Flüssigkeiten ein Mittel hat, um die letzten Reste des so ausgezeichnet haftenden Stoffes von den damit beschmierten Gegenständen oder Fingern zu entfernen. Was übrigens den letzteren Punkt angeht, so ist es ratsam, das Piceïn beim Arbeiten nicht mit den Fingern anzufassen, sondern ein größeres längliches Stück davon an einer der Schmalseiten auf einen Pfriem zu stecken und dann beim Kitten das andere Ende des Stückes nach Bedarf an eine klein gedrehte Flamme zu halten, um die Substanz zum Fließen zu bringen. Daß, um ein gutes Haften eines Kittes zu bewirken, die *beiden* zu verkittenden Flächen zum mindesten auf den Schmelzpunkt der Kittsubstanz erhitzt sein müssen, brauche ich wohl nicht noch besonders hervorzuheben. Am sichersten geschieht dies nun jedenfalls in der Weise, daß man die zu verkittenden Gegenstände *in ihrer*

ganzen Ausdehnung auf diese Temperatur bringt, was beim Piceïn verhältnismäßig leicht und meistens schon dadurch zu bewerkstelligen ist, daß man die Gegenstände auf eine größere Metallplatte stellt und diese dann von unten her mit einem Bunsenbrenner erwärmt. Ratsam ist es aber immerhin, das auf die warmen Kittflächen aufgetragene Piceïn vor dem Zusammenbringen derselben noch mit dem Brenner selbst vollkommen zu verflüssigen.

Hamburg, Physik. Staatslaboratorium, im Okt. 1905.

(Eingegangen 18. Oktober 1905.)

13. *Über das Nachleuchten der Luft bei Blitzschlägen; von B. Walter.*

(Hierzu Taf. VII, Figg. 1 u. 2.)

Vor einiger Zeit hat Hr. Em. Touchet[1]) die Ansicht ausgesprochen, daß das schwächere Nachleuchten, welches häufig im Anschluß an die Hauptentladung eines Blitzschlages in der Bahnlinie desselben auftritt, als ein *Nachglühen* der in Frage kommenden Luftteilchen aufzufassen sei. Dem gegenüber neigt Hr. K. E. F. Schmidt[2]) in einer kürzlich veröffentlichten Abhandlung über die Leuchtdauer der Blitze der Ansicht zu, daß wir es bei der in Rede stehenden Erscheinung mit einem *phosphoreszenzartigen* Nachleuchten der fraglichen Luftteilchen zu tun haben.

Nach meinem Dafürhalten ist nun jedoch das Phänomen weder auf die eine noch auf die andere Weise zu erklären, sondern es wird vielmehr das fragliche Nachleuchten in allen Fällen durch ein wirkliches *Nachströmen von Elektrizität* in die durch die Hauptentladung gebildete Blitzbahn veranlaßt, wie ich denn auch diese Erscheinung in meiner ausführlichen Abhandlung „Über die Entstehungsweise des Blitzes“ [3]) ausdrücklich als „*Nachentladung*“ bezeichnet und auch mehrfach ausführlich als solche erörtert habe. Da nun aber die fragliche Erscheinung besonders für die Theorie der Entstehung und des Abflusses der Wolkenelektrizität nach dieser letzteren Auffassung offenbar ein erheblich größeres Interesse gewinnt als nach den beiden zuerst erwähnten Erklärungen, so dürfte es gerechtfertigt sein, wenn ich hier jene Anschauungen zu widerlegen, die meinige aber nach Möglichkeit zu stützen suche.

In ersterer Beziehung habe ich nun zunächst darauf hinzuweisen, daß sich bei meinen überaus zahlreichen photographisch-analytischen Aufnahmen *künstlicher Induktionsfunken*

1) Em. Touchet, Compt. rend. **140**. p. 1031. 1905.

2) K. E. F. Schmidt, Elektrotechn. Zeitschr. **26**. p. 903. 1905.

3) B. Walter, Jahrbuch der Hamb. Wiss. Anst. **20**. (3) p. 1. 1903 (vgl. auch diese Annalen **10**. p. 393. 1903).

niemals ein Anzeichen dafür ergeben hat, daß dabei ein solches Nachglühen oder phosphoreszenzartiges Nachleuchten der Luft stattfindet, obgleich ich oftmals sehr starke Entladungen großer Leydener Batterien aus allernächster Nähe mit einem sehr lichtstarken Objektiv und auf sehr schnell bewegter photographischer Platte analysiert habe. Im übrigen müßte aber auch ein solches Nachleuchten der Luft in der Bahn eines elektrischen Funkens offenbar die Beobachtung und photographische Wiedergabe der darin stattfindenden, oft so außerordentlich kurzdauernden *elektrischen Schwingungen* geradezu unmöglich machen, während doch schon Feddersen gezeigt hat, daß man einen solchen Vorgang auf diese Weise selbst bis zu ein milliontel Sekunde Schwingungsdauer hinab sehr deutlich zur Darstellung bringen kann.[1]) Ein eventuelles Nachglühen oder Phosphoreszieren der Luft müßte demnach in diesen Fällen schon in weniger als ein milliontel Sekunde erloschen sein.

Man kann nun freilich sagen, daß es sich bei *Blitzschlägen* um ganz außerordentlich viel stärkere Ströme und demnach auch um eine entsprechend stärkere Erregung der Luft handelt als bei den künstlichen Funken; daß jedoch auch in der Blitzbahn kein Nachglühen oder Phosphoreszieren der Luftteilchen stattfindet, ergibt sich meines Erachtens zunächst schon daraus, daß das Nachleuchten hier durchaus nicht, wie man es doch nach diesen Auffassungen erwarten müßte, um so stärker auftritt und von um so längerer Dauer ist, je stärker der ihm voraufgegangene Hauptschlag selbst war. Als ein in dieser Beziehung besonders überzeugendes Beispiel sei hier in der Fig. 1, Taf. VII eine meiner mit durch Uhrwerk bewegter Kamera erhaltenen Blitzaufnahmen reproduziert, welche zwei, nahezu in demselben Augenblick niedergegangene, also auf derselben Platte und mit derselben Objektivöffnung aufgenommene Blitzschläge zeigt, von denen der rechte, so sehr viel stärkere gar kein, der schwächere linke dagegen ein relativ sehr starkes und auch relativ sehr lange — etwa 0,15 Sekunden — anhaltendes Nachleuchten zeigt.

Weiter steht aber auch die ganze Art des *Verlaufes* dieses Nachleuchtens mit den beiden, von Hrn. Touchet bez. Hrn.

1) Rein photographische Reproduktionen derartiger Aufnahmen findet man in meiner, in der Boltzmann-Festschrift p. 647. 1904 erschienenen Abhandlung.

Schmidt vertretenen Auffassungen im Widerspruch; denn sowohl bei einem Nachglühen wie auch bei einem phosphoreszenzartigen Nachleuchten der Luft müßte offenbar die Erscheinung stets vom Augenblicke der Hauptentladung an mit der Zeit ganz allmählich abklingen und dürfte nicht, wie es hier der Fall ist, ein mehrfaches Auf- und Abwogen der Intensität, geschweige denn das momentane Aufflackern — 0,094 Sekunden nach dem Anfangsschlage — sowie die sich unmittelbar daran anschließende, zeitweilige Unterbrechung der Erscheinung zeigen.[1]

Als letzten, meines Erachtens aber wichtigsten und lehrreichsten Beweis gegen die Unrichtigkeit der hier zu widerlegenden Erklärungen der in Rede stehenden Erscheinung habe ich sodann noch die besonders deutlich in der Fig. 2 der Tafel VII zutage tretenden Tatsache anzuführen, daß das fragliche Nachleuchten *oft gar nicht im unmittelbaren Anschluß* an die Hauptentladung, sondern *erst nach einer kleinen Pause* eintritt, die in unserem Falle 0,014 Sekunden gewährt hat.[2] Eine solche Pause ist nun nach den erwähnten Auffassungen natürlich nicht zu verstehen, nach der meinigen dagegen offenbar so zu erklären, daß die Ladung der Gewitterwolke durch die Hauptenladung selbst so stark *erschöpft* wurde, daß die Nachentladung erst einige Augenblicke später eintreten konnte.

Auch bei dem a. a. O. in diesen Annalen in den Figg. 1 und 2 der Tafel abgebildeten Blitzschlag zeigt sich im Anschluß an die zur Erde gehende Hauptentladung desselben

---

1) Über den stärkeren Blitz dieser Aufnahme sei hier nur soviel gesagt, daß er zwar zum Teil über den Rand der Platte hinweg gefallen ist, daß aber auch er dennoch die Entstehungsweise des Blitzes, wie ich sie an der Hand anderer Aufnahmen in Bd. 10 dieser Annalen ausführlich beschrieben habe, vollkommen deutlich zeigt. Übrigens stellt auch Fig. 1 das zweite Blitzpaar dar, das a. a. O. auf p. 404 unten erwähnt wurde.

2) Die Erscheinung zeigt sich am deutlichsten an denjenigen Teilen der Blitzbahn, welche möglichst *vertikal* verlaufen, da bei längerem *horizontalen* Verlauf dieser Bahn sich auf der ebenfalls in horizontaler Bewegung befindlichen photographischen Platte natürlich stets die Bilder einer größeren Zahl leuchtender Punkte überdeckt haben. Auf diese letztere Ursache sind übrigens auch die vielen *horizontalen* hellen Linien in der Nachentladung dieser Aufnahme zurückzuführen, die demnach nicht etwa durch lokale Anschwellungen der Leuchtstärke zu erklären sind.

deutlich eine solche Erschöpfungspause; und endlich kann man dieselbe auch sogar noch besonders deutlich an dem schwachen Nebenblitze auf der linken Seite der Fig. 3 daselbst erkennen. In diesem Falle hat allerdings jene Pause nur ungefähr 0,07 Sekunden, d. h. also nur halb so lange gedauert als bei der Entladung der jetzigen Fig. 2. Die Kenntnis dieser Zeiträume ist jedenfalls für das Verständnis der Art der Neubildung und der Fortleitung der Elektrizität in der Gewitterwolke von ziemlicher Bedeutung.

Was aber endlich den *Grund* der Tatsache angeht, daß sehr starke Blitze oftmals keine, viel schwächere dagegen eine verhältnismäßig langdauernde Nachentladung zeigen, so ist derselbe nach meinem Dafürhalten in der Hauptsache darin zu suchen, daß im ersteren Falle die elektrische Kapazität der Wolke eine größere war als im letzteren. Es bestehen nämlich auch die Entladungen eines nicht zu großen Induktionsapparates bei passender Einregulierung des primären Stromes in der Regel aus einem stark leuchtenden Anfangsfunken mit darauf folgender, schwächer leuchtender Nachentladung; man kann jedoch auch hier an Stelle dieser Entladungsart sehr leicht diejenige des anderen Typus der Blitzschläge, d. h. also einen oder mehrere sehr schroff abgesetzte Funken *ohne Nachentladung* erhalten, wenn man die Pole des Induktors mit den Belägen einer kleiner Leydener Flasche verbindet. Bei den sehr großen Induktionsapparaten mit sehr vielen sekundären Windungen ferner bestehen in der Regel auch schon die *gewöhnlichen* Funken des Apparates — also ohne angehängte Kapazität — aus solchen schroff abgesetzten Einzelfunken, weil nämlich in diesem Falle die Sekundärspule des Instrumentes schon für sich allein eine genügend große Kapazität besitzt. In meiner erwähnten ausführlicheren Arbeit „Über die Entstehungsweise des Blitzes“ im Jahrbuch der Hamb. Wiss. Anst. sind beide Arten von Funkenentladungen durch entsprechende Aufnahmen vertreten.

Hamburg, Physik. Staatslaboratorium im Nov. 1905.

(Eingegangen 4. November 1905.)

14. *Berichtigung zu der Arbeit: Die Oberflächenspannung von anorganischen Salzlösungen*[1]; *von Carl Forch.*

Hr. Prof. G. Jäger hatte die Güte, mich auf folgenden Fehler in meiner im Titel erwähnten Arbeit aufmerksam zu machen, der durch einen Schreibfehler während der Berechnung entstanden war.

Es muß für die Oberflächenspannung des reinen Wassers heißen p. 749:

$$\alpha_t = \alpha_0 \{1 - 0{,}001\,926\,95\, t - 0{,}000\,002\,5314\, t^2\}.$$

Dadurch ergibt sich der Temperaturkoeffizient bei 18°

$$\left[\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{d\,\alpha}{d\,t}\right]_{18^0} = -\ 0{,}002\,018.$$

Die Werte der Tab. 2 würden sich im ungünstigsten Falle ändern um 0,0008 mgr/mm, können also ungeändert bleiben. Wohl aber muß es heißen p. 750

$$\alpha_0 = 8{,}053 \text{ mgr/mm}.$$

1) C. Forch, Ann. d. Phys. 17. p. 744. 1905.

(Eingegangen 14. November 1905.)

15. *Zu der Mitteilung von v. Panayeff: Über die Beziehung des Schmelzpunktes zur Wärmeausdehnung der Metalle*[1]; *von C. L. Weber.*

Die erwähnte Beziehung findet sich in Moussons Lehrbuch der Physik, 2. Bd. 3. Aufl. 1880. p. 335 unter der Bezeichnung: „*Gesetz von Raoul Pictet*" in der Form:

$$\left(\frac{m}{D}\right)^{1/3} \alpha\, T = \text{Konst.},$$

wo die einzelnen Größen das Molekulargewicht, die Dichte, den linearen Ausdehnungskoeffizienten und die absolute Schmelztemperatur bezeichnen.

1) J. v. Panayeff, Ann. d. Phys. 18. p. 210. 1905.

(Eingegangen 10. November 1905.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.





F. Sartorius, Göttingen.

Mechanische Werkstätten zu Göttingen und Rauschenwasser.

Waagen und Gewichte

für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke.

═══ **Specialität:** ═══

Analysenwaagen

nur eigener bewährtester Construction.

Man verlange ausdrücklich Original-Sartorius-Waagen, da Nachahmungen in den Handel gebracht werden.



Sartorius' neuer Wärmekasten

zum Brüten von Bacillen und zum Einbetten mikroskopischer Präparate in Paraffin für beliebiges Heizmaterial, unabhängig von Gasleitung, mit vielfach prämiirter Wärmeregulirung.

Patentirt in Deutschland, England, Belgien, Oesterreich-Ungarn etc.

Auf allen beschickten Ausstellungen prämiirt, zuletzt Weltausstellung Brüssel, Diplom d'honneur und Preis 500 Frs., für beste Construction in Feinwaagen.

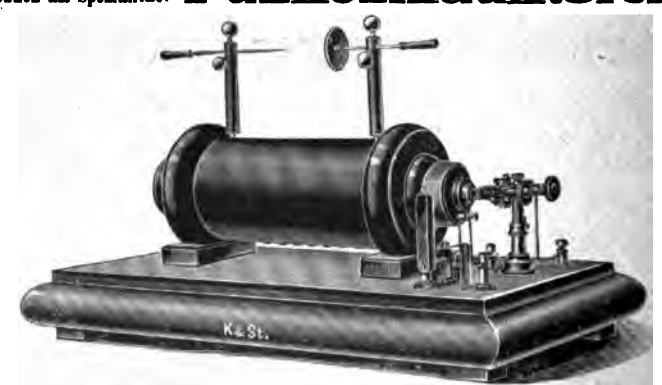
Kataloge in 3 Sprachen gratis und franco.

—— **Vertreter in allen Ländern.** ——

KRÖPLIN & STRECKER,

Hamburg-Altona, am neuen Pferdemarkt

bauen als Spezialität: **Funkeninduktoren**



ferner: **Demonstrationsapparate für Universitäten und Schulen.**
Tesla-Apparate. Röntgen-Apparate. Apparate nach Hertz, Lodge und Lecher.

Stationen für Funken-Telegraphie.

Mefsinstrumente. Zündinduktoren. Technische Artikel für Industrie und Sport.
Funkenvisierung.

Ausarbeitung und Fabrikation von Neuheiten.



Präzisions-Wattmeter, -Voltmeter und -Amperemeter für Wechselstrom. Meßeinrichtungen zur Bestimmung der Induktionskonstanten und des Energieverlustes von Wechselstromapparaten. Präzisionsnormale der Selbstinduktion. Zeiger-, Spiegel- und Panzergalvanometer. Meßbrücken, Kompensationsapparate, Zweigwiderstände, Dekadenwiderstände, Kondensatoren.

1905. **№ 15.**

ANNALEN

DER

PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 18. HEFT 5.

DER GANZEN REIHE 323. BANDES 5. HEFT.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

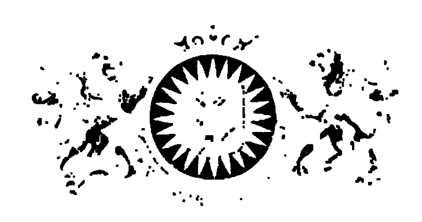
UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1905.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

ROSSPLATZ 17.

Bestellungen [illegible]
Postämtern [illegible]
15 Heften (= 3 Bänden) [illegible]

(Ausgegeben am 28. Dezember 1905.)

Inhalt.

		Seite
1.	G. C. Schmidt. Über Polarisationserscheinungen in Vakuumröhren	869
2.	Gerhard Glage. F. E. Neumanns Methode zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit gut leitender Körper in Stab- und Ringform und ihre Durchführung an Eisen, Stahl, Kupfer, Silber, Blei, Zinn, Zink, Messing, Neusilber	904
3.	Allvar Gullstrand. Über Astigmatismus, Koma und Aberration. (Hierzu Taf. VIII.)	941
4.	Gottlieb Kučera. Über die von den sekundären β- und γ-Strahlen des Radiums in verschiedenen Gasen hervorgebrachte Ionisation	974
5.	W. Wien. Über die Energie der Kathodenstrahlen im Verhältnis zur Energie der Röntgen- und Sekundärstrahlen	991
6.	Max Reinganum. Über Energie und spezifische Wärme in der Nähe der kritischen Temperatur	1008
7.	H. Greinacher. Über eine an dünnen halbleitenden Schichten beobachtete Erscheinung	1020
8.	Johannes Friedel. Experimentelle Untersuchungen über lamellare Doppelbrechung	1031
9.	Max Wien. Über Telephonplatten mit hohen Eigentönen.	1049
10.	W. Holtz. Die wahre Bedeutung der Flügel am Reibzeug der Elektrisiermaschine und ihr Ersatz	1054
11.	W. Holtz. Die Trichterventilröhre beim Wechsel von Druck und Funkenart	1057
12.	Richard Thöldte. Die Bestimmung der galvanischen Polarisation während des Schlusses des Stromes	1061
13.	M. P. Rudzki. Bemerkung zur Abhandlung von Hrn. A. Denizot unter dem Titel: „Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucaultschen Pendelversuches“	1070
14.	E. Gehrcke. Über eine Interferenzerscheinung am Stufengitter (Hierzu Taf. VIII Figg. 2 u. 3)	1074
15.	Max Wien. Bemerkung zu der Abhandlung von Hrn. E. Madelung: „Über Magnetisierung durch schnell verlaufende Ströme und die Wirkungsweise des Rutherford-Marconischen Magnetdetektors“	1077
16.	W. v. Ignatowsky. Berichtigung zu der Arbeit: „Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht“	1078
	Namenregister zum Jahrgang 1905	1079

Manuskripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude**, zu senden. Seine Adresse ist **Berlin N.W. 7**, Neue Wilhelmstr. 16.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

1905. № 15.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 18.

1. *Über Polarisationserscheinungen in Vakuumröhren; von G. C. Schmidt.*

(Abhandlung 1.)

§ 1. *Einleitung.* Im Jahre 1879 fand Hittorf[1]), daß der Durchgang einer kontinuierlichen Entladung den Zustand des in der Entladungsröhre enthaltenen Gases derart verändert, daß auch in *transversaler* Richtung Entladungen leichter hindurchgehen, ganz ähnlich wie dies de la Rive[2]) für den Lichtbogen nachgewiesen hatte. Diese Versuche sind von Hertz[3]), Schuster[4]), Arrhenius[5]), E. Wiedemann und H. Ebert[6]), J. Stark[7]) und H. A. Wilson[8]) bestätigt und erweitert worden. Es hat sich hierbei ergeben, daß der Transversalstrom bei gleicher Stärke des Hauptstromes am kleinsten im dunklen Kathodenraum und am größten im Glimmlicht ist; im positiven Licht ist er größer als im Faradayschen dunklen Raum. Gegen den aus diesen Versuchen ziemlich allgemein gezogenen Schluß, daß die Verschiedenheit der Intensität des Transversalstromes von dem größeren oder geringeren Leitvermögen der einzelnen Teile der Entladung herrühre, sind namentlich von G. Wiedemann[9]) und C. A. Mebius[10]) Einwände erhoben worden. Selbst wenn nämlich die Sonden, durch welche der

1) W. Hittorf, Wied. Ann. **7.** p. 553 (614) 1879.

2) De la Rive, Arch. de Genève **26.** p. 177. 1866. Comp. rend. **60.** p. 1002 und 1686. 1866.

3) H. Hertz, Wied. Ann. **19.** p. 782 (815). 1883.

4) A. Schuster, Proc. Roy. Soc. **42.** p. 371. 1887.

5) S. Arrhenius, Wied. Ann. **32.** p. 545. 1887.

6) E. Wiedemann u. H. Ebert, Wied Ann. **35.** p. 220. 1888.

7) J. Stark, Ann. d. Phys. **12.** p. 622. 1903; siehe auch Die Elektrizität in Gasen, Leipzig 1902.

8) H. A. Wilson, Phil. Mag. (5) **49.** p. 505. 1900.

9) G Wiedemann, Lehre von der Elektr. **4.** Abt. I. p. 504—505. F. Vieweg, Braunschweig 1885.

10) C. A. Mebius, Wied. Ann. **59.** p. 696—697. 1896.

Transversalstrom fließt, sich in derselben Ebene befinden, so kann man doch nicht einen Zweig des Primärstromes vermeiden, wenn die beiden Sonden mit den Polen der Nebenbatterie verbunden werden; sie bekommen dann ungleiche Potentiale und deformieren daher die Äquipotentialflächen in der Röhre. Dazu kommt, daß, wie Mebius nachgewiesen hat, die Sonden sich polarisieren, und zwar in den einzelnen Teilen der Entladung verschieden stark. Die ganze Anordnung von Hittorf, die später von den oben erwähnten Forschern ebenfalls angewandt worden ist, liefert daher Resultate, welche von vielen Umständen abhängen, die sich nicht vollständig übersehen lassen.

In einer vor kurzem erschienenen Abhandlung[1]) habe ich die Hypothese, daß der dunkle Kathodenraum der „Verarmungsbereich" an Ionen sei, durch Versuche zu bestätigen gesucht[2]). Meine Methode bestand im wesentlichen darin, die Zeit zu messen, welche eine mit einer Kapazität verbundene Sonde bedurfte, um sich auf das in den einzelnen Teilen der Entladung herrschende Potential zu laden. Es ergab sich hierbei, daß tatsächlich die Konzentration der Ionen im dunklen Kathodenraum sehr klein war; die Hypothese konnte somit bestätigt werden.

Auch gegen diese Methode läßt sich, ebenso wie gegen die der Transversalströme, der Einwand erheben, daß die Sonde sich polarisiere und infolgedessen alle Messungen nur qualitativer Natur seien. Die folgende Arbeit, welche sich eng an die vorhergehende anschließt, wurde unternommen, um diese Polarisation genauer zu untersuchen.

§ 2. *Theorie.* Daß eine Polarisation beim Transversalstrom auftritt, ist von Mebius einwandsfrei nachgewiesen worden. Wie dieselbe zustande kommt, darüber ist bis jetzt noch keine klare Vorstellung entwickelt worden. A. Schuster[3]) nimmt an,

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. **12.** p. 622. 1903.

2) Herr J. Stark macht (Ann. d. Phys. **13.** p. 375. 1904) darauf aufmerksam, daß J. J. Thomson zuerst eine ähnliche Hypothese aufgestellt hat. Ich bedaure, daß mir dieselbe entgangen war.

3) A. Schuster hat (Lum. électrique **46.** p. 371. 1892; Beibl. **27.** p. 157. 1893) bei H, N, O, Wasserdampf und verschiedenen anderen zusammengesetzten Gasen keine Polarisation beobachten können, wohl aber bei einigen Kohlenwasserstoffen. Aus der Tatsache, daß nur die letzteren

daß die Kathode sich polarisiert in ähnlicher Weise, wie dies bei flüssigen Elektrolyten der Fall ist, einer Ansicht, der sich auch Mebius anschließt. Aber alle Versuche, diese Polarisation in ähnlicher Weise wie bei flüssigen Elektrolyten nachzuweisen, sind bisher gescheitert; wenn daher wirklich die Kathode sich beim Stromdurchgang veränderte, wie dies bei den flüssigen, polarisierenden Elektrolyten der Fall ist, so müßte die Geschwindigkeit der Depolarisation eine sehr große sein. In röntgenisierter Luft oder Luft, die durch Kathoden-, Becquerelstrahlen usw. ionisiert worden ist, hat man bisher ebenfalls keine Polarisation gefunden, im Gegenteil, da die mathematisch abgeleiteten Formeln mit den Versuchen ohne Annahme einer Polarisation gut übereinstimmen, so kann man mit Sicherheit schließen, daß wenn überhaupt eine Veränderung der Elektroden vorhanden ist, dieselbe so klein sein muß, daß sie vernachlässigt werden kann.

Nach O. Lehmann[1]) sollen sich die negativen Ionen an der Anode leicht entladen können, während die positiven ihre Ladung nur schwierig an die Kathode abgeben, so daß sich um diese eine mehr oder minder ausgedehnte Hülle positiv elektrischen Gases lagert. Hiergegen läßt sich einwenden, daß ein negativ geladener Körper in den Kanal-, Kathoden-, Röntgen- und Becquerelstrahlen seine Ladung sehr schnell verliert, und zwar, soweit aus den allerdings mehr qualitativen Beobachtungen hervorgeht, annähernd ebenso schnell, als wenn derselbe positiv geladen ist.

Im Anschluß an meine vorige Arbeit habe ich mir eine andere Vorstellung von dem Wesen der Polarisation gebildet.[2] Genau so wie bei flüssigen Elektrolyten der Durchgang eines kräftigen Stromes sich die Konzentration in der Lösung dicht um die Elektroden ändert, da Wanderung und Diffusion nicht

---

Gase diese Erscheinung zeigen, geht mit Sicherheit hervor, daß wir es hier mit Ausnahmefällen zu tun haben, die wohl in Zusammenhang stehen mit der leichten Zersetzbarkeit der betreffenden Gase und dem Niederschlagen der Zersetzungsprodukte auf die Elektroden. Von anderen Forschern ist niemals eine Polarisation beobachtet worden. J. J. Thomson u. Rutherford, Phil. Mag. 42. p. 392. 1897.

1) O. Lehmann, Verhandl. Naturw. Ver. Karlsruhe 15. p. 35. 1902.

2) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 12. p. 624—626. 1903.

so viel Ionen zuführen, als aus der Lösung gedrängt werden, und hierdurch eine Gegenkraft auftritt, welche sich der Strombewegung widersetzt, ebenso muß bei Gaselektrolyten an den Transversalelektroden eine *Verarmung an Ionen* eintreten, da die Ionen sich nicht unendlich rasch neubilden und zu den Elektroden diffundieren. Offenbar wird die Verarmung bei gleicher Stromstärke des Transversalstromes um so kleiner sein, je größer die Oberfläche der Sonden, je größer die Konzentration der Ionen usw. ist. *Die Polarisation der Elektroden ist also hiernach ein Maß für die Verarmung.* Diese Theorie, welche ich später noch ausführlicher besprechen werde, habe ich im folgenden geprüft. Zu dem Zweck wird zunächst nachgewiesen, daß eine Polarisation im Sinne von Schuster in Entladungsröhren nicht auftritt. Darauf wird gezeigt, daß die Polarisation der Elektroden von der Stromdichte, also von der Größe der Sonden und der Konzentration der Ionen abhängt. In einer späteren Abhandlung soll die Beziehung zwischen Druck und Polarisation, Geschwindigkeit der Ionen und Polarisation festgestellt und schließlich aus allen diesen Daten die relative Anzahl der Ionen in den einzelnen Teilen der Entladung berechnet werden.

§ 3. *Versuche über die Veränderung der Elektroden beim Stromdurchgang.* In § 2 habe ich die Hypothese von Schuster über das Wesen der Polarisation bei Gasen skizziert. Die Elektroden sollten sich in ähnlicher Weise beim Stromdurchgang polarisieren, wie dies bei flüssigen Elektrolyten der Fall ist. Wenn diese Hypothese richtig wäre, so könnte der Umstand, daß es bisher noch nicht gelungen ist, nach ähnlichen Methoden wie bei letzteren die Polarisation nachzuweisen, nur von der viel größeren Geschwindigkeit der Depolarisation herrühren. Ich habe deswegen zunächst versucht, ob man vielleicht eine Spur von Änderung der Elektroden nachweisen könnte, wenn man die Zeit zwischen Loslösung der Batterie und Messung der Polarisation sehr klein machte. Für diese Versuche wurde der folgende Unterbrecher benutzt.

a) *Der Unterbrecher:* Der Unterbrecher diente dazu, den Hauptstrom einen Augenblick zu schließen, darauf zu unterbrechen und unmittelbar hierauf den Nebenstrom zu schließen.

Auf einem Brett AB (Fig. 1) von 30 cm Länge und 40 cm

Breite waren zwei Holzleisten *CD* und *EF* befestigt. *CD* trug vier durch Ebonit wohlisolierte Klemmen 1, 2, 3, 4, in welchen vier elastische Federn befestigt waren. An die letzteren waren Kupferdrähte angelötet, welche um die Ebonitstäbe mehrere Male gewunden waren und unten in vier mit Quecksilber gefüllte Glasnäpfchen Hg_1, Hg_2, Hg_3, Hg_4 tauchten; um dieselben waren Tüten aus Papier befestigt, damit das Quecksilber bei der Rotation der Scheiben nicht allzusehr herausspritzte. Die Ebonitstäbe M und M_1 standen durch Messingstäbe L und L_1 (L_1 ist in der Figur nicht zu sehen) mit den runden Holzscheiben S und S_1, welche beide auf einer gemeinsamen

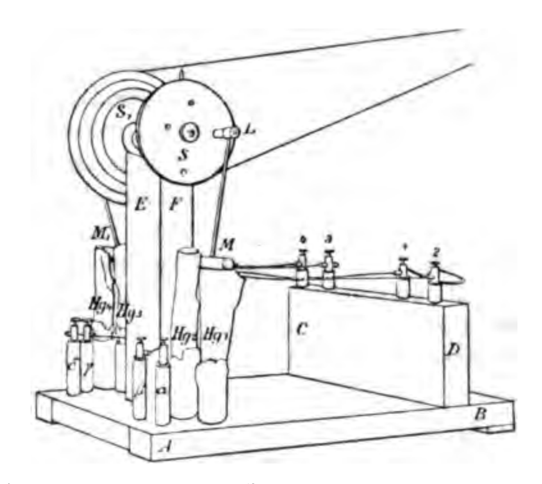


Fig. 1.

Achse befestigt waren, derart in Verbindung, daß bei der Rotation die auf M und M_1 befestigten Kupferdrähte abwechselnd in das Quecksilber tauchten und wieder herausgehoben wurden. Die Scheiben wurden durch einen Elektromotor in Rotation versetzt. In die Quecksilbernäpfe Hg_3 und Hg_4 tauchten die Zuleitungsdrähte γ, δ des Haupt-, und in Hg_1, Hg_2 die des Polarisationsstromes α, β. Die Anordnung war nun so getroffen, daß, wenn die Drahtenden von M in das Quecksilber tauchten, bei M_1 der Strom unterbrochen wurde. Bei der Drehung der Scheiben, deren Geschwindigkeit durch einen Widerstand bez. durch Befestigung des Riemens auf verschieden

großen konzentrischen Scheiben von S_1 reguliert werden konnten, war so abwechselnd der Hauptstrom geschlossen, während der Polarisationsstrom unterbrochen war und umgekehrt.

b) Die *Schaltung* zeigt die nebenstehende Fig. 2. *R* ist das Entladungsrohr, von denen zwei zur Verwendung kamen, Länge 20 cm, 4 cm Breite bez. 30 cm Länge, 5 cm Breite. Die Anode und die Kathode waren hinten mit Glimmer bedeckt und in bekannter Weise beweglich angeordnet. Das Rohr enthielt vier Querelektroden, Platten aus Messing, Kupfer- und Platindrähte von verschiedenem Durchmesser, deren Bedeutung später beschrieben werden wird. Dieselben waren bis an die Spitze in Glas gehüllt und ebenfalls beweglich angeordnet. Die Anode und Kathode waren mit den Näpfchen Hg_3 und Hg_4 verbunden (Fig. 1). Die Klemmschrauben 1, 2 waren kurz geschlossen. Die Zuleitungsdrähte des Hauptstromes, herrührend von einer Batterie von 1000 Akkumulatoren *B* (Fig. 2) führten zu den Klemmschrauben 3, 4. *G* ist ein sehr empfindliches Galvanometer von Carpentier in Paris.

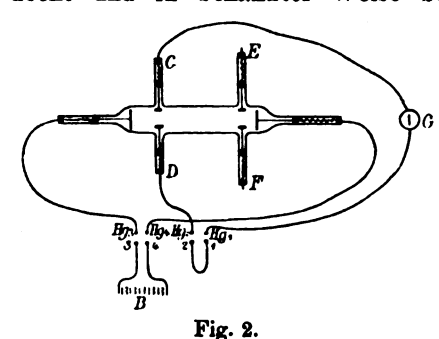


Fig. 2.

Wie der Apparat arbeitet, läßt sich leicht übersehen. Wenn die beiden Scheiben rotieren, so ist eine Zeitlang der Hauptstrom geschlossen, dadurch, daß die Drahtenden von *M* in die Quecksilbernäpfchen tauchen. Der Strom fließt von der Hauptbatterie durch die Klemme 3 zur Anode, von dort nach der Kathode und dann durch das Quecksilbernäpfchen Hg_4 zur Batterie zurück. Im nächsten Augenblick wird der Hauptstrom unterbrochen; jetzt tauchen aber die beiden Kupferdrahtenden von *M* in die Quecksilbernäpfchen Hg_1 Hg_2, wodurch der Nebenstrom geschlossen ist, welcher bei Vorhandensein eines Polarisationsstromes im Galvanometer einen Ausschlag hervorrufen mußte.

Da das Galvanometer und die Röhre auf ein hohes Potential geladen wurden, so muß für eine sehr gute Iso-

lation Sorge getragen werden. Alle dick mit Kautschuk umsponnenen Drähte waren durch Luft gespannt, wo sie befestigt waren, wurden sie durch Glasröhren isoliert. Die Verbindungsstellen bestanden aus gut isolierten Quecksilbernäpfchen.

Anfangs hatte ich große Schwierigkeiten zu überwinden, die zum größten Teil von elektrostatischen Einflüssen im Galvanometer herrührten; erst nachdem ich alle nichtleitenden Teile aus demselben entfernt hatte, gelang es mir sichere Messungsresultate zu erhalten.

Die Beobachtungen wurden mit Luft, Stickstoff, Wasserstoff und Sauerstoff angestellt. Die Darstellung der Gase war die übliche.

Um den Apparat zu prüfen, namentlich ob Induktionswirkungen die Messungsresultate beeinflußten, wurden zunächst eine Reihe von Vorversuchen angestellt, deren Beschreibung ich übergehe. Störungen traten nur auf, wenn die Rotation allzu groß war (ca. 400 in der Minute); es wurde dann nämlich das Quecksilber in den Näpfchen stark umhergeschleudert, so daß eventuell der Hauptstrom noch geschlossen war, während der Nebenstrom schon in Tätigkeit trat. Es fand dann stets ein außerordentlich starker Ausschlag der Galvanometernadel statt (Stromstoß), wodurch natürlich die Messungen fehlerhaft wurden. Bei mittleren Umdrehungsgeschwindigkeiten nahm die Nadel eine ganz feste Lage ein. Daß der Apparat gut funktionierte, konnte auch dadurch nachgewiesen werden, daß sich die Leitfähigkeit einer wässerigen $CuSO_4$-Lösung, welche in das Entladungsrohr gegossen war, ohne Schwierigkeit bestimmen ließ.

c) *Ergebnisse:* Es ergab sich, daß selbst bei der größten Rotationsgeschwindigkeit keine Spur von einem Polarisationsstrom nachzuweisen war. Somit ist 0,025 Sek. nach Öffnen des Hauptsstromes der Polarisationsstrom, wenn er überhaupt vorhanden ist, kleiner als 10^{-11} Amp.

Gegen diese Versuche ließe sich der Einwand erheben, daß unmittelbar nach Öffnen des Hauptstromes die Ionen in der Entladungsröhre so schnell verschwinden, daß das Gas in der Entladungsröhre ein Nichtleiter wird und daß der Stromkreis deswegen nicht geschlossen ist. Um diesen Einwand zu prüfen, wurde in den Nebenschließungskreis ein Element geschaltet, sofort trat ein Galvanometerausschlag ein.

Hg_1 und Hg_2 wurden mit CD bez. EF unter Einschaltung eines Galvanometers und einer Batterie verbunden, so daß jetzt also unmittelbar nach Öffnen des Hauptstromes ein Transversalstrom zustande kam. Von den vielen so angestellten Messungen teile ich nur eine einzige mit.

$p = 0{,}4$ mm. $I = 0{,}41$ M.-A.
Anzahl der Rotationen in der Minute 200.
Stickstoff.

E.M.K.	Glimmlicht	Dunkler Raum	Positiv	Berechnet[1])
20 Volt	8.10^{-6} M.-A.	8.10^{-6} M.-A.	$7{,}5.10^{-6}$ M.-A.	8.10^{-6}
40	18	17	17	17
60	26	26	26	26
80	34	35	34	35
100	43	44	43	44
120	52	53	52	53
140	61	62	61	62
160	71	71	70	71

Aus der Tabelle läßt sich entnehmen, daß der Transversalstrom direkt proportional der angewandten elektromotorischen Kraft ist und daß das Leitvermögen in allen Teilen der Röhre nach Öffnen des Hauptstromes dasselbe ist. Die letztere Tatsache erklärt sich daraus, daß hauptsächlich Ionen, welche sich von der Glaswand allmählich losgelöst haben, das Leitvermögen bewirken. Zugunsten dieser Erklärung sprechen noch eine Reihe von Beobachtungen, welche ich hier übergehe. Jedenfalls ergibt sich aus der Tabelle mit Sicherheit, daß selbst einige Zeit nach Öffnen des Hauptstromes noch genügend Ionen vorhanden sind, um den Polarisationsstrom zwischen den Elektroden herüberzuführen. Ich schließe daher aus der Gesamtheit der Beobachtungen, daß *eine Polarisation ähnlich wie bei flüssigen Elektrolyten bei gasförmigen nicht auftritt.* Zugunsten dieses Satzes spricht ferner die Tatsache, daß das Kathoden- und Anodenpotential innerhalb sehr weiter Grenzen unabhängig von der Temperatur ist, was nicht der Fall sein könnte, falls die Polarisation von einer sich an den Elektroden anlagernden

1) Berechnet nach der Formel $i = k\,E$, wo k eine Konstante, i die Stromstärke und E die elektromotorische Kraft bedeuten.

Gas- oder Ionenschicht herrührte, da dieselbe bei höherer Temperatur vertrieben werden würde.

§ 4. *Methode der Messung der Polarisation:* Die benutzte Anordnung hatte Ähnlichkeit mit der von Mebius[1]) benutzten. Von einer Batterie B (Fig. 3), welche im ganzen 1000 Akkumulatoren enthält, geht der Schließungskreis, der *Hauptbogen* durch ein Galvanometer G, einen Stromwender bez. Stromunterbrecher aus Paraffin u, den Widerstaud R von in Amylalkohol gelöstem

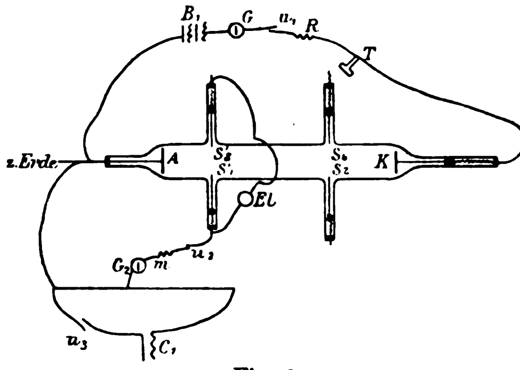


Fig. 3.

Jodkadmium, die Vakuumröhre und ein Telephon T. Die eine Sonde S_1 befindet sich in der *Nebenleitung*; in dieser sind ein Stromwender bez. Unterbrecher u_2, ein Galvanometer G_2, ein Widerstand m eingeschaltet. Der letztere ist verbunden mit der Wheatstoneschen Brücke. Die letztere besteht aus der Batterie C_1, kleine Akkumulatoren, deren Zahl je nach Wunsch geändert werden konnte, einen Stromunterbrecher u_3. Die eigentliche Brücke bestand aus einem ca. 2 m langen vertikal stehenden Glasrohr, in dem sich eine verdünnte Kupfersulfatlösung befand. Als Elektroden benutzte ich Kupferstäbe. Der verschiebbare Kontakt wurde hergestellt durch einen Kupferdraht, der durch Glas isoliert war und nur am unteren Ende zu einem horizontalen Kreis umgebogen war, der aus dem Glasrohr herausragte. Durch Verschieben des Kontaktes der Brücke konnte eine beliebige Spannung in der Nebenleitung eingeschaltet werden und so eventuell die Spannung von S_1 gegen die zur

1) C. A. Mebius, Wied. Ann. 59. p. 697—698. 1896.

Erde abgeleitete Kathode bez. Anode kompensiert werden. Gerade gegenüber S_1 befand sich eine zweite Sonde S_3. Beide wurden mit dem Elektrometer *El* verbunden. Zur Messung der Spannung benutzte ich die Methode von Hittorf: Laden eines Glimmerkondensators, der nachher durch ein Galvanometer entladen wurde.

Das *Vakuumrohr* hatte eine Länge von 45 cm und einen Durchmesser von 2,5 cm. Von den Hauptelektroden *A K* war die eine fest, die andere beweglich. Diese war an einem verschiebbaren Glaskörper befestigt, in dem sich ein Hohlzylinder aus Eisenblech befand. Wenn ein Elektromagnet der äußeren Wand des Rohres genähert wurde, wurde der Zylinder angezogen, und auf diese Weise konnte man die Elektrode im Innern des horizontalen Rohres verschieben. Die Leitung nach außen geschah durch einen mit Siegellack eingekitteten Kupferdraht. Die Elektroden waren kreisförmige Platinscheiben, welche eng an das Glasrohr anlagen. Die hintere Seite der Elektroden war mit Glimmer bedeckt.

Die *Nebenelektroden* oder *Sonden* waren Platindrähte von verschiedenem Durchmesser. Bei den letzten Versuchen, wo die Polarisation in den verschiedenen Teilen der Entladung untersucht wurde, besaßen alle den gleichen Durchmesser. Alle waren in bekannter Weise beweglich angeordnet. Sie bewegten sich in engen Glasröhren, die in der Mitte der Seitenröhren durch Asbest befestigt waren. Ihre Lage, d. h. wieviel von der Sonde aus der Röhre herausragte, wurde auf einer unter den Seiten liegenden, in Millimetern eingeteilten spiegelnden Glasskala abgelesen.

Die Zahl der Sonden betrug 14; in der Figur sind der besseren Übersicht wegen nur vier gezeichnet.

Die ganze Leitung war gut isoliert, das Rohr, die Brücke und alle einzelnen Meßinstrumente und ebenso die Nebenbatterie standen auf Paraffin, welches seinerseits auf Glasscheiben befestigt war.

§ 5. *Ausführung und Berechnung der Messungen.* Nachdem die ganze Anordnung auf Isolierung untersucht war und alle Apparate geeicht, wurden die Messungen in folgender Weise ausgeführt. Nachdem der Hauptstrom geschlossen und man sich überzeugt hatte, daß der Strom stetig war, wurde

der Nebenstrom (d. h. der zwischen der Sonde und der zur Erde abgeleiteten Anode bez. Kathode) ebenfalls geschlossen und so lange die Wheastonesche Brücke verstellt, bis kein Strom durch das Galvanometer G_2 floß. Die Sonde und das Gas in ihrer Nähe müssen dann dasselbe Potential haben. Dies folgt unmittelbar daraus, daß ein Transversalstrom von einer Sonde nach einer anderen durch eine Gasstrecke hindurchgehen kann, wie gering auch die elektromotorische Kraft im Schließungsbogen sein mag.[1]) Es geht dies auch aus direkten Messungen hervor, wie in den nachfolgenden Tabellen gezeigt werden wird; denn es ist stets, wenn kein Strom durch den Nebenschließungskreis fließt, die am Elektrometer abgelesene Potentialdifferenz zwischen Sonde und der zur Erde abgeleiteten Elektrode gleich der aus der Brücke berechneten.

Wenn darauf der bewegliche Kontakt der Brücke verschoben wurde, so ging ein Strom durch das Galvanometer G_2. Hatten ursprünglich z. B. die beiden Sonden S_1 und S_2 dasselbe Potential, so bestand jetzt zwischen beiden eine Potentialdifferenz, die sich auch aus der Stellung des beweglichen Kontaktes der Brücke auf folgende Weise berechnen ließ. Wir nennen die Potentiale der Anode, der Sonde und des Gases in unmittelbarer Nähe der Sonde V_A, V_S und V_G, so ist nach dem vorhergehenden $V_S = V_G$ nur dann, wenn kein Strom durch die Nebenleitung fließt. Wie Mebius rechne ich einen Strom, der von der Anode nach der Sonde geht, als positiv, und eine elektromotorische Kraft e Volt, welche in entgegengesetzter Richtung wirkt, gleichfalls als positiv. Wenn ein Strom durch die Nebenleitung fließt, dann ist die Potentialdifferenz P zwischen der Anode und der Sonde in der Nebenleitung

$$(1) \qquad V_A - V_S = P = e + m\,i,$$

wo m der Widerstand in der Nebenleitung bedeutet. Der Wert von P, welcher der Stromstärke Null entspricht, ist nach dem vorhergehenden

$$V_A - V_G.$$

Nehmen wir an, daß für diese Differenz x Volt gemessen sei, so haben wir

$$(2) \qquad V_A - V_G = x \text{ Volt}.$$

1) C. A. Mebius, l. c. p. 701; A. Schuster, Proc. Roy. Soc. 42. p. 371. 1887.

Aus (1) und (2) ergibt sich dann

$$V_S - V_G = K = x - P,$$

wo K die Potentialdifferenz zwischen der Sonde und dem Gase oder das *Kathodengefälle* bedeutet.

Wie aus den nachfolgenden Tabellen hervorgeht, stimmt das so berechnete Kathoden- bez. Anodengefälle mit dem direkt am Elektrometer gemessenen überein, solange die Stromstärke in der Nebenleitung nicht zu groß war. War das letztere der Fall, so traten Verzerrungen ein, die im nächsten Paragraphen geschildert werden sollen.

Die im vorhergehenden benutzte Berechnungsmethode ist identisch mit der von Mebius angewandten; sie gilt, wie man unschwer erkennt, nur so lange, als sich die einzelnen Gebilde der Entladung nicht verzerren, da nur in diesem Fall der Wert V_G derselbe bleibt. Sobald die am Elektrometer abgelesenen und die aus der Brücke berechneten nicht übereinstimmen, hat sich das Gas um die Sonde verändert oder das Gebilde um die Sonde hat sich verzerrt, selbst dann, wenn mit dem Auge kaum eine Veränderung zu sehen ist. Die nachfolgenden Tabellen enthalten eine Reihe solcher Zahlen; zur Konstruktion meiner Kurven und zur Berechnung der Polarisation habe ich sie natürlich nicht benutzt (vgl. § 8 und § 14).

§ 6. *Die Erscheinungen.* Die vielen Verzerrungserscheinungen, welche bei den Transversalströmen auftreten, im einzelnen zu beschreiben, hat keinen Zweck. Ist die Sonde positiv geladen, so ist bei schwachen Strömen und entsprechenden kleinen Anodengefällen nichts Besonderes wahrzunehmen; bei größeren Anodengefällen setzt sich zunächst eine Lichthaut an die Sonde, welche bei Steigung der Stromstärke intensiver wird. Bei welchem Anodengefälle das Leuchten beginnt, ist sehr schwer zu entscheiden, da, wenn die Sonde in Glimmlicht oder positives Licht taucht, diese Gebilde die schwache Lichthaut auf der Sonde nicht in Erscheinung treten lassen. In den folgenden Tabellen habe ich durch ein * angedeutet, wann zuerst ein deutliches Leuchten der Anode zu sehen war. Lagert sich eine Schicht an eine Sonde, so verschmilzt dieselbe allmählich mit dem Licht auf der Sonde, bis schließlich die Schicht die Sonde ganz umgibt. Zu gleicher

Zeit ändern sich auch alle anderen Gebilde in der Röhre. Ist die Sonde negativ geladen, so kann bei großem Kathodengefälle das positive Licht ganz beiseite gedrängt werden. Da alle diese Verzerrungserscheinungen nur bei hohen Potentialen auftreten, die im folgenden kaum berücksichtigt werden, so mögen diese kurzen Andeutunngen genügen.

§ 7. *Nachweis, daß für das Anoden- bez. Kathodengefälle dieselben Werte erhalten werden, gleichgültig, ob die Kathode oder Anode des Hauptstromes zur Erde abgeleitet ist.* Bevor mit den eigentlichen Messungen begonnen wurde, mußte ermittelt werden, ob bei ein und derselben Sonde bei unverändertem Druck, Entladungspotential und Stromstärke des Hauptstromes für das Kathoden- bez. Anodengefälle des Transversalstromes dieselben Werte erhalten wurden, gleichgültig, ob die Anode oder Kathode des Hauptstromes zur Erde abgeleitet war; oder mit anderen Worten, es mußte festgestellt werden, daß die Anoden- und Kathodengefälle dieselben Werte behalten, wenn das Entladungspotential, Druck, Stromstärke des Hauptkreises, Länge der Sonde und das Entladungsgebilde, in welches die Sonde taucht, unverändert bleiben. Es war dies tatsächlich der Fall, wie aus den folgenden drei Tabellen hervorgeht. In denselben bedeuten p den Druck, II das Entladungspotential, I die Stromstärke des Hauptkreises in Milliampère, i die Stromstärke des Nebenkreises in Ampère . 10^{-6}, A das Anodengefälle und K das Kathodengefälle.

Tabelle I.

Positive Elektrode zur Erde. Spannung in der Wheatstoneschen Brücke 210 Volt.

p = 0,9 mm. I = 1,4. II = 490 Volt.

A	i	A	i	K	i	K	i
1,1	$1{,}4 . 10^{-6}$	11,9	27,4	8,4	0,10	76,2	0,79
3,7	3,6	13,6	33,0	11,2	0,14	79,3	0,84
4,0	5,2	15,0	40,2	14,6	0,19		
4,3	7,8	19,1	55,8	20,2	0,25		
5,6	11,2	19,3	60,3	23,7	0,36		
7,5	13,3	22,0	77,6	31,5	0,42		
8,1	16,8	21,8	84,3	55,4	0,59		
8,9	19,1	23,1	99,1	55,8	0,63		
11,4	23,6	23,1	115,1	61,3	0,71		

Tabelle II.

Positive Elektrode zur Erde. Spannung in der Wheatstoneschen Brücke 500 Volt.

p = 0,9 mm. I = 1,4. II = 490 Volt.

A	*i*	*A*	*i*	*K*	*i*	*K*	*i*
0,9	$1{,}0 \cdot 10^{-6}$	12,9	28,3	6,2	0,11	86,0	0,85
2,4	3,0	13,6	34,1	9,4	0,16	93,0	0,89
3,7	6,5	15,2	41,0	15,3	0,24		
4,5	8,2	17,5	48,6	23,4	0,33		
6,1	10,4	18,3	57,2	32,1	0,42		
7,5	14,4	19,1	61,4	48,2	0,57		
8,3	16,0	22,1	80,4	57,1	0,64		
9,6	19,4	22,8	111,2	80,2	0,81		
10,1	20,0						

Tabelle III.

Negative Elektrode zur Erde. Spannung in der Wheatstoneschen Brücke 500 Volt.

p = 0,9 mm. I = 1,4. II = 490 Volt.

A	*i*	*A*	*i*	*K*	*i*	*K*	*i*
1,5	$2{,}5 \cdot 10^{-6}$	12,3	34,4	8,3	0,14	89,6	0,93
1,9	3,3	16,1	50,6	17,5	0,25		
2,7	4,8	19,8	71,3	29,5	0,39		
3,6	6,9	21,8	100,8	35,2	0,45		
5,0	11,1	22,4	158,5	60,1	0,68		
6,1	14,2	22,5	235,8	68,3	0,75		
6,5	17,3	22,3	280,8	76,4	0,81		
9,8	24,4			88,4	0,89		

Die Anoden- und Kathodengefälle sind aus der Brückenstellung berechnet worden.

Die drei aus den Beobachtungen konstruierten Kurven fallen nicht genau zusammen, — die Abweichungen betragen ungefähr 1 Volt für ein und dieselbe Stromstärke — doch erklären sich dieselben leicht daraus, daß sich im Laufe der Zeit der Gasinhalt etwas änderte und ferner sind die Ablesungsfehler bei Tab. II und III, bei denen in der Nebenbatterie eine Spannung von 500 Volt herrschte, viel größer als bei Tab. I, wo die Spannung nur 210 Volt betrug.

Trotzdem man somit aus den Tabellen entnehmen kann, daß man für die Kathoden- und Anodenpotentiale dieselben Werte erhält, gleichgültig ob man die Anode oder Kathode des Hauptstromes zur Erde ableitet, habe ich doch stets mit Ausnahme der im folgenden erwähnten einzelnen Fälle die Anode zur Erde abgeleitet, da dann wegen des geringen Anodenpotentials die Nebenbatterie nicht so groß zu sein brauchte.

§ 8. *Beziehung zwischen Polarisation und Größe der Elektroden im positiven Licht.* Die Versuche wurden in der Weise angestellt, daß die Polarisation für verschiedene Stromstärken in dem Nebenzweig gemessen wurde, darauf wurde die Länge der Sonde verändert und wiederum die Polarisation gemessen etc.

In den folgenden Tabellen bedeuten I und Π die Stromstärke und Potentialdifferenz im Hauptstromkreis, i die Stromstärke im Nebenstromkreis, E_1 die Polarisation gemessen mit dem Elektrometer, E_2 die Polarisation berechnet aus der Stellung des Kontakts der Wheatstoneschen Brücke, p den Druck und schließlich L die Länge der Sonde.

Tabelle IV.

$I = 0,47$ M.-A. $p = 0,35$. $\Pi = 450$ Volt. $L = 3,0$ mm.

$i \cdot 10^{-6}$	E_1	E_2	Mittel	$i \cdot 10^{-6}$	E_1	E_2	Mittel
	Volt	Volt	Volt		Volt	Volt	Volt
0,38	1,3	1,5	1,4	−0,09	2,7	2,3	2,5
1,10	2,9	2,1	2,5	−0,21	6,8	7,8	7,3
2,16	4,6	4,6	4,6	−0,23	10,0	10,1	10,0
3,51	7,3	8,3	7,8	−0,29	32,0	33,2	32,6
4,32	9,0	9,4	9,2	−0,35	41,4	41,3	41,3
5,81	12,4	12,5	12,4	−0,45	48,1	50,2	49,2
7,0	13,5	12,9	13,2	−0,57	55,4	59,0	57,2
10,1	19,0	19,6	19,3*				
10,5	19,5	20,2	19,9				
14,3	22,2	22,1	22,1				
15,1	23,0	22,7	22,9				
30,2	23,4	24,4	23,4 [1])				
40,8	23,6	25,3	23,6 [1])				

* bedeutet, daß sich deutlich Licht um die Sonde gelagert hat.

1) Bei diesen Zahlen sind nur die Elektrometerausschläge berücksichtigt worden, da dieselben zuverlässiger sind als die aus der Brücke gewonnenen elektromotorischen Kräfte. Beide weichen beträchtlich voneinander ab (vgl. § 5 und § 14).

Tabelle V.

I = 0,47 M.-A. p = 0,35. Π = 450 Volt. L = 12 mm.

$i \cdot 10^{-6}$	E_1	E_2	Mittel	$i \cdot 10^{-6}$	E_1	E_2	Mittel
	Volt	Volt	Volt		Volt	Volt	Volt
1,1	0,72	0,68	0,70	−0,24	1,3	1,5	1,4
2,5	1,3	1,3	1,3	−0,49	6,7	6,3	6,5
3,8	1,8	2,2	2,0	−0,72	12,5	13,5	13,0
4,7	2,8	2,4	2,6	−1,03	26,5	27,9	27,2
6,2	3,8	3,0	3,4	−1,30	38,8	40,8	39,8
8,5	4,6	5,0	4,8	−1,5	49,2	51,1	50,0
11,3	6,5	6,0	6,3				
14,6	8,0	8,2	8,1				
17,3	9,6	9,6	9,6				
21,2	11,0	12,0	11,5				
26,3	13,4	14,6	14,0				
31,8	16,6	16,0	16,3				
39,8	19,4	18,0	18,7*				
44,0	20,2	21,6	20,2 [1])				
52,2	21,3	22,9	21,8 [1])				
70,8	23,4	24,4	23,4 [1])				
91,3	23,3	26,8	23,3 [1])				

Tabelle VI.

I = 0,47 M.-A. p = 0,35. Π = 450 Volt. L = 32 mm.

$i \cdot 10^{-6}$	E_1	E_2	Mittel	$i \cdot 10^{-6}$	E_1	E_2	Mittel
	Volt	Volt	Volt		Volt	Volt	Volt
3,2	0,8	0,9	0,8	−0,23	0,5	0,6	0,55
5,6	1,7	1,7	1,7	−0,41	2,2	2,0	2,1
9,3	2,4	2,8	2,6	−0,67	4,0	4,8	4,4
13,4	2,7	2,9	2,8	−0,83	5,9	5,6	5,8
20,1	4,4	5,0	4,7	−1,20	9,0	9,0	9,0
31,8	6,1	5,5	5,8	−1,27	10,2	10,0	10,1
42,6	7,5	7,7	7,6	−2,58	26,0	29,0	27,5
55,1	10,5	10,9	10,2	−3,20	34,3	36,4	35,3
74,3	14,6	14,0	14,3 *	−4,01	44,4	46,0	45,2
104,8	17,9	18,9	17,9 *	−4,40	50,1	52,0	51

1) Vgl. Anm. 1 auf p. 883.

Den Verlauf der Kurven stellt die Fig. 4 dar.

Aus denselben läßt sich entnehmen:

1. *Wenn eine Sonde als Anode dient, d. h. wenn ein Strom von der Sonde nach dem Gase geht, so ist ihr Potential höher als das des Gases. Das Umgekehrte gilt, wenn die Sonde Kathode ist, also ein Strom von dem Gase in die Sonde geht.*

2. *Anoden- und Kathodengefälle sind für kleine Stromstärken klein und wachsen mit steigender Stromstärke, und zwar das Kathodengefälle viel schneller als das Anodengefälle.*[1])

3. *Bei einem und demselben Anoden- bez. Kathodengefälle ist die Stromstärke proportional der Größe der Sonde oder bei gleicher Stromdichte ist die Polarisation die gleiche.*

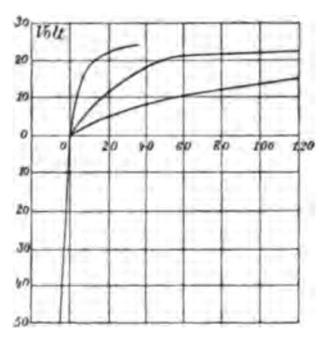


Fig. 4.

Wenn wir annehmen, daß die Polarisation von der Verarmung an Ionen herrührt, und weiter berücksichtigen, daß die Beweglichkeit der negativen Teilchen größer ist als die der positiven, so lassen sich diese Ergebnisse leicht verstehen. Wegen der geringen Beweglichkeit der positiven Ionen kann eine viel größere Verarmung eintreten, wenn die Sonde negativ ist, als wenn sie positiv geladen ist, infolgedessen kann die Polarisation im ersten Fall viel größer werden als im zweiten. Bei doppelter Länge der Sonde stehen doppelt so viel Ionen zur Verfügung, infolgedessen ist bei derselben Stromstärke die Verarmung, also auch die Polarisation kleiner. Ist dagegen die Stromdichte die gleiche, so ist es auch die Verarmung und daher auch die Polarisation.

---

1) Satz 1 und 2 sind bereits von Mebius l. c. gefunden worden.

§ 9. ***Beziehung zwischen Polarisation und Größe der Elektroden im Faradayschen dunklen Raum.*** Um Platz zu sparen, teile ich für die Polarisation nur den Mittelwert (mit E bezeichnet) mit; die übrigen Bezeichnungen sind identisch mit den vorhergehenden.

Tabelle VII.

I = 0,43 M.-A. II = 500 Volt. p = 0,47 mm.

L = 5 mm		L = 15 mm		L = 32 mm	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
0,51	1,7 Volt	0,21	0,5 Volt	2,11	0,9 Volt
1,93	4,5	0,53	0,9	5,36	1,8
2,70	7,1	1,62	1,6	8,94	2,9
4,29	9,3	3,54	2,8	11,3	3,4
6,12	11,1	5,61	4,2	15,2	4,7
8,59	14,7*	7,92	5,8	21,3	6,7
11,3	15,6	10,1	6,9	29,8	9,2
15,8	17,9	15,4	10,1	34,3	10,6
21,4	20,6	20,3	11,9*	42,5	12,4*
24,8	21,3	23,6	13,3	49,9	13,8
30,1	22,4	25,8	14,1	53,2	16,6
42,2	23,8	31,3	15,6	64,1	17,6
54,0	24,6	35,8	16,7	79,3	18,0
63,9	24,9	41,2	17,8	92,9	20,3
72,0	25,0	50,0	19,5	106,1	21,2
−0,13	10,3	64,2	21,1	121,4	22,0
−0,21	15,1	85,8	22,3	−0,51	1,6
−0,30	37,4	110,5	22,9	−0,84	7,5
−0,36	47,1	−0,15	1,5	−1,21	13,4
−0,38	52,2	−0,26	7,6	−1,63	21,2
−0,41	55,8	−0,41	15,2	−1,89	28,5
		−0,68	34,8	−2,21	39,0
		−0,73	36,2	−2,62	58,5
		−0,91	44,8		
		−1,10	50,9		

Auch hier gelten dieselben Beziehungen wie in § 8; auch hier *ist bei ein und demselben Anoden- bez. Kathodenpotential die Stromdichte gleich.*

§ 10. *Beziehung zwischen Polarisation und Größe der Elektroden im Glimmlicht.*

Tabelle VIII.

I = 0,45 M.-A. Π = 480 Volt. p = 0,53 mm.

L = 10 mm		L = 32 mm	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
3,56	1,1 Volt	6,6	0,61 Volt
5,31	1,5	13,4	1,1
7,89	2,4	20,3	1,6
11,3	3,3	41,4	3,7
15,8	4,0	52,3	4,2
20,3	5,2	68,6	5,8
25,0	6,3	83,5	7,3
31,4	7,8	95,0	7,6
44,6	10,2	120,4	8,4
51,5	11,4	161,0	10,3
63,0	13,8	196,0	10,7
75,3	15,2	328,0	18,3
84,6	15,8	− 1,1	2,1
98,3	17,9	− 3,0	13,3
115,1	19,8	− 4,6	23,2
158,0	21,8	− 5,1	27,0
297,0	22,9	− 5,9	31,3
365,0	22,8	− 6,2	33,0
− 0,31	1,1	− 6,9	38,1
− 0,65	6,4	− 7,0	39,6
− 0,88	13,4		
− 1,12	17,3		
− 1,46	28,2		
− 1,81	37,1		
− 1,90	40,2		

Auch hier gelten wieder dieselben Gesetzmäßigkeiten wie in § 8. Doch zeigen die Kurven einige Abweichungen von dem Gesetz, daß bei gleicher Polarisation die Stromdichte die gleiche ist. Aus den Kurven entnehme ich als Beispiele folgende Zahlen: Bei + 5 Volt ist $i = 9{,}1$ bez. $= 28$, bei + 10 Volt ist $i = 42$ bez. $= 150$, bei + 18,3 Volt ist $i = 100$ bez. $= 328$; diese Stromstärken stehen nahezu im Verhältnis 1 : 3,2, entsprechen also den Längen der Sonden. Bei − 10 Volt ist $i = 8$ bez. $= 26$; das Verhältnis ist hier wieder angenähert 1 : 3,2. Bei − 40 Volt ist $i = 8$ bez. $= 72$; die Stromstärken stehen also im Verhältnis 1 : 4. Es erhebt sich bei dieser Beobachtungsreihe naturgemäß die Frage, ist das Gesetz über die Beziehung zwischen Stromdichte und Polarisation nur angenähert gültig, oder rühren diese Abweichungen nur von Beobachtungsfehlern her. Ich bin geneigt, das letztere anzunehmen. Die Beobachtungen kosten Zeit, da, bis alles stetig sich eingestellt hatte, stets einige Zeit verstrich. Nun konnte man deutlich wahrnehmen, wie nach längerer Benutzung die Sonden sich mit einem braunen Anflug bedeckten. Hierdurch änderte sich das Anoden- und Kathodenpotential; und wenn ich auch nie so hohe Zahlen für das Anodenpotential wie Hr. Reiger[1]) beobachtet habe, so habe ich doch Zahlen für das maximale Anodenpotential von 33 Volt im positiven Licht erhalten, während die meisten übrigen Beobachtungsreihen 22—23 Volt gaben. Es ist ja bekannt[2]), in wie ausnehmend hohem Maße das Anoden- und Kathodenpotential von der Reinheit der Elektrode abhängt. Ich glaube, daß hierauf die Abweichungen zum Teil oder ganz sich zurückführen lassen. Aus demselben Grunde habe ich auch eine Reihe von Beobachtungsreihen verworfen; so gab mir z. B. eine Beobachtungsreihe im Glimmlicht für das maximale Anodenpotential 32,6 Volt bei einer Länge der Sonde von 2 mm; als die Sonde auf 10 mm verlängert wurde, sank es auf 22,8 Volt. Die beiden Beobachtungsreihen zeigen zwar auch die große Abhängigkeit der Polarisation von der Größe der Sonde, sind aber nicht miteinander vergleichbar. Um diese Verunreinigung der Sonden

1) R. Reiger, Habilitationsschrift Erlangen, p. 75. 1905.

2) C. A. Skinner, Wied. Ann. 68. p. 752. 1899.

möglichst zu eliminieren, habe ich meinen Apparat öfters auseinander genommen und alles geputzt; eine deutlich sichtbare Verunreinigung trat aber manchmal schon nach kurzer Zeit wieder auf. Sicher würde dieselbe geringer gewesen sein, wenn alles Fett, Siegellack etc. vermieden worden wäre, dann wäre aber die Röhre nicht zu reinigen gewesen. Außerdem glaube ich auch, daß, solange wir nicht wissen, was wir eigentlich messen, und worauf es im wesentlichen ankommt, diese angenäherten Zahlen genügen.

§ 11. *Beziehung zwischen Polarisation und Größe der Elektrode im dunklen Kathodenraum.* Bei diesen Versuchen wurde die negative Elektrode des Hauptstromes zur Erde abgeleitet und das Potential der Sonde mit Hilfe des Elektrometers gegen die zur Erde abgeleitete Elektrode gemessen. Da das Kathodenpotential groß ist, so mußten eine größere Anzahl von Akkumulatoren bis 440 Volt an die Brücke angelegt werden. Durch den verhältnismäßig großen Strom wurde die Brücke etwas erwärmt. Als kein Strom hindurchging, war die Potentialdifferenz zwischen Sonde und Kathode 176 Volt; als man durch Veränderung der Brücke Strom durch die Sonde hindurchfließen ließ, stieg bez. sank das Potential, je nachdem Strom aus der Sonde in das Gas oder umgekehrt floß. Es liegt auf der Hand, daß die Ablesungsfehler bedeutend größer sind als in den vorhergehenden Beobachtungsreihen, denn die Polarisation ergibt sich jetzt aus der Differenz zweier großen Zahlen.

Viel größere Fehler wurden aber durch einen anderen Umstand hervorgerufen, nämlich dadurch, daß sich der Gasinhalt im Laufe der Zeit, während der Strom hindurchging, etwas änderte. Es war dies deutlich am Steigen des Potentiales der Sonde und im Kleinerwerden des dunklen Kathodenraumes festzustellen. Um diese Fehler möglichst zu beseitigen, wurde sehr schnell eingestellt und abgelesen und ferner durch Ablesen von nicht allzu vielen Punkten nur der allgemeine Verlauf der Kurve festgelegt. Bei den früheren Beobachtungsreihen spielte eine Änderung der Größe des Gebildes, z. B. des Glimmlichtes oder positiven Lichtes, nicht eine so große Rolle, denn die Sonde befand sich, selbst wenn das Gebilde ein klein wenig seine Lage oder Größe änderte, trotzdem

immer mitten darin. Beim dunklen Kathodenraum, der an und für sich nicht allzu groß sein durfte, weil sonst die Potentialdifferenz zwischen Sonde und Kathode und damit die Zahl der Akkumulatoren in der Brücke zu groß geworden wären, bewirkte eine kleine Änderung der Größe des Gebildes dagegen, daß die Sonde dem Glimmlicht sehr nahe rückte, wobei natürlich die Gefahr vorlag, daß man gar nicht die Polarisation im dunklen Kathodenraum, sondern an der Grenze des Glimmlichtes maß.

Tabelle IX.

I = 0,46. II = 720 Volt. p = 0,12 mm.

L = 4 mm		L = 12 mm		L = 30 mm	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
0,17	24 Volt	0,23	11 Volt	0,39	8 Volt
0,24	44	0,55	39	0,51	12
0,31	60	0,79	61	0,96	28
0,48	97	1,1	83	1,46	47
0,71	139	1,4	118	2,11	76
0,90	164	1,6	140	2,90	127
1,01	190	−0,21	13	3,4	181
−0.11	21	−0,53	27	−0,36	11
−0,25	34	−0,75	38	−0,59	16
−0,45	49	−0,91	42	−0,91	20
−0,95	82	−1,3	54	−1,43	−28
−1,33	98	−2,0	74	−1,55	−36
		−3,9	103	−3,3	66

Mit Hilfe dieser Zahlen wurden Kurven konstruiert und die den elektromotorischen Kräften entsprechenden Stromstärken abgelesen. Dieselben stehen in der nachfolgenden Tabelle verzeichnet; unter L_2/L_1 und L_3/L_1 stehen die Verhältniszahlen der Stromstärken, welche zu den verschieden langen Sonden gehören: $L_1 = 4$ mm, $L_2 = 12$ mm, $L_3 = 30$ mm; i_1, i_2, i_3 bedeuten die Stromstärken, welche zu den Sonden L_1, L_2, L_3 gehören.

Tabelle X.

E	$i_1 \cdot 10^{-7}$	$i_2 \cdot 10^{-7}$	$i_3 \cdot 10^{-7}$	L_2/L_1	L_3/L_1
10 Volt	0,51	1,5	3,7	3	7,0
20	1,2	2,9	7,5	2,4	6,8
40	2,0	5,4	12,5	2,7	6,2
60	2,8	7,8	17,4	2,8	6,3
80	3,5	10,0	21,3	3,0	6,0
100	4,9	12,5	25,1	2,6	5,1
120	5,1	1,5	28,0	3,0	5,5
−20	0,9	3,0	7,7	3,3	8,5
−40	2,6	8,5	17,5	3,2	7,0
−60	5,0	15,0	29,0	3,0	5,8
−80	8,3	25,0	—	3,0	—

Aus den letzten beiden Kolumnen läßt sich entnehmen, daß das Gesetz: *bei gleicher Stromdichte ist die Polarisation die gleiche*, auch hier gilt. Wären keine Beobachtungsfehler vorhanden, so müßten die beiden letzten Kolumnen konstant gleich 3 bez. 7,5 sein. Zwar sind die Abweichungen besonders in der zweiten Kolumne recht beträchtlich, doch sind, wie schon oben erwähnt, gerade hier die Beobachtungsfehler relativ groß, so daß man die Konstanz wohl noch als genügend bezeichnen kann. Auf den Verlauf der Kurven werde ich im Zusammenhang mit den früheren in § 16 zu sprechen kommen.

§ 12. *Beziehung zwischen Polarisation und Stromstärke im Hauptstromkreis im positiven Licht.* Im vorhergehenden Paragraphen habe ich das Gesetz, daß die Polarisation von der Größe der Elektrode abhängt, auf die Verarmung zurückgeführt; bei der doppelten Größe der Sonde stehen doppelt soviel Ionen zur Verfügung, infolgedessen muß die Stromstärke die doppelte sein, damit die Verarmung, d. h. die Polarisation die gleiche sei. Dies Gesetz läßt sich noch in anderer Weise prüfen. Verdoppeln wir die Stromstärke im Hauptstromkreis, so würden wir die Anzahl der den Strom führenden Ionen verdoppeln, falls der Gradient überall derselbe blieb. Das letztere ist nun nahezu im Faradayschen dunklen Raum und im Glimmlicht erfüllt; im positiven Licht nimmt er mit der Stromstärke etwas ab. Es war also zu erwarten, daß die

Polarisation mit der Stromstärke im Hauptstromkreis zunehmen würde. Die Messungen im positiven Licht ergaben folgendes Resultat.

Tabelle XI.

$p = 0{,}33$ mm. $L = 30$ mm.

$I = 0{,}42$ M.-A. $\Pi = 460$ V.		$I = 0{,}9$ M.-A. $\Pi = 510$ V.		$I = 1{,}75$ bis $1{,}80$ M.-A. $\Pi = 590$ V.	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
0,57	1,5 Volt	1,41	1,4 Volt	1,7	0,8 Volt
2,54	4,5	3,74	3,6	3,8	2,4
3,16	5,2	6,21	4,7	6,9	3,2
4,43	7,0	9,89	6,6	11,1	4,6
5,80	8,3	12,30	7,8	14,3	5,5
7,6	10,2	16,2	9,7	18,8	6,7
11,1	14,6	21,6	11,9	23,9	7,3
15,3	15,0	29,4	12,6	28,7	8,8
19,2	17,8	35,9	14,1*	35,0	9,5
22,3	19,5*	40,2	15,3	46,1	10,9
27,0	21,0	52,6	17,1	58,3	12,5
40,3	22,1	71,0	19,0	63,1	13,4
−0,41	7,3	80,2	19,8	76,5	14,8
−0,56	20,1	−0,25	2,0	98,3	16,0
−0,73	32,4	−0,28	2,2	99,0	15,8
−0,82	40,9	−0,38	3,7	−0,41	1,1
−0,97	48,3	−0,74	11,4	−0,87	3,6
		−0,85	15	−1,1	5,8
		−1,09	28	−1,6	9
		−1,32	33	−2,1	17
		−1,51	57	−2,4	27
				−2,6	29
				−2,8	34
				−3,1	42
				−3,3	51

Aus der Tabelle geht hervor: *im positiven Licht ist die zu einer bestimmten Polarisationsspannung gehörige Stromstärke sehr angenähert proportional der Stromstärke des Hauptstromkreises.*

§ 13. *Beziehung zwischen Polarisation und Stromstärke des Hauptstromkreises im Faradayschen dunklen Raum.* Die nachfolgende Tabelle gibt die Messungen wieder.

Tabelle XII.

$L = 10$ mm. $p = 0{,}32$ mm.

$I = 0{,}41$ M.-A. $\Pi = 470$ V.		$I = 0{,}86$ M.-A. $\Pi = 490$ V.		$I = 1{,}5$ M.-A. $\Pi = 530$ V.	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
0,62	1,6 Volt	0,53	1,1 Volt	1,4	0,8 Volt
3,91	9,2	4,82	2,6	9,5	1,9
13,1	12,6	9,3	4,1	16,2	2,5
15,0	15,1*	13,6	5,9	21,0	3,6
18,4	16,5	19,4	7,7	26,4	4,6
21,2	17,3	25,3	9,9	29,8	5,9
23,6	19,0	31,0	10,7	41,0	7,8
27,8	21,7	39,6	14,4*	50,0	8,8
36,2	21,9	50,5	16,2	65,0	13,1*
45,8	22,1	63,2	16,9	72,6	13,9
63,0	22,6	78,9	17,7	98,0	16,8
306,0	23,1	95,1	18,4	140,2	18,1
		110,8	19,3	294,0	19,8
		125,0	20,2	−0,23	2,4
		206,5	20,5	−0,45	9,1
		358,0	21,6	−0,52	10,9
		−0,10	2,6	−0,66	15,8
		−0,27	12,1	−0,77	20,5
		−0,35	15,8	−0,92	30,1
		−0,43	20,1	−1,11	34,3
		−0,68	36,2	−1,60	55,8
		−0,99	60,6	−2,08	76,6

Auch hier findet sich dasselbe Gesetz, welches für das positive Licht galt, wieder bestätigt (vgl. § 12).

§ 14. *Beziehung zwischen Polarisation und Stromstärke des Hauptstromkreises im Glimmlicht.* Die nachfolgende Tabelle ist wie die vorhergehende angeordnet, nur habe ich als letzte Kolumne noch die aus der Brückenstellung abgeleiteten Polarisationen mit beigefügt, damit man ersehen kann, zu wie unrichtigen Resultaten man kommen kann, wenn man nur diese berücksichtigt (vgl. § 5). Die Abweichungen sind besonders groß für größere Stromstärken im Nebenstromkreis. Da Mebius seine Werte für die Polarisation nur aus den Werten berechnet hat, welche er

mittels einer der Brückenmethode analogen Versuchsanordnung erhielt, so sind seine Zahlen für größere Stromstärken wahrscheinlich nicht richtig.

Tabelle XIII.

p = 0,33 mm. L = 10 mm.

I = 0,44 M.-A. Π = 420 V.		**I = 1,6 M.-A. Π = 520 V.**		
$i.10^{-6}$	**E**	**$i.10^{-6}$**	**E**	**E (Brücke)**
1,3	**0,9**	**4,1**	**0,4**	**0,4**
2,4	**1,6**	**10,3**	**1,1**	**1,3**
8,9	**2,3**	**30,7**	**3,0**	**3,3**
17,8	**3,1**	**48,2**	**3,3**	**3,8**
26,3	**3,9**	**60,0**	**3,5**	**6,2**
40,5	**4,5**	**95,2**	**3,6**	**8,1**
83,1	**5,2**	**266,0**	**3,9**	**16,3**
104,0	**6,6**	**– 1,55**	**0,3**	**0,5**
132,4	**8,1**	**– 5,8**	**3,5**	**3,7**
155,9	**9,4**	**– 7,1**	**6,5**	**6,9**
180,2	**10,1**	**– 9,6**	**9,5**	**11,0**
220,4	10,9	– 11,7	14,8	16,7
283,0	13,0	– 14,0	19,7	22,1
– 0,03	0,5	– 14,7	21,2	25,6
– 0,61	2,0	– 18,3	28,6	34,3
– 1,09	4,1	– 20,8	34,7	42,1
– 1,23	5,9	– 25,7	46,4	54,5
– 1,71	7,4			
– 2,14	9,5			
– 2,48	11,8			
– 3,04	13,6			
– 3,60	20,8			
– 4,21	25,3			
– 5,00	33,1			
– 8,6	70,6			

Die Kurven gibt Fig. 5 wieder. Das Bild unterscheidet sich sehr wesentlich von den früher erhaltenen, und zwar hauptsächlich dadurch, daß die Kurve mit der größeren Stromstärke (I = 1,6 M.-A.) ein viel kleineres Maximalanodenpotential hat, als die mit der kleineren Stromstärke; es ist daher natürlich, daß die oberen Teile der Kurve, also die Anodenpotentiale gar

nicht miteinander verglichen werden können. Dagegen zeigen die Kathodenpotentiale wieder dieselbe Gesetzmäßigkeit wie früher: *die zu einer bestimmten Polarisationsspannung gehörige Stromstärke ist sehr angenähert proportional der Stromstärke des Hauptstromkreises.* Nun zeigen alle meine Messungen, daß beim Nullpunkt, wo das Kathodenpotential der Sonde in das Anodenpotential übergeht, kein Knick auftritt. Es muß also die obige Gesetzmäßigkeit auch für sehr kleine (genau unendlich kleine) Anodenpotentiale gelten. Es gilt somit auch im Glimmlicht die früher gefundene Abhängigkeit der Polarisation von der Anzahl der zur Verfügung stehenden Ionen. Ob tatsächlich das maximale Anodenpotential im Glimmlicht verschieden ist, je nach der Stromstärke im Hauptstromkreis, ob nicht vielleicht das Anodenpotential auch hier bis 22 Volt wächst, das zu entscheiden, muß einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

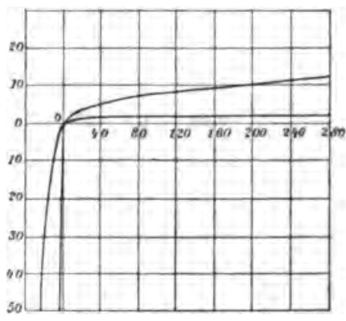


Fig. 5.

§ 15. *Beziehung zwischen Polarisation und Stromstärke des Hauptstromkreises im dunklen Kathodenraum.* Im dunklen Kathodenraum einigermaßen zuverlässige Werte namentlich bei größeren Stromstärken zu erhalten, bereitete sehr große Schwierigkeiten. Um sicher zu sein, daß die Sonde sich nicht im Glimmlicht oder der Grenze des Glimmlichtes befand, mußte der Kathodenraum nicht zu klein sein; es mußte daher ziemlich weit ausgepumpt werden. Im Laufe der Beobachtungsreihe wurde das Vakuum schlechter, damit änderte sich das Gebilde, und Stromstärke und Potentialdifferenz zwischen den beiden Endelektroden des Hauptstromkreises waren häufig am Ende der Beobachtungsreihe nicht identisch mit der am Anfang.

Einigermaßen wurden diese Schwierigkeiten überwunden dadurch, daß ich sehr schnell arbeitete, und nur durch verhältnismäßig wenig Punkte den allgemeinen Verlauf der Kurve festlegte. Die auf- und absteigenden Äste der in Tab. XIV mitgeteilten Kurven stimmen nicht genau miteinander überein,

immerhin läßt sich auch aus diesen Zahlen der Verlauf der Kurve mit großer Sicherheit zeichnen.

Tabelle XIV.

p = 0,09 mm. L = 10 mm.

I = 0,42 M.-A. Π = 780 V.		I = 1,2 M.-A. Π = 1300 V.	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
0,14	16 Volt	0,23	5 Volt
0,21	23	0,48	17
0,38	40	0,61	19
0,45	50	0,84	28
0,56	66	0,98	29
0,67	81	1,24	38
0,75	110	1,43	53
0,88	120	1,85	74
0,84	108	2,07	81
0,93	136	2,26	94
1,18	145	2,54	116
1,21	155	3,33	142
−0,21	32	3,41	148
−0,51	42	−0,24	12
−0,73	64	−0,61	21
−0,98	70	−1,1	29
−1,28	75	−1,4	42

Auf den Verlauf der Kurven werde ich in § 16 zu sprechen kommen. Auch hier zeigt sich deutlich, daß *die zu einer bestimmten elektromotorischen Kraft gehörige Stromstärke des Nebenstromkreises proportional der Stromstärke des Hauptstromkreises ist.*

Ich muß bekennen, daß ich überrascht war, daß dies Gesetz sich auch hier bestätigte, denn bei der größeren Stromstärke im Hauptstromkreis entwickelte sich ein ziemlich intensives Kanalstrahlenbündel, und da diese ionisieren, so glaubte ich, daß die Zahl der Ionen so zunehmen würde, daß die Verhältnisse recht verwickelt werden würden. Daraus, daß dies nicht der Fall ist, läßt sich entnehmen, daß ceteris paribus bei der doppelten Stromstärke die Kanalstrahlen doppelt so intensiv werden und doppelt so stark ionisieren.

§ 16. *Vergleich der Polarisation in verschiedenen Teilen der Entladungsröhre.* Im vorhergehenden sind die Beziehungen zwischen der elektromotorischen Kraft der Polarisation und Stromstärke bei Änderung der Länge der Sonde und der Stromstarke im Hauptstromkreis festgelegt. Die erhaltenen Kurven in den verschiedenen Gebilden der Entladung, also z. B. im

Tabelle XV.

I = 0,81 M.-A. p = 0,21 bis 0,22 mm.

Sonde I Unmittelbar an der Anode		Sonde II Zwischen zwei Schichten		Sonde III Ende der letzten Schicht		Sonde IV Faradays dunkler Raum	
Π = 740 V.		Π = 750 V.		Π = 810 V.		Π = 820 V.	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
	Volt		Volt		Volt		Volt
2,3	1,2	3,5	2,0	4,5	1,8	3,0	1,9
3,7	2,3	4,8	2,6	7,8	2,9	8,5	3,5
5,8	3,1	7,2	5,1	10,2	3,5	11,6	5,1
10,1	4,5	9,8	6,3	15,6	5,4	15,3	6,5
15,2	7,5	14,4	9,1	17,3	6,0	21,6	9,3
21,1	9,0	18,3	10,1	20,5	6,8	25,9	10,9
25,3	11,0	22,2	12,6	23,3	7,6	32,3	82,5
30,9	14,8	26,8	14,8	30,0	8,1	35,0	13,9
34,6	14,2	31,5	15,2	38,0	8,9	49,3	16,6
42,1	15,0	46,3	17,2	46,4	11,4	56,1	17,3
56,4	17,2	57,1	18,0	52,1	12,3	64,8	19,3
60,0	18,7	63,5	19,3	64,0	14,0	74,0	19,9
82,5	20,1	67,0	21,0	75,3	15,2	80,3	20,2
93,9	20,6	80,5	22,1	84,2	15,5	113,0	24,9
−0,12	4	98,0	22,8	99,0	17,1	−0,04	3
−0,18	6	−0,14	3	146,0	22,0	−0,10	11
−0,25	10	−0,19	5	−0,13	8	−0,16	21
−0,34	14	−0,27	8	−0,19	16	−0,19	24
−0,41	20	−0,36	12	−0,27	23	−0,26	33
−0,56	31	−0,48	21	−0,38	32	−0,34	41
−0,61	37	−0,59	27	−0,45	41	−0,39	50
−0,69	46	−0,68	34	−0,56	54		
−0,72	51	−0,70	37				
		−0,82	44				
		−0,89	55				

Tabelle XV (Fortsetzung).

$I = 0{,}81$ M.-V. $p = 0{,}21$ bis 0,22 mm.

Sonde V Dunkler Trennungsraum		Sonde VI Beginn des Glimmlichtes		Sonde VII Glimmlicht (Anfang dunkler Raum)		Sonde VIII Dunkler Kathodenraum	
$\Pi = 780$ V.		$\Pi = 750$ V.		$\Pi = 730$ V.		$\Pi = 680$ V.	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
	Volt		Volt		Volt		Volt
3,97	2,1	9,2	0,7	1,07	2,0	0,21	11
7,3	2,8	24,3	1,2	1,27	2,6	0,38	23
12,4	4,2	35,8	1,7	3,6	4,3	0,46	29
18,6	5,3	63,8	2,0	10,5	6,3	0,61	40
26,2	6,9	84,1	2,4	17,7	7,1	0,73	46
33,4	7,6	108,4	2,7	31,3	8,0	0,82	58
50,2	8,6	151,3	3,9	54,8	9,5	0,97	67
55,1	8,9	234,0	4,5	77,0	10,2	1,20	87
64,1	11,3	280,9	6,1	101,5	10,9	1,31	97
90,4	14,6	302,1	7,2	140,0	11,8	1,39	102
115,1	17,9	342,0	8,6	180,0	12,9	1,59	126
146,6	19,4	470,0	13,8	257,0	14,0	1,83	146
183,1	21,1	− 5,1	4	407,0	15,3	−0,13	11
251,0	24,2	− 6,2	11	− 2,8	2,7	−0,19	17
338,0	24,2	− 6,9	19	− 6,1	5	−0,25	21
−0,08	6	− 7,6	22	− 8,4	7	−0,31	26
−0,13	13	− 9,8	30	−10,6	8	−0,53	40
−0,18	18	−10,0	32	−18,0	17	−0,62	51
−0,26	29	−13,1	48	−46	48	−0,85	64
−0,34	41	−16,3	71				
−0,35	42						
−0,57	61						

positiven Licht, Glimmlicht, Faradays dunklen Raum und dunklen Kathodenraum lassen sich aber nicht miteinander vergleichen, weil die Drucke und die Potentialdifferenzen zwischen den Enden der Röhre häufig verschieden waren. In Tab. XV teile ich noch eine Beobachtungsreihe mit, bei der die Längen und Dicken der Sonden stets gleich waren und ebenso Druck und Stromstärke des Hauptstromkreises. Alle Sonden wurden neu geputzt, auch wurde nach jeder Beob-

achtungsreihe das Rohr mit frischer Luft mehrere Male nacheinander gefüllt und ausgepumpt. Im Rohr waren fünf Schichten vorhanden. Die Lage der einzelnen Sonden ist besonders angegeben.

Den Verlauf der Kurven stellt Fig. 6 dar, in der + das positive Licht, D. R. Faradays dunkler Raum, Gl. Glimmlicht und K. D. R. dunkler Kathodenraum bedeuten.

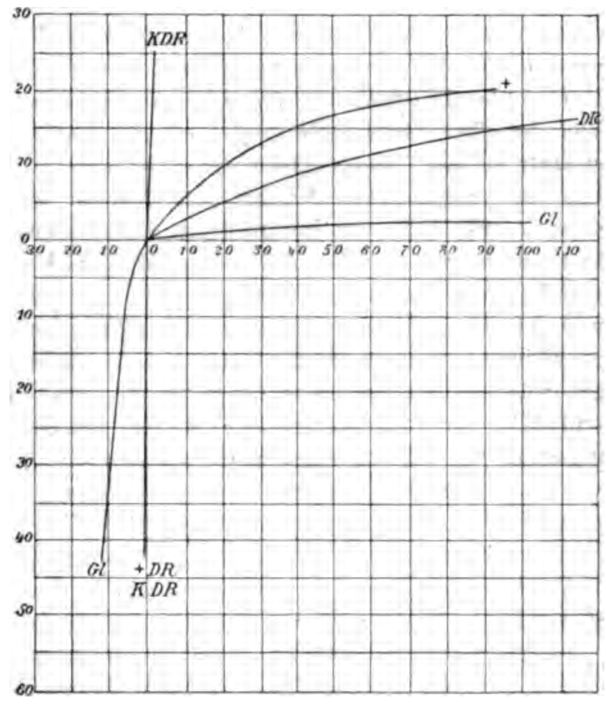


Fig. 6.

Aus denselben lassen sich folgende Regelmäßigkeiten entnehmen:

1. *Im positiven Licht ist das Anodengefälle für kleine Stromstärken klein, wächst aber mit der Stromstärke und nähert sich einem Maximum dem normalen Anodengefälle.*

2. *Das Kathodengefälle im positiven Licht, welches für kleine Stromstärken ebenfalls sehr klein ist, nimmt mit der Stromstärke sehr rasch zu.*

3. *Im dunklen Zwischenraum verläuft das Anoden- und Kathodengefälle so, als wenn die Anode sich im positiven Licht befindet.*

4. *Im Glimmlicht wachsen Kathoden- und Anodengefälle viel langsamer mit wachsender Stromstärke als im positiven Licht oder im dunklen Zwischenraum.* Ob das Anodengefälle sich demselben Grenzwert nähert wie im positiven, läßt sich aus den Versuchen nicht entnehmen.

5. *Im dunklen Kathodenraum ist das Anoden- und Kathodengefälle viel größer als in den übrigen Teilen der Entladung.*

6. *Das Anodengefälle ist im dunklen Kathodenraum bei einer und derselben Stromstärke größer als das Kathodengefälle im Gegensatz zu den übrigen Teilen der Entladung.*

Was den allgemeinen Verlauf der Kurven betrifft, so zeigt sich, so weit man das kontrollieren kann, meistens eine Übereinstimmung mit den Resultaten von Mebius.[1]) Dagegen zeigen sich aber auch große Differenzen. So findet z. B. Mebius, daß das Anodengefälle im dunklen Zwischenraum bedeutend kleiner ist, als wenn die Sonde sich im positiven Licht befindet, während ich ungefähr beide gleich finde. Übereinstimmend mit mir findet Mebius, daß das Kathodengefälle viel langsamer mit zunehmender Stromstärke wächst, wenn die Sonde sich im negativen Glimmlicht befindet, als wenn sie sich im positiven Lichte oder im dunklen Zwischenraum befindet, aber abweichend von mir soll das Anodengefälle im negativen Glimmlicht wie im positiven Licht verlaufen. Ich vermag vorläufig keine genügende Erklärung für diese und andere Abweichungen zu geben. Auch ich habe in drei Beobachtungsreihen im dunklen Zwischenraum ähnliche niedrige Werte für das Anodenpotential erhalten wie Mebius, dann befand sich aber die Sonde schon dem Glimmlicht sehr nahe, so daß die Vermutung naheliegt, daß sie von Glimmlichtstrahlen getroffen wurde. Anfangs glaubte ich, daß Mebius die beiden Beobachtungsreihen miteinander verwechselt hat, aber dagegen spricht sein § 11, in dem er direkt beweist, daß im dunklen Zwischenraume solche niedrige Anodenpotentiale vorhanden sind. Wahrscheinlich spielen hier noch unver-

1) Satz 1, 2, 5 und 6 sind bereits von Mebius gefunden worden.

standene Nebeneinflüsse eine Rolle; als solche kämen in Betracht der Druck, Geschwindigkeit der Ionen etc., deren Einfluß ich in einer späteren Arbeit aufzuklären gedenke.

§ 17. *Polarisation und Transversalstrom.* Wie schon in der Einleitung erwähnt, fand Hittorf zuerst, daß der Durchgang einer kontinuierlichen Entladung den Zustand des in der Entladungsröhre enthaltenen Gases derart verändert, daß auch in transversaler Richtung Entladungen leicht hindurchgehen. Von einer Reihe von Forschern sind aus der Größe des Transversalstromes Schlüsse auf die Anzahl der Ionen gezogen worden. Danach müßte die Zahl der Ionen am größten im Glimmlicht und am kleinsten im dunklen Kathodenraum sein, sie müßte kleiner in dem dunklen Zwischenraum zwischen zwei Schichten sein, als im leuchtenden Teil etc. Gegen diese Schlüsse erheben sich eine große Reihe von Bedenken. Denn da die Träger des Stromes die Ionen sind, so muß an den Stellen, wo der Gradient klein ist, die Anzahl der Ionen groß sein und umgekehrt. Berechnet man hieraus die relative Anzahl der Ionen in den verschiedenen Gebilden der Entladung, so erhält man Zahlen, welche von denen mit Hilfe der Transversalströme erhaltenen abweichen. Eine genügende Erklärung hierfür ist bisher noch nicht gegeben worden.[1])

Aus dem Vorhergehenden kann man sich wenigstens schon einigermaßen Regenschaft geben, weswegen an den verschiedenen Teilen der Entladung die Transversalströme verschieden groß sind. Die Sonde polarisiert sich. Dort wo die Polarisation am kleinsten ist, also im Glimmlicht, dort ist infolgedessen der Transversalstrom am größten; dort wo die Polarisation am größten ist, also im dunklen Kathodenraum, dort ist der Transversalstrom am kleinsten. Nun sprechen die obigen Beobachtungen zugunsten meiner Auffassung, daß diese Polarisation von der Verarmung an Ionen herrühre. Ist die Sonde z. B. negativ geladen, so wird sie die positiven Ionen anziehen; dieselben werden ihre Elektrizität abgeben und hierdurch kommt der Strom zustande. Es tritt eine Verarmung an positiven Ionen ein und zu gleicher Zeit bildet sich gleichsam ein schützender Mantel von den abgestoßenen negativen Ionen

1) Vgl. J. J. Thomson, The discharge of electricity through gases.

um die Sonde. Offenbar wird bei ein und derselben Stromstärke die Verarmung um so kleiner sein, je größer die Anzahl der zur Verfügung stehenden Ionen ist. Man müßte somit aus der Polarisation bez. Verarmung auf die Zahl der Ionen schließen können. Es wäre dies richtig, wenn die Polarisation nur eine Funktion der Zahl der Ionen wäre, aber *sie hängt außerdem noch von der Geschwindigkeit der Ionen ab*, die wegen des wechselnden Gradienten in den verschiedenen Teilen der Entladung verschieden ist. Wie die Polarisation von der Geschwindigkeit abhängt, das läßt sich theoretisch nur schwer übersehen. Hier müssen neue Versuche gemacht werden, über die ich in einer folgenden Abhandlung zu berichten hoffe. Jedenfalls läßt sich, bevor der Einfluß der Geschwindigkeit auf die Polarisation ermittelt worden ist, kaum ein sicherer Schluß über die relative Anzahl der Ionen in den verschiedenen Entladungsgebilden fällen.

Über die Natur des Anoden- und Kathodenpotentiales sind eine Reihe von Hypothesen aufgestellt worden. Die Diskussion derselben möchte ich ebenfalls auf meine spätere Abhandlung verschieben.

Resultate.

1. Wenn man in einer stromdurchflossenen Entladungsröhre eine Sonde anbringt, und durch diese einen Teil des Hauptstromes hindurchgehen läßt, so polarisiert sich dieselbe. Diese Polarisation rührt wahrscheinlich nicht von einer chemischen Veränderung der Elektrode her, wie bei der galvanischen Polarisation, sondern von der Verarmung an Ionen.

2. Ändert man die Länge der Sonde, so gilt das Gesetz: Bei gleicher Stromdichte des durch die Sonde fließenden Stromes ist die elektromotorische Kraft der Polarisation die gleiche.

3. Ändert man die Stromstärke im Hauptstromkreis, so ist bei der gleichen elektromotorischen Kraft der Polarisation die Stromstärke im Nebenstromkreis sehr angenähert proportional der Stromstärke im Hauptstromkreis.

4. Im positiven Licht ist das Anodengefälle für kleine Stromstärken klein, wächst aber mit der Stromstärke und nähert sich einem Maximum, dem normalen Anodengefälle.

5. Das Kathodengefälle im positiven Licht, welches für kleine Stromstärken ebenfalls sehr klein ist, nimmt mit der Stromstärke sehr rasch zu.

6. Im dunklen Zwischenraum verläuft das Anoden- und Kathodengefälle so, als wenn die Sonde sich im positiven Licht befindet.

7. Im Glimmlicht wachsen Kathoden- und Anodengefälle viel langsamer mit wachsender Stromstärke als im positiven Licht oder im dunklen Zwischenraum.

8. Im dunklen Kathodenraum ist das Anoden- und Kathodengefälle viel größer als in den übrigen Teilen der Entladung.

9. Das Anodengefälle ist im dunklen Kathodenraum bei einer und derselben Stromstärke größer als das Kathodengefälle im Gegensatz zu den übrigen Teilen der Entladung.

Königsberg i. Pr., Physikal. Kabinett der Universität, 17. Oktober 1905.

(Eingegangen 19. Oktober 1905.)

---

2. F. E. Neumanns Methode zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit gut leitender Körper in Stab- und Ringform und ihre Durchführung an Eisen, Stahl, Kupfer, Silber, Blei, Zinn, Zink, Messing, Neusilber;

von Gerhard Glage.

(Auszug aus der Königsberger Dissertation.)

Die im Jahre 1862 erfolgte Publikation Neumanns über seine Methode, welche schon einige Zeit im Besitze ihres Urhebers gewesen sein dürfte[1]), scheint durch eine 1861 von Ångström veröffentlichte Methode[2]) veranlaßt zu sein, die in gleicher Weise an mit der Zeit veränderliche Temperaturzustände knüpft. Während aber Ångström seiner Methode periodisch verlaufende Temperaturzustände zugrunde legt, geht Neumann 1862 von einfach ablaufenden Temperaturzuständen aus. Neumann scheint erst später in seinen Vorlesungen und Seminaren auf die Ångströmsche Methode eingegangen zu sein, hierbei dieselbe dann umgestaltet und in die Form gebracht zu haben, in der sie später durch H. Weber[3]) (Braunschweig) eingehend untersucht ist.

1) F. E. Neumann, Ann. de chim. et de phys. (III) **66.** p. 183. 1862 (und Phil. Mag. (4) **25.** p. 63. 1863). p. 184 spricht Neumann davon, daß er die ersten Beobachtungen in dieser Richtung vor 3 Jahren, also 1859 gemacht habe.

2) K. Angström, Öfvers. af Förhandl. 1861. p. 3; Pogg. Ann. **114.** p. 513. 1861; **118.** p. 423. 1863; **123.** p. 628. 1864. Den an die Publikation von Angström anknüpfenden Erörterungen von Dumas (Fortschr. d. Phys. **17.** p. 403. 1861; **18.** p. 362. 1862; **20.** p. 396. 1864 und Pogg. Ann. **129.** p. 272 u. 393. 1866) und Wangerin (Fortschr. d. Phys. **22.** p. 319. 1866) hat nach Mitteilungen des letzteren Neumann ferngestanden. Diese sind lediglich durch die Redaktion der Fortschritte angeregt worden.

3) H. Weber (Braunschweig), Pogg. Ann. **146.** p. 257. 1872, sagt, daß seine Methode „F. Neumann in seinen Vorlesungen gegeben hat" (vgl. p. 258).

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich lediglich um die ursprüngliche Neumannsche Methode, wie sie durch H. F. Weber (Zürich), Kirchhoff und Helmholtz eine Darstellung gefunden hat.[1]) Weber und Kirchhoff scheinen jedoch ein besonders charakteristisches Moment übersehen zu haben: *Die Unabhängigkeit der Methode von einem thermisch genau definierten Anfangszustande.* In einer solchen Unabhängigkeit liegt aber praktisch ein außerordentlich großer Vorteil, denn es dürfte experimentell sehr schwierig sein, gerade für gut leitende Körper einen für Meßzwecke thermisch genau definierten Anfangszustand herzustellen, der sich zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit eignet.[2])

Neumanns Abhandlung vom Jahre 1862 ist zu kurz, als daß sie über den hier hervorgehobenen Punkt Auskunft erteilte. Auch von Schülern Neumanns ist in den im Archiv des math.-phys. Laboratoriums zu Königsberg aufbewahrten Seminararbeiten vom Jahre 1866 stets auf den Anfangszustand zurückgegangen. Betrachtet man aber die noch vorhandenen Vorrichtungen, an denen Neumann seine Messungen angestellt hat, so scheint jeder Zweifel ausgeschlossen, daß sich Neumann nicht von der Kenntnis des schwer zu definierenden Anfangszustandes befreit haben sollte.

Hr. Prof. P. Volkmann hat auf diesen Umstand in seinen Vorlesungen besonders hingewiesen. Eine eventuelle Kenntnis des Anfangszustandes wird nur für gewisse physikalische Nebenfragen von Bedeutung sein — besonders für die Frage, ob die Zeit hinreichend vorgeschritten ist, um sich auf das erste Glied der in Betracht kommenden, stark konvergenten Reihen beschränken zu können. Lediglich an dieses erste Glied knüpft

1) H. F. Weber (Zürich), Berl. Monatsberichte 1880. p. 457 und Vierteljahrsschr. d. Naturf. Ges. Zürich 25. p. 26. 1880; G. Kirchhoff, Vorles. 4. p. 35. 1894; H. v. Helmholtz, Vorles. 6. p. 75. 1903. Hågström hat in seiner Dissertation (Upsala 1891) „Über Ångströms und Neumanns Methode" die Neumannsche Methode der ersten Form nur zu Vorstudien verwendet, ohne ihr gerecht zu werden; die Methode der zweiten Form behandelt er gar nicht.

2) In der zitierten Abhandlung von H. Weber (Braunschweig) erscheint die spätere, hier nicht zur Darstellung kommende Neumannsche Methode der zweiten Form gleichfalls vom Anfangszustande unabhängig.

Neumanns Methode. In dem Verhältnis dieses ersten Gliedes zu zwei verschiedenen, hinlänglich vorgeschrittenen Zeiten fällt aber der vom Anfangszustande abhängige und aus diesem nach dem Lagrangeschen Verfahren bestimmbare Koeffizient heraus.

I. Theoretische Darstellung der Methode.

Wie die von Hrn. Hecht[1]) behandelte Methode für schlecht leitende Körper, so knüpft auch die für gut leitende Körper an die Messung mit der Zeit veränderlicher Temperaturzustände. Während jene Methode die Kugel- und Würfelform bevorzugt, wählt diese die Stab- und Ringform zum Ausgangspunkte. Der Grundgedanke der Methode ist folgender: Ein Stab (bez. Ring) wird an einem Ende (bez. Querschnitte) bis zu einem beliebigen — jedoch nach verschiedenen Richtungen hin zweckmäßig zu wählenden — Anfangszustande erwärmt. Sodann läßt man ihn erkalten — frei ausstrahlen — und bestimmt nach Verlauf von wenigen Minuten in bestimmten Zeitintervallen die Änderung von Summe und Differenz der Temperaturen zweier in der Nähe der Stabenden befindlichen (bez. diametral gegenüberliegender) Querschnitte. Wie man bereits ohne jede Rechnung erkennt, liefern die so beobachteten Differenzen die innere, die Summen hingegen die äußere Leitfähigkeit.

Es bedeutet im folgenden: $b = h/k$ das Verhältnis der äußeren zur inneren Wärmeleitfähigkeit, ϱ die Dichte, c die spezifische Wärme, $a^2 = k/(\varrho . c)$ die Temperaturleitfähigkeit, p den Umfang und q den Flächeninhalt eines Querschnittes, f^2 eine Abkürzung für $a^2 . b . p/q$, l die Länge des Stabes bez. Ringes, wobei unter „Ring" stets ein beliebig gekrümmter, in sich zurücklaufender Stab verstanden werden soll. Stellt ferner t die Zeit dar, gerechnet vom Augenblick des Unterbrechens der Erwärmung, und liegt der Ursprung des Koordinatensystems im Mittelpunkte derjenigen Fläche des Stabes bez. desjenigen Querschnittes des Ringes, durch dessen Erhitzen die Erwärmung eingeleitet ist, so bezeichne z den Abstand eines variabelen Querschnittes des Stabes von der Endfläche

1) H. Hecht, Diss. Königsberg 1903; Ann. d. Phys. **14**. p. 1008. 1904.

$z = 0$, bez. die Bogenlänge derjenigen Linie, welche die Mittelpunkte der einzelnen Ringquerschnitte enthält, gerechnet von einem variabelen Querschnitte bis zu dem durch $z = 0$ bestimmten. Hinsichtlich der Numerierung der Formeln sei noch bemerkt, daß sich der Index a stets auf den Stab, der Index b auf den Ring bezieht.

A. Schematische Theorie.

Betrachten wir zunächst die einzelnen Querschnitte des Stabes bez. Ringes als isotherme Flächen, so gilt für die lineare Bewegung der Wärme in Richtung der z die Differentialgleichung:

(1) $$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - f^2 . \vartheta .$$

Der freien Ausstrahlung an der Mantelfläche ist in dieser Differentialgleichung bereits durch den Term $f^2 . \vartheta$ Rechnung getragen. Außerdem wird noch beim Stabe durch die beiden Endquerschnitte Wärme an die Umgebung abgegeben, während beim Ringe die Temperatur in bezug auf z um die Länge l periodisch ist, und Punkte, die von der Erwärmungsstelle in Richtung der positiven und negativen z den gleichen Abstand haben, sich auch auf der gleichen Temperatur befinden. Es kommen somit zu (1) noch die beiden Bedingungsgleichungen hinzu:

(2a) $$\text{für } z = 0: \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = + b . \vartheta ,$$

(3a) $$\text{für } z = l: \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = - b . \vartheta ,$$

worin ϑ von der Umgebungstemperatur aus zu rechnen ist:

(2b) $$\vartheta_{z = + z} = \vartheta_{z = - z} ,$$

(3b) $$\vartheta_{z = z} = \vartheta_{z = z + l} .$$

Durch diese drei Gleichungen kann bereits die Temperatur an irgend einer Stelle des Stabes bez. Ringes als Funktion des Ortes und der Zeit bestimmt werden. Diese Rechnungen finden sich z. B. in Kirchhoffs Vorlesungen 4. p. 35—40. Man erhält:

(4a) $$\vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n . e^{-\beta_n t} . \left\{ \cos(\gamma_n . z) + \frac{b}{\gamma_n} . \sin(\gamma_n . z) \right\} ,$$

(4b) $$\vartheta = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cdot e^{-\beta_n t} \cdot \cos(\gamma_n \cdot z),$$

wenn

(5) $$\beta_n = a^2 \cdot \gamma_n^2 + f^2$$

und die A_n Konstante bedeuten, die sich aus dem Anfangszustande nach dem Lagrangeschen Verfahren ableiten lassen (vgl. Abschnitt III). Die γ_n finden ihre Bestimmung durch die Gleichungen (3). Beim Stabe gehorchen sie der transzendenten Gleichung:

(6a) $$\operatorname{tg}(\gamma_n \cdot l) = \frac{2 \cdot \gamma_n \cdot b}{\gamma_n^2 - b^2},$$

worin $\gamma_n = 0$ auszuschließen ist und $\gamma_n \cdot l$ mit wachsendem n gegen $(n-1) \cdot \pi$ konvergiert.

Beim Ringe folgt aus $\cos(\gamma_n \cdot z) = \cos\big(\gamma_n \cdot (z + l)\big)$:

(6b) $$\gamma_n = n \cdot \frac{2\pi}{l},$$

worin n eine ganze positive Zahl oder Null, also $\gamma_n = 0$ zuzulassen ist. Daß beim Ringe in (4b) die mit einem Sinus behafteten Terme fortfallen, folgt unmittelbar aus (2b), während (2a) beim Stabe den Koeffizienten dieser Terme zu b/γ_n bestimmt.

Für den Stab ist: $\cos(\gamma_n \cdot z) + (\beta/\gamma_n) \cdot \sin(\gamma_n \cdot z) = (-1)^{n+1}$ für $z = l$ und $= +1$ für $z = 0$. Somit wird:

(7a) $$\vartheta_{z=0} = \sum_{n=1}^{n=\infty}{}' A_n \cdot e^{-\beta_n t},$$

(8a) $$\vartheta_{z=l} = \sum_{n=1}^{n=\infty}{}' A_n \cdot e^{-\beta_n t} \cdot (-1)^{n+1},$$

(7b) $$\vartheta_{z=0} = \sum_{n=0}^{n=\infty}{}' A_n \cdot e^{-\beta_n t},$$

(8b) $$\vartheta_{z=l/2} = \sum_{n=0}^{n=\infty}{}' A_n \cdot e^{-\beta_n t} \cdot (-1)^n.$$

Durch Addition bez. Subtraktion von (7) und (8) erhält man noch stärker konvergente Reihen, da diese nur die Hälfte der Glieder der vorigen enthalten. Wie im Abschnitt IV gezeigt werden wird, ist eine Beschränkung auf das erste Glied dieser

Reihen sogar schon für kleine Werte der Zeit t gestattet, und es folgt somit:

$$(9\text{a})\qquad \tfrac{1}{2}\cdot\{\vartheta_{z=0}+\vartheta_{z=l}\} = A_1\cdot e^{-\beta_1 t},$$

$$(10\text{a})\qquad \tfrac{1}{2}\cdot\{\vartheta_{z=0}-\vartheta_{z=l}\} = A_2\cdot e^{-\beta_2 t},$$

$$(9\text{b})\qquad \tfrac{1}{2}\cdot\{\vartheta_{z=0}+\vartheta_{z=l/2}\} = A_0\cdot e^{-\beta_0 t},$$

$$(10\text{b})\qquad \tfrac{1}{2}\cdot\{\vartheta_{z=0}-\vartheta_{z=l/2}\} = A_1\cdot e^{-\beta_1 t}.$$

Beobachtet man eine Reihe von Summen und Differenzen zu verschiedenen Zeiten, so heben sich durch Division der beiden zu zwei verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 an demselben Punkte gefundenen Summen bez. Differenzen die A_n heraus; und man erhält unabhängig von A_n, also auch *unabhängig vom Anfangszustande*:

$$(11\text{a})\qquad \beta_1 = \frac{\ln\{\vartheta_{z=0}+\vartheta_{z=l}\}_{t_1} - \ln\{\vartheta_{z=0}+\vartheta_{z=l}\}_{t_2}}{t_2 - t_1},$$

$$(12\text{a})\qquad \beta_2 = \frac{\ln\{\vartheta_{z=0}-\vartheta_{z=l}\}_{t_1} - \ln\{\vartheta_{z=0}-\vartheta_{z=l}\}_{t_2}}{t_2 - t_1},$$

$$(11\text{b})\qquad \beta_0 = \frac{\ln\{\vartheta_{z=0}+\vartheta_{z=l/2}\}_{t_1} - \ln\{\vartheta_{z=0}+\vartheta_{z=l/2}\}_{t_2}}{t_2 - t_1},$$

$$(12\text{b})\qquad \beta_1 = \frac{\ln\{\vartheta_{z=0}-\vartheta_{z=l/2}\}_{t_1} - \ln\{\vartheta_{z=0}-\vartheta_{z=l/2}\}_{t_2}}{t_2 - t_1}.$$

Da nun a) $\beta_2-\beta_1=a^2.(\gamma_2^2-\gamma_1^2)$ bez. b) $\beta_1-\beta_0=a^2.(\gamma_1^2-0)$, so erhält man aus den beobachteten Änderungen der Summen und Differenzen das gesuchte a^2, sobald die γ bekannt sind. Während sich diese beim Ringe ohne weiteres aus der Länge l ergeben, sind sie beim Stabe aus der transzendenten Gleichung (6a) bestimmbar, wenn man mit Näherungswerten für b in die Rechnung hineingeht.

Aus (6a) folgt durch Einführen des halben Winkels:

$$\operatorname{tg}\left(\gamma_n\cdot\frac{l}{2}\right) = +\frac{b}{\gamma_n} \quad \text{für ungerade Quadranten,}$$

$$\operatorname{tg}\left(\gamma_n\cdot\frac{l}{2}\right) = -\frac{\gamma_n}{b} \quad \text{für gerade Quadranten.}$$

Geht man also mit einem Näherungswerte für b in die Rechnung hinein, so bestimmt sich γ_1 durch $\operatorname{tg}(\gamma_1\,.\,l/2)=b/\gamma_1$ und γ_2 durch $\operatorname{tg}(\gamma_2\,.\,l/2)=-\gamma_2/b$. Diesen Weg zur Berechnung der γ_n muß man einschlagen, wenn nur $\vartheta_{z=0}$ und $\vartheta_{z=l}$ beobachtet werden. In dieser Weise hat aller Wahrschein-

lichkeit nach Neumann die γ bestimmt, wenigstens nach den in seinem Nachlaß vorhandenen Stäben zu schließen. In den meisten derselben befanden sich nur an zwei Stellen Thermoelemente. Nun hat jedoch Kirchhoff[1]) gezeigt, daß sich die Rechnung wesentlich vereinfachen läßt, wenn man außer $\vartheta_{z=0}$ und $\vartheta_{z=l}$ auch noch die Temperatur in der Mitte des Stabes $\vartheta_{z=l/2}$ beobachtet. Kirchhoff leitet ab, daß

$$\frac{\vartheta_{z=0} + \vartheta_{z=l}}{2 \,.\, \vartheta_{z=l/2}} = \cos . (\gamma_1 \,.\, l/2)$$

ist für solche Werte t, für die die Gleichungen (9) und (10) gelten. Nachdem man durch diesen Quotienten γ_1 bestimmt hat, folgt b aus $\operatorname{tg}(\gamma_1 \,.\, l/2) = b/\gamma_1$ und schließlich γ_2 aus $\operatorname{tg}(\gamma_2 \,.\, l/2) = -\gamma_2/b$.

B) Abweichungen von der schematischen Theorie.

1. Abweichungen von der schematischen Theorie infolge des endlichen Querschnittes.

Es kann fraglich erscheinen, ob bei dicken Stäben und Ringen die einzelnen Querschnitte noch als isotherme Flächen angesehen werden dürfen.

H. F. Weber[2]) bejaht dieses und erwähnt, „daß die früher allgemein verbreitete Auffassung: Die Querschnitte müßten außerordentlich klein sein, kleine Bruchteile eines Quadratzentimeters betragen, damit die Wärmebewegung als eine lineare betrachtet werden dürfte, auf einem Irrtum beruhe.“ Als Beispiel führt Weber an, „daß ein einseitig erwärmter Kupferstab einen quadratischen Querschnitt von 10 cm Höhe haben darf, ohne daß die größte in einem Querschnitte vorkommende Temperaturdifferenz den 1000. Teil der mittleren Temperatur des Querschnittes übersteigt.“

Eine rechnerische Behandlung des Wärmeleitproblems für Stäbe mit endlichem Querschnitte ist für den *rechteckigen* Querschnitt durch Kirchhoff[3]) gegeben. Was den *kreisförmigen* Querschnitt betrifft, so ist von Fourier[4]) die radiale

1) G. Kirchhoff, Vorles. 4. p. 37. 1894.

2) H. F. Weber, Berl. Monatsber. 1880. p. 461.

3) G. Kirchhoff, l. c. p. 41.

4) Fourier, Theorie der Wärme (deutsche Ausgabe von Weinstein) p. 253. 1884.

Wärmebewegung in einem unendlich langen Zylinder wohl durchgeführt worden; jedoch sind die gegebenen Resultate derart kompliziert, daß dieselben kaum eine Anschauung über die in Betracht kommenden Größenordnungen geben können.

Da ich außer dieser Arbeit von Fourier in der Literatur nichts über den kreisförmigen Querschnitt habe finden können, so habe ich in meiner Dissertation (vgl. p. 16—23), ausgehend von der für ein allseitig unendlich ausgedehntes Medium gültigen Differentialgleichung

$$(13)\qquad \frac{\partial \vartheta}{d t} = a^2 \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right\},$$

die Rechnung für Stab und Ring völlig parallel durchgeführt. Ich erhielt:

$$(14a)\qquad \vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ A_n \cdot e^{-\beta_n t} \left[\cos(\gamma_n \cdot z) + \frac{b}{\gamma_n} \cdot \sin(\gamma_n \cdot z) \right] \cdot P_n \right\},$$

$$(14b)\qquad \vartheta = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ A_n \cdot e^{-\beta_n t} \cdot \cos(\gamma_n \cdot z) \cdot P_n \right\},$$

worin

$$(15)\qquad P = J^0(\gamma' \cdot r),$$

d. h. die Besselsche Zylinderfunktion 0ter Ordnung und 1ter Art von dem Argumente $\gamma' . r$ ist. γ' ist eine aus der Grenzbedingung an der Mantelfläche zu bestimmende Konstante.

Als Bestimmungsgleichung für γ' ergibt sich:

$$(16)\qquad -\frac{\partial J^0(\gamma' . r)}{\partial r} = b \cdot J^0(\gamma' . r),$$

so daß

$$(17)\qquad \gamma'^2 = \frac{2^2 . \Gamma}{R^2},$$

worin Γ Wurzel folgender Gleichung ist:

$$(18)\qquad \frac{b . R}{2} = \cfrac{\Gamma}{1 - \cfrac{\Gamma}{2 - \cfrac{\Gamma}{3 - \cfrac{\Gamma}{4 \ldots}}}}$$

und R den Radius des Querschnittes angibt.

Je weiter die Zeit der Abkühlung vorgeschritten ist, desto angenäherter wird ϑ durch die Glieder dargestellt, für die γ' den kleinsten Wert hat. Jedenfalls werden diese Glieder die

charakteristische Abweichung von der schematischen Theorie geben.

Da bei der Kleinheit von b im allgemeinen $b.R/4$ gegenüber 1 vernachlässigt werden kann (für Eisenstab I ist z. B.: $b = 0{,}0020$, $R = 0{,}68_5$, also: $b.R/4 = 0{,}00034$), so dürfen wir setzen:

(19) $$\Gamma_{\text{min.}} = \frac{b.R}{2}.$$

Eine mathematisch strenge Bestimmung von Γ würde physikalisch gar keinen Wert haben, weil sie keine größere Genauigkeit liefern könnte.

Der kleinste Wert von γ wird:

(20) $$\gamma'_{\text{min.}} = \frac{2.b}{R}.$$

Die wesentliche Abweichung von der schematischen Theorie ist somit gegeben durch:

$$P = 1 - \frac{\gamma'^2_{\text{min.}} . r^2}{2^2}$$

oder

(21) $$P = 1 - \frac{b}{R} \cdot \frac{r^2}{2}.$$

Um eine gute Anschauung von den hier in Betracht kommenden Größenverhältnissen zu erhalten, bilden wir ϑ für die Achse und die Peripherie ($r = R$). Es folgt unmittelbar:

(22) $$\vartheta_{\text{Peripherie}} = \vartheta_{\text{Achse}} \cdot \left\{1 - \frac{b.R}{2}\right\},$$

(23) $$\frac{\vartheta_{\text{Achse}} - \vartheta_{\text{Peripherie}}}{\vartheta_{\text{Achse}}} = \frac{b.R}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{für Eisenstab I} = 0{,}00068, \text{ für} \\ \text{besser leitende Materialien kleiner} \end{array} \right\}.$$

Da b klein ist, können im allgemeinen die einzelnen Querschnitte als isotherme Flächen betrachtet werden. Jedenfalls kann R stets so gewählt werden, daß der obige Quotient unter eine vorgeschriebene Grenze heruntergedrückt wird. Werden ferner noch die einzelnen Temperaturen in nahezu dem gleichen Abstande von der Achse gemessen, d. h. werden die einzelnen Thermoelemente gleich tief in den Stab eingeführt, so muß der obige geringe Fehler selbst bei dickeren Stäben so gut wie verschwinden, weil die Oberflächen der einzelnen koaxialen Zylinder als isotherm anzusehen sind, somit für Punkte dieser

zylindrischen Flächen nur die lineare Wärmebewegung in Richtung der z-Achse in Rechnung zu ziehen ist.

2. Abweichungen von der schematischen Theorie infolge der Abhängigkeit der inneren und äußeren Wärmeleitfähigkeit und der spezifischen Wärme von der Temperatur.[1])

Die Definition der Wärmeleitkonstanten fußt auf der Proportionalität zwischen Temperaturgefälle und Wärmeströmung. Die Fouriersche Annahme ist jedoch nicht vollständig richtig; vielmehr ist die Wärmeleitkonstante — wenn auch nur in sehr geringem Grade — von der Höhe der Temperatur abhängig.

Man pflegt allgemein k, h und c als *lineare Funktionen* der Temperatur einzuführen. Insbesondere hat dies auch H. F. Weber in der zitierten Abhandlung[2]) getan, indem er auf Grund dieser Voraussetzung die allgemeine Theorie der Wärmeleitung für den Ring entwickelte. Ich habe in meiner Dissertation (vgl. p. 24—30) Stab und Ring parallel behandelt, mich ferner in der Rechnung auf die wesentlichen Glieder beschränkt und so nur die charakteristische Abweichung von der schematischen Theorie bestimmt.

Setzt man:

$$(24)\quad \begin{cases} k = k_0 + k_1 \cdot \vartheta , \\ h = h_0 + h_1 \cdot \vartheta , \\ c = c_0 + c_1 \cdot \vartheta , \end{cases}$$

so geht die Differentialgleichung (1) über in:

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot \left\{1 + \dfrac{c_1}{c_0} \cdot \vartheta\right\} - \dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \left\{\dfrac{k_0}{\mu \cdot c_0} + \dfrac{k_1}{\mu \cdot c_0} \cdot \vartheta\right\} \\ \qquad + \left\{\dfrac{h_0}{\mu \cdot c_0} \cdot \dfrac{p}{q} + \dfrac{h_1}{\mu \cdot c_0} \cdot \dfrac{p}{q} \cdot \vartheta\right\} \cdot \vartheta = 0 . \end{cases}$$

Ausgehend von dieser allgemeinen Differentialgleichung, habe ich gezeigt, daß, falls nur aufeinanderfolgende Beobachtungen kombiniert werden, die Endresultate und charakteristischen Züge der schematischen Theorie ungeändert bleiben. Es ist hierdurch nicht die geringste Beschränkung auferlegt, weil man zwei aufeinanderfolgende Beobachtungen schon deshalb

1) Der Temperaturkoeffizient der Dichte ist so klein, daß dieser ohne jedes Bedenken vernachlässigt werden kann.

2) H. F. Weber, l. c. p. 460.

kombinieren wird, um die Wärmeleitfähigkeit für eine bestimmte Temperatur zu erhalten.

8a. Abweichungen von der schematischen Theorie infolge der Befestigung der Thermoelemente in einiger Entfernung von den Stabenden.

Um unkontrollierbaren Störungen, wie diese in den Endflächen des Stabes leicht vorhanden sein könnten, zu entgehen, wurden zu den definitiven Messungen die Thermoelemente in einiger Entfernung von den Enden befestigt, wodurch naturgemäß eine nicht zu vernachlässigende Abweichung von der schematischen Theorie gegeben ist. Da es die Rechnung wesentlich vereinfacht, wenn beide Thermoelemente in gleicher Entfernung von den Endflächen eingeführt sind, und dieser Voraussetzung experimentell nichts im Wege steht, so ist dies stets geschehen, d. h. es ist $z_1 + z_2 = l$.

Aus der allgemeinen Lösung unseres Wärmeleitproblems (4a) folgt (vgl. Dissertation p. 31):

$$(26\text{a})\qquad \tfrac{1}{2}(\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}) = A_1 \,.\, e^{-\beta_1 t} \,.\, \frac{\cos\frac{\gamma_1 (z_2 - z_1)}{2}}{\cos\frac{\gamma_1 l}{2}},$$

bez.

$$(27\text{a})\qquad \tfrac{1}{2}(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2}) = A_2 \,.\, e^{-\beta_2 t} \,.\, \frac{\sin\frac{\gamma_2 (z_2 - z_1)}{2}}{\sin\frac{\gamma_2 l}{2}}.$$

Es wird daher völlig analog der schematischen Theorie:

$$(28\text{a})\qquad \beta_1 = \frac{\ln(\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2})_{t_1} - \ln(\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2})_{t_2}}{t_2 - t_1},$$

bez.

$$(29\text{a})\qquad \beta_2 = \frac{\ln(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})_{t_1} - \ln(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})_{t_2}}{t_2 - t_1}.$$

Was schließlich noch die Bestimmung der γ betrifft, so folgt

$$(30\text{a})\qquad \cos\frac{\gamma_1 (z_2 - z_1)}{2} = \frac{\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}}{2\,.\,\vartheta_{z=l/2}}.$$

Es tritt demnach in dieser Formel zur Bestimmung von γ_1 an Stelle der Länge des Stabes nur der Abstand $z_2 - z_1$, wie das von vornherein zu vermuten war. b erhält man dann

wiederum aus $\operatorname{tg} \gamma_1 \,.\, l/2 = b/\gamma_1$, und γ_2 bestimmt sich durch die transzendente Gleichung:

$$\operatorname{tg} \gamma_2 \,.\, l/2 = - \gamma_2 / b .$$

3b. Abweichungen von der schematischen Theorie infolge der Befestigung der Thermoelemente in um $1 \,.\, l/8$ bez. $5 \,.\, l/8$ von der Erwärmungsstelle abstehenden Ringquerschnitten.

Wie wir beim Stabe die Thermoelemente nicht in die Endflächen, sondern in einiger Entfernung von diesen einführten, so ist es auch hier beim Ringe — *freilich aus anderen Gründen* — zweckmäßig, die Temperaturen an den um $1 \,.\, l/8$ bez. $5 \,.\, l/8$ von der Erwärmungsstelle entfernten Querschnitten zu messen, worauf H. F. Weber[1]) aufmerksam macht.

Aus der allgemeinen Lösung unseres Wärmeleitproblems (4b) folgt (vgl. Dissertation p. 33) bereits für solche Werte der Zeit, für die erst das vierte Glied der Reihen zu vernachlässigen ist:

(26b) $$\tfrac{1}{2}\{\vartheta_{z=1\,.\,l/8} + \vartheta_{z=5\,.\,l/8}\} = A_0 \,.\, e^{-\beta_0 t},$$

bez.

(27b) $$\tfrac{1}{2}\{\vartheta_{z=1\,.\,l/8} - \vartheta_{z=5\,.\,l/8}\} = \tfrac{1}{2} \,.\, \sqrt{2} \,.\, A_1 \,.\, e^{-\beta_1 t}.$$

Gleichung (26b) zeigt, was auch ohne Rechnung klar ist, daß die Summe für jeden ganz beliebigen Durchmesser die gleiche ist. Sie gibt naturgemäß in jedem Zeitpunkte die mittlere Temperatur des Ringes.

Es wird daher völlig analog der schematischen Theorie:

(28b) $$\beta_0 = \frac{\ln(\vartheta_{z=1\,.\,l/8} + \vartheta_{z=5\,.\,l/8})_{t_1} - \ln(\vartheta_{z=1\,.\,l/8} + \vartheta_{z=5\,.\,l/8})_{t_2}}{t_2 - t_1},$$

(29b) $$\beta_1 = \frac{\ln(\vartheta_{z=1\,.\,l/8} - \vartheta_{z=5\,.\,l/8})_{t_1} - \ln(\vartheta_{z=1\,.\,l/8} - \vartheta_{z=5\,)\,l/8})_{t_2}}{t_2 - t_1}.$$

Die γ bestimmen sich genau wie früher zu

(30b) $$\gamma_0 = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_1 = 2 \,.\, \pi / l .$$

Die Gleichungen zur Berechnung von a^2 bleiben somit ungeändert. Der Vorteil gegen früher besteht in der stärkeren Konvergenz der Reihen.

Man könnte hier vielleicht die Frage aufwerfen: Wenn

1) H. F. Weber, l. c. p. 465.

beim Stabe aus den angeführten Gründen die Thermoelemente in einiger Entfernung von den Enden befestigt werden, kann dann nicht diese Entfernung derart gewählt werden, daß auch dort das dritte Glied der Reihe Null wird und so die Formeln bereits ihre Gültigkeit erlangen, sobald die Zeit nur soweit vorgeschritten ist, daß das vierte Glied vernachlässigt werden darf? — Dies ist nicht möglich, weil bei den Gleichungen des Stabes nicht nur der Kosinus, sondern Kosinus und Sinus gleichzeitig auftreten und für keinen Wert des Argumentes Kosinus und Sinus gleichzeitig Null werden.

II. Ausarbeitung der definitiven Beobachtungsmethode und das Ergebnis verschiedener Vorversuche.

Ich begann meine Messungen in der von Neumann angegebenen Weise: „Die beiden Thermoelemente waren in Nähe der Enden jedes Stabes befestigt. Ihre Drähte führten zu einem Differentialgalvanometer, dem ich eine ganz spezielle Aufstellung gab, die es gestattete, sowohl Summe wie Differenz der beiden durch die Drähte fließenden Ströme zu messen. Das eine Ende des so hergerichteten Stabes wurde durch die Flamme eines Bunsenbrenners bis zum Eintreten eines stationären Temperaturzustandes erhitzt. Sodann wurde die Flamme entfernt und nach Verlauf einer gewissen Zeit damit begonnen, Summe und Differenz der beiden Stromstärken zu messen" (vgl. p. 184).

In enger Anlehnung an diese Beobachtungsanordnung schloß ich jedes der beiden Thermoelemente durch eine Spule des Differentialgalvanometers und ließ beide Stromkreise einmal in demselben — Summe —, sodann im entgegengesetzten Sinne — Differenz — auf die Nadel einwirken. Da jedoch während der einzelnen Beobachtungen die Temperaturen sehr schnell von höheren zu niederen Werten abnahmen, so machten sich die Nachteile der Ausschlagsmethode bei diesen Messungen im vollsten Maße geltend, und es gelang mir nicht, befriedigende Resultate zu erhalten. Ich sah mich daher genötigt, zu einer Nullmethode überzugehen und habe längere Zeit durch Kompensation die Temperaturen einzeln gemessen. Zu einem Hinter- oder Gegeneinanderschalten der beiden Thermoelemente unter einer dann erforderlichen Isolation gegenüber den Stäben und

Ringen nach dem Vorgange von L. Lorenz[1]) konnte ich mich nicht entschließen.

Bei der sehr exakten Bestimmung der einzelnen Temperaturen nach der Kompensationsmethode gaben die in dieser Weise angestellten Versuche einigermaßen befriedigende Resultate. Zu brauchbaren Werten jedoch konnten auch sie nicht führen: Die einzelnen Temperaturmessungen können nur zeitlich nacheinander ausgeführt werden und sind somit zur Berechnung von a^2 auf dieselbe Zeit zu interpolieren. Einmal kommen durch diese Interpolationsrechnung Fehler hinein, weil die Temperaturänderungen keineswegs der Zeit proportional erfolgen, vielmehr bei der Umrechnung mindestens das zweite Glied der Newtonschen Interpolationsformel berücksichtigt werden muß, sodann können Beobachtungsfehler infolge des Kombinierens zweier Messungen leicht den doppelten Einfluß gewinnen. Diesen recht erheblichen Nachteilen steht nur ein einziger geringer Vorteil gegenüber, nämlich das leichte und sichere Anbringen der Korrektionen betreffs der nicht vorhandenen Proportionalität der elektromotorischen Kraft der Thermoelemente mit der Temperatur. Da dies jedoch nur ein Korrektionsglied ist — Neumann hat es ganz vernachlässigt —, so genügt hierzu natürlich die ungefähre Kenntnis der einzelnen Temperaturen, wie sie durch Interpolation von Summe und Differenz auf dieselbe Zeit gegeben ist.

Es scheint somit am praktischsten, Summe und Differenz direkt zu messen, trotzdem dadurch die Korrektionsrechnung betreffs der elektromotorischen Kraft der Thermoelemente mühsamer wird. Die Zeitbestimmung wird genau, was auf das Resultat von größtem Einfluß ist.

Alle Vorteile der einzelnen Methoden in einer einzigen möglichst zu vereinen, ist nach dem bisherigen nur möglich, wenn eine Nullmethode geschaffen wird, die eine direkte Messung von Summe und Differenz zweier elektromotorischer Kräfte ohne Hinter- bez. Gegeneinanderschalten der einzelnen elektromotorischen Kräfte gestattet. Ich habe daher die Neumannsche Methode durch Herstellung gleicher elektromotorischer Kräfte mit Hilfe des Kompensationsapparates in eine Nullmethode übergeführt, wobei ich

1) L. Lorenz, Wied. Ann. **13**. p. 428. 1881.

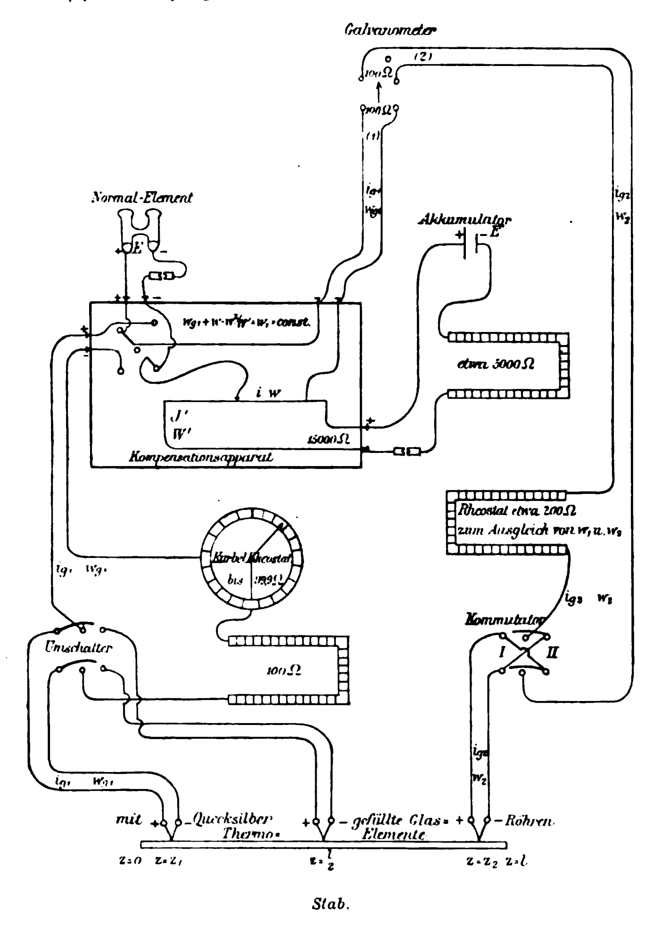
mir zugleich alle Vorzüge des Kompensationsapparates zunutze machte.

Meiner Methode liegt folgender Gedanke zugrunde: Das *eine* Thermoelement (elektromotorische Kraft e_1) wird an einen Kompensationsapparat angelegt, der unter Kontrolle eines stets stromlos benutzten Normalelementes der Reihe nach auf die Potentialwerte $(e_1 + e_2)$ und $(e_1 - e_2)$ eingestellt wird und durch die *eine* Spule (1) des Differentialgalvanometers geschlossen ist. Das *andere* Thermoelement (elektromotorische Kraft e_2) wird während des Versuches ständig durch die *andere* Spule (2) des Differentialgalvanometers geschlossen. Ein in diesem Stromkreise (2) befindlicher Kommutator gestattet dann die beiden Zweige des Differentialgalvanometers gleichen elektromotorischen Kräften $+e_2 = -e_1 + (e_1 + e_2)$ bez. $-e_2 = -e_1 + (e_1 - e_2)$ auszusetzen, so daß bei passend abgeglichenen Widerständen die Nadel des Differentialgalvanometers in Ruhe verharrt.

Es wird zunächst *durch Einstellung des Kompensationsapparates auf verschwindendes w* der zur späteren Herstellung der Potentialwerte $(e_1 + e_2)$ bez. $(e_1 - e_2)$ erforderliche Akkumulatorenkreis *ausgeschaltet*, und es werden die Widerstände w_1 und w_2 der beiden Zweige des Differentialgalvanometers derart abgeglichen, daß die Wirkung einer und derselben elektromotorischen Kraft durch die beiden Zweige sich aufhebt, die Nadel also in der Ruhelage läßt. Bezeichnen wir mit A den Ausschlag, den der einzelne Zweig hervorrufen würde, so wäre dann: $e / w_1 = c_1 . A$, und $e / w_2 = c_2 . A$, also: $w_1 / w_2 = c_2 / c_1 = c$. Die somit geforderte Unveränderlichkeit des Verhältnisses der Widerstände w_1 / w_2 wurde am Ende jeder Beobachtungsreihe in der Form kontrolliert, daß sich die Widerstände w_1 und w_2 einzeln tatsächlich unverändert ergaben.

Es wird sodann *durch Einstellung des Kompensationsapparates auf endliche w* der zur Herstellung der Potentialwerte $(e_1 + e_2)$ bez. $(e_1 - e_2)$ erforderliche Akkumulatorenkreis *eingeschaltet*. Um während sämtlicher Einstellungen — d. h. bei variabelem $w (w < 100\ \Omega)$ — den abgeglichenen Widerstand w_1 *konstant* zu halten, ist der Widerstand des Zweiges (1) außerhalb des Kompensationsapparates (w_{g_1}) um den Betrag $w - w^2 / W$ zu vermindern, was mittels eines Kurbelrheostaten leicht geschehen kann.

Die gesuchten Potentialwerte $(e_1 + e_2)$ **bez.** $(e_1 - e_2)$ ***werden dadurch auf die elektromotorische Kraft eines Normalelementes zurückgeführt*, daß vor jeder Messung zunächst der Stammstrom** $E'/(W' + w)$ **geschlossen und an diesem die elektro-**



Schaltungsskizze.

motorische Kraft des Normalelementes (E) kompensiert wird. Ist W der hierzu erforderliche Kompensationswiderstand (ca. 10000 Ω), so folgt: $E = E' . W/(W' + W)$, worin $W' + W$ der automatisch konstant gehaltene Widerstand des Stammstromes ist.

Zum leichten Anbringen der Korrektionen betreffs der elektromotorischen Kraft der Thermoelemente war *ein einfaches Zahlenverhältnis zwischen Kompensationswiderständen und Celsiusgraden* erwünscht. Die hilfselektromotorische Kraft E' — 4 Akkumulatoren parallel zu 2 Volt geschaltet — und der automatisch konstant gehaltene Widerstand $W' + w$ (ca. 20000 Ω) waren daher derart gewählt, daß 1 Ω Kompensationswiderstand 107 Mikrovolt, also im Mittel 2° C. entsprachen. Der kleinste vorhandene Kompensationswiderstand $^1/_{10}$ Ω gab bei $2^1/_2$ m Skalenabstand 20 Skt. gleich 40 mm Ausschlag am Thomsonschen Galvanometer und 30 Skt. gleich 60 mm Ausschlag am du Bois-Rubensschen Galvanometer, so daß die Wanderung durch die Nullage mit einer Genauigkeit von $^1/_{10}$ Skt. gleich 0,001° C. am Thomsonschen und gleich $^2/_3 . 0{,}001$° C. am du Bois-Rubensschen Galvanometer beobachtet wurde.

Verfolgen wir die Idee der auseinander gesetzten Methode genauer: Der Ausschlag A_1, den der Stromkreis (1) für sich hervorrufen würde, wäre gegeben durch

$$i_{g_1} = \frac{e_1 - (E'.w)/(W'+w)}{w_{g_1} + w - w^2/W'} = \frac{e_1 - (E.w)/W}{w_1} = c_1 . A_1 .$$

Der Ausschlag A_2, den der Stromkreis (2) für sich hervorrufen würde, wäre gegeben durch:

$$i_{g_2} = \pm \frac{e_2}{w_2} = c_2 . A_2 \qquad \begin{array}{l} + \text{ bei Lage I des Kommutators} \\ - \text{ bei Lage II des Kommutators.} \end{array}$$

Sind nun w_1 und w_2 während sämtlicher Messungen konstant und ist $w_1/w_2 = c_2/c_1$, so folgt für den Moment, in dem A_1 entgegengesetzt gleich A_2 wird, also die Nadel durch die Nulllage geht:

$$e_1 \pm e_2 = \frac{E}{W} . w .$$

Die gesuchten Potentialwerte $(e_1 + e_2)$ *und* $(e_1 - e_2)$ *sind somit auf die elektromotorische Kraft* (E) *eines stromlos benutzten Normalelementes zurückgeführt. Der im Kompensationsapparat eingestellte Widerstand ist proportional zu setzen: der Summe* $(e_1 + e_2)$ *bei Lage I des Kommutators, der Differenz* $(e_1 - e_2)$ *bei Lage II des Kommutators.*

Eine genauere Untersuchung der hier vorliegenden Größenordnungen zeigt übrigens, daß es nicht nötig ist, streng

$w_1 = w_{g_1} + w - w^2 / W' =$ konst. zu setzen, sondern daß es schon genügt, für w_1 den Wert $w_{g_1} + w = w'_1 =$ konst. einzustellen, also den Widerstand des Zweiges (1) außerhalb des Kompensationsapparates (w_{g_1}) um denselben Betrag w zu vermindern, der durch Einstellung des Kompensationsapparates hinzugekommen ist. Führen wir w'_1 in unsere Endformel ein, so geht dieselbe über in:

$$e_1 \pm e_2 \left(1 - \frac{w^2}{w'_1 \,.\, W'}\right) = (E \,.\, w) / W.$$

Wir betrachten nunmehr das Glied $(e_2 \,.\, w^2)/(w'_1 \,.\, W')$ als ein Korrektionsglied und fragen nach der Größe des Fehlers, welcher in unsere Methode eingeführt wird, wenn wir dieses Glied ganz fortlassen. Dieses Fehlerstudium knüpft an das Hauptglied:

$$\beta_2 = \frac{\ln(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})_{t_1} - \ln(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})_{t_2}}{t_2 - t_1}$$

und ergibt unter Berücksichtigung von $\ln(x + \delta) = \ln x + \delta / x$:

$$d\beta_2 = \frac{\left(\vartheta_{z=z_2} \,.\, w^2/(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})\right)_{t_1} - \left(\vartheta_{z=z_2} \,.\, w^2/(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})\right)_{t_2}}{w'_1 \,.\, W' \,.\, (t_2 - t_1) = 360000000}.$$

Für einen besonders ungünstigen Fall: bei einem Eisenzylinder und bei größtem w am Anfange des Beobachtungssatzes führt die Berechnung auf $d\beta_2 = 0{,}00000065$, während der theoretisch zulässige Beobachtungsfehler $d\beta_2 = 0{,}000013$ ist. Wir sind somit vollkommen berechtigt, in der obigen Formel $e_1 \pm e_2 = (E \,.\, w) / W$ zu setzen, d. h. wir dürfen w_1 mit w'_1 vertauschen. Die hierdurch gegebene *Vereinfachung* habe ich mir bei sämtlichen Messungen zunutze gemacht, indem ich stets den Widerstand des Zweiges (1) außerhalb des Kompensationsapparates (w_{g_1}) nur um denselben Betrag w verminderte, der durch Einstellung des Kompensationsapparates hinzukam.[1])

Die Temperaturmessung in der *Mitte* des Stabes erfolgte durch gewöhnliche stromlose Kompensation und es konnte daher dies Thermoelement mit dem an den Kompensationsapparat angelegten mittels Umschalters ausgewechselt werden.

1) Hierzu genügte während der eigentlichen Beobachtungen ein Kurbelrheostat von 99,9 Ohm. Zur Messung der Temperatur im stationären Anfangszustande waren noch weitere 100 Ohm erforderlich.

Die definitive Messung setzte ich aus drei *getrennten* Beobachtungsreihen zusammen:

$$\text{I.}\quad \vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2},$$
$$\text{II.}\quad \vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2},$$
$$\text{III.}\quad \vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2} \quad \text{und} \quad \vartheta_{z=l/2} \text{ alternierend.}$$

Aus I und II können durch Kombination $\vartheta_{z=z_1}$ und $\vartheta_{z=z_2}$ für jede Beobachtung einzeln näherungsweise ermittelt und die so erhaltenen Werte zum Anbringen der Korrektionen betreffs der elektromotorischen Kraft der Thermoelemente benutzt werden. Sodann erhält man aus I: β_2 und aus II: β_1. Beobachtungsreihe III liefert die Kosinus, wobei noch zum Anbringen der Korrektionen Reihe I benutzt wird. Um Differenzen und Summen der einzelnen Beobachtungsreihen näherungsweise auf dieselbe Zeit interpolieren zu können, wurde für jede Beobachtungsreihe nahezu derselbe stationäre Anfangszustand hergestellt und außerdem noch nach Schluß der Differenzmessungen einige Summen und vice versa beobachtet. Die Interpolation wurde dann von einem Zeitpunkte aus vorgenommen, für den in beiden Serien die Summen bez. Differenzen denselben Wert hatten.

Die definitiven Messungen sind sämtlich sowohl mit einem Thomsonschen astatischen Galvanometer als auch mit einem du Bois-Rubenssches Kugelpanzergalvanometer durchgeführt worden. Während das erstere seiner schlechten Dämpfung wegen verlassen wurde, genügte das letztere völlig allen zu stellenden Ansprüchen. Dasselbe war seines kurzen Aufhängefadens wegen mittels einer Juliusschen Aufhängung völlig erschütterungsfrei aufgehängt worden. Die Empfindlichkeit des Thomsonschen Galvanometers — vier Spulen von je 100 Ω Widerstand, von denen (1) mit (2) und (3) mit (4) zu je einem Paare verbunden waren — war für jedes der beiden Spulenpaare $2{,}3 \cdot 10^{-9}$ Amp. gleich 1 mm Ausschlag bei 1 m Skalenabstand. Die Empfindlichkeit des du Bois-Rubensschen Galvanometers — zwei Spulen von je 100 Ω Widerstand — war für jede einzelne Spule $1{,}5 \cdot 10^{-9}$ Amp. gleich 1 mm Ausschlag bei 1 m Skalenabstand. Der Durchgang der Nadel durch die Nullage wurde mittels eines $^1/_2$ Sek. schlagenden Chronometers auf $^1/_{10}$ Sek. genau geschätzt.

Die *Thermoelemente* waren, um die Versuche auch in höheren Temperaturen anstellen zu können, in feine Bohrlöcher des Stabes eingestemmt und durch einen äußerst kleinen Metallkeil festgeklemmt.

Die *Abkühlung* der in bestimmter — auf p. 924 auseinandergesetzten — Weise eingeleiteten anfänglichen Erwärmung der Stäbe und Ringe wurde der Beobachtungsanordnung von Neumann entsprechend in einem von Wasser durchströmten Blechkasten mit Hohlraum vorgenommen: Wurde der Hahn der Wasserleitung etwa $^1/_4$ bis $^1/_2$ Stunde vor Beginn der Beobachtung geöffnet, so gelang es, die Wände des Hohlzylinders während der Messung auf konstanter Temperatur zu halten. Um — was unbedingt nötig — ein schnelles Aus- und Einbringen des Stabes zu ermöglichen, war derselbe mit seinen Thermodrähten an einem Holzgestell befestigt, an dem er frei hing. Der Hohlzylinder war oben durch Klappen verschlossen, die sich zum Einbringen des Stabes leicht öffnen ließen. Die zweiten Kontaktstellen der Drähte befanden sich in U-förmig gebogenen, mit Quecksilber gefüllten Glasröhrchen. Sämtliche Glasröhrchen waren mittels einer Holzleiste an dem Hängegestell derart befestigt, daß sie, sobald der Stab in den Hohlzylinder eingehängt wurde, in das den Zylinder umgebende Wasser eintauchten, bereits nach wenigen Minuten[1]) die Temperatur des Wassers annahmen und so auf der konstanten Umgebungstemperatur des Stabes gehalten wurden.

Ein besonderes Studium wandte ich den *Ausstrahlungsvorgängen an der Oberfläche*, der sogenannten *äußeren Wärmeleitfähigkeit* zu. Ich beobachtete teils bei rauher, teils bei glatter Oberfläche des Stabes, bald mit schwach und bald mit stark berußten und mit unberußten Stäben. Das Resultat aller dieser Versuche war: *Veränderungen in der Beschaffenheit der Oberfläche haben keinen Einfluß auf die Bestimmung der inneren Leitfähigkeit, wenn die gesamte Oberfläche angenähert gleichmäßig verändert wird. Starke partielle Änderungen hingegen können das Resultat verfälschen.*

Diese Wahrnehmungen lehrten zugleich, daß bei gut leitenden Materialien die Verlegung der Ausstrahlungsvorgänge

1) Es wurde etwa 4 Min. gewartet.

in evakuierte Räume, welche Hr. Hecht in seiner Arbeit bei schlecht leitenden Materialien mit Vorteil verwandt hatte, unnötig war. Es wäre auch sehr mißlich gewesen, wenn sich dieses als nötig erwiesen hätte, weil der Stab oder Ring nur an einer einzigen Stelle zu erwärmen ist und die Abkühlung sehr schnell fortschreitet.

Waren nach meinen Wahrnehmungen starke partielle Änderungen der Oberfläche zu vermeiden, so bedurfte die *Herstellung des Anfangszustandes* ohne Eintreten solcher partieller Oberflächenänderungen eines weiteren besonderen Studiums. Vor allem mußte die einfachste Erwärmung — Wirkung von Flammengasen — vermieden werden. Ich folgte der von L. Lorenz[1]) angewandten Erwärmungsmethode. Dieser führte eine im voraus erwärmte Stange an die zu erhitzende Stelle heran und steigerte die Erwärmung der genannten Stange noch während des Versuches durch eine kleine Lampe. Ich ließ zum Erhitzen der Stäbe und Ringe einen besonderen Erwärmungsapparat herstellen.

Die Erwärmung der *Stäbe* erfolgte durch Überleiten der Wärme von einem heißen Messingblock auf den an diesen angelegten Stab. Der Messingblock befand sich in einem Asbestzylinder und ragte nur durch eine eng anschließende Öffnung mit der an den Stab anzulegenden Fläche heraus. Der den Messingblock erhitzende Bunsenbrenner stand im Asbestzylinder und kam demnach mit dem Stabe in keine Berührung. Der Asbestzylinder war oben durch einen Deckel, in dem sich ein kleiner Schornstein befand, verschlossen.

Zum Erwärmen der *Ringe* wurde ein zweiter Asbestdeckel verwandt, in den eine kreisförmige Öffnung eingeschnitten war. Über diese wurde ein niedriger, hart gelöteter Kupferkegel gesetzt. In die Spitze desselben war ein dem Ring sich eng anschmiegendes U-förmig gebogenes Kupferblech hart eingelötet, in welches die zu erwärmende Stelle des Ringes ($z = l/8$) eingepreßt wurde. Einige feine Eisenspäne stellten vollständigen Kontakt her.

Schließlich erwähne ich noch, daß sämtliche Kontaktstellen in der Schaltung mit Watte umwickelt waren und definitive

1) L. Lorenz, Wied. Ann. **13.** p. 431. 1881.

Messungen nur bei angenähert konstanter Zimmertemperatur stattfanden. Es gelang so vollständig, *fremde störende Thermoeffekte abzuhalten.* Die Abkühlung und Erwärmung der Stäbe und Ringe erfolgte aus demselben Grunde in einem zweiten Zimmer, und es waren die Zuleitungsdrähte durch Bohrlöcher der Türe geführt.

Bevor ich zu den definitiven Messungen überging, habe ich die Versuche in mannigfaltiger Weise variiert. Insbesondere wurden die Thermodrähte in verschiedener Entfernung von den Enden des Stabes bez. in verschieden weit von der Erwärmungsstelle abstehenden Querschnitten des Ringes befestigt; ferner erfolgte die Erwärmung sowohl von dem einen als auch von dem anderen Ende des Stabes bez. Querschnitte des Ringes aus, und es wurde dieselbe zu verschieden hohen, teils stationären, teils veränderlichen Anfangszuständen getrieben. Die Messung von $\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}$, $\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2}$ und $\vartheta_{z=l/2}$ erfolgte teils in getrennten, teils in einer einzigen Versuchsreihe. — Das Resultat dieser Vorversuche ist kurz folgendes: Der Abstand der Thermoelemente von den Endflächen des Stabes hat auf die Bestimmung von a^2 keinen Einfluß, jedoch ist es praktisch, bei längeren Stäben die Thermoelemente in weiterer Entfernung von den Endflächen, bei kürzeren in Nähe derselben zu befestigen. Inhomogenitäten des Materials, die sich bei Beobachtungen unter Vertauschung der Stabenden und Ringquerschnitte hätten zeigen müssen, wurden nicht bemerkt. Als Anfangszustand empfiehlt sich wegen des stärkeren Konvergierens der Reihen der stationäre Temperaturzustand. Die Höhe der Temperaturen im Anfangszustande ist entsprechend der Leitfähigkeit passend zu wählen. Die Messung von $\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}$, $\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2}$ und $\vartheta_{z=l/2}$ in getrennten Versuchsreihen erhöht die Genauigkeit des Resultates.

III. Berechnung der Koeffizienten der einzelnen Reihenentwickelungen unter Zugrundelegung eines nahezu stationären Anfangszustandes.

Bevor ich den Einfluß der einzelnen Fehlerquellen auf das Resultat angeben kann, muß ich zunächst die Stärke der Konvergenz der Fourierschen Reihen feststellen; jedoch ist hervorzuheben, daß infolge der Kombination, in welcher die

Reihen rechnerisch verwandt werden, eine Beschränkung auf die ersten Glieder bereits viel früher gestattet ist, als die einzelnen Reihen für sich genügend stark konvergieren. Die theoretische und rechnerische Durchführung dieser Behauptung kann erst nach Auswertung der Koeffizienten gegeben werden, und ich gehe daher zunächst zu dieser über:

Die Funktion, die die Temperatur im Anfangszustande darstellt, sei $F(z)$, d. h.

$$(31\text{a}) \qquad F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cdot \left\{\cos(\gamma_n z) + \frac{b}{\gamma_n} \cdot \sin(\gamma_n z)\right\},$$

$$(31\text{b}) \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cdot \cos(\gamma_n z).$$

Wie bereits erwähnt, wurde für $F(z)$ aus praktischen Gründen (vgl. p. 922 und auch p. 925) stets ein nahezu stationärer Anfangszustand gewählt. Für den stationären Zustand verschwindet in der allgemeinen Differentialgleichung der Differentialquotient nach der Zeit und Gleichung (1) geht somit über in:

$$(32) \qquad a^2 \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - f^2 . \Theta = 0,$$

wenn Θ die Temperatur im stationären Zustande ist. Die Lösung dieser Gleichung findet sich schon bei Fourier.[1] Es folgt:

$$(33) \qquad \Theta = C . e^{-z . \sqrt{f^2/a^2}} + D . e^{+z . \sqrt{f^2/a^2}},$$

worin C und D zwei Konstante sind, welche durch die bestehenden Nebenbedingungen ihre Bestimmung finden: Die durch den angelegten Kupferblock bez. das U-förmige Blech in $z = 0$ hervorgerufene stationäre Temperatur ist $\Theta_{z=0} = C + D$. Denkt man sich ferner den Stab von $z = 0$ bis $z = \infty$ ausgedehnt und ebenfalls nur in $z = 0$ erwärmt, so folgt $D = 0$, weil sonst Θ für $z = \infty$ nicht Null würde. Für einen endlichen Stab hat auch D einen endlichen, wenn auch kleinen Wert. Aus der Grenzbedingung (3a) ergibt sich:

$$\frac{\partial \Theta_{z=l}}{\partial z} = - b . \Theta_{z=l}.$$

1) Fourier, Theorie der Wärme (deutsche Ausgabe von Weinstein) p. 40. 1884.

d. h.

(34a) $D = \Delta . C$, wenn $\Delta = \frac{\sqrt{f^2/a^2} - b}{\sqrt{f^2/a^2} + b} \cdot \frac{e^{-l . \sqrt{f^2/a^2}}}{e^{+l . \sqrt{f^2/a^2}}}$.

Wird der Ring, wie ich es stets getan habe, nur in $z = 0$ erwärmt, so wird für $z = l/2$: $\partial \Theta_{z=l/2} / \partial z = 0$, d. h.

(34b) $C = D . e^{+l . \sqrt{f^2/a^2}}$.

Unter Rücksicht auf diese Bedingungsgleichungen erhält man dann nach dem Lagrangeschen Verfahren (vgl. Dissertation p. 53—56):

(35a)
$$\left\{\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \cdot \frac{\gamma_n^2}{b^2 + \gamma_n^2} \cdot C \cdot \frac{\alpha^2}{\beta_n} \\ &\cdot \Big[\Big\{e^{-l . \sqrt{f^2/a^2}} + \Delta . e^{+l . \sqrt{f^2/a^2}}\Big\} \cdot \Big\{\gamma_n . \sin(\gamma_n l) - b . \cos(\gamma_n l)\Big\} \\ &\mp {}^{1)} \sqrt{f^2/a^2} . \Big\{e^{-l . \sqrt{f^2/a^2}} - \Delta . e^{+l . \sqrt{f^2/a^2}}\Big\} \\ &+ b . (1 + \Delta) + \sqrt{f^2/a^2}(1 - \Delta)\Big], \end{aligned}\right.$$

(35b₁)
$$\left\{\begin{aligned} A_n = \frac{2 D}{l . (f^2/a^2 + \gamma_n^2)} \cdot \sqrt{f^2/a^2} . 2 \\ . \Big(e^{+l . \sqrt{f^2/a^2}} - 1\Big) = 2 . A_0 . f^2/\beta_n, \end{aligned}\right.$$

(35b₂) $$A_0 = \frac{D}{l . \sqrt{f^2/a^2}} \cdot 2 \cdot \Big\{e^{+l . \sqrt{f^2/a^2}} - 1\Big\}.$$

Während demnach beim Ringe $A_n = \text{konst.} . 1/\beta_n$ ist, wird beim Stabe der genaue Wert A_n durch eine recht komplizierte Formel dargestellt. Nichtsdestoweniger ist auch beim Stabe das rasche Abnehmen der A_n im wesentlichen durch das schnelle Wachsen der β_n bedingt, und zwar derart, daß man in erster Annäherung sogar setzen darf: $A_n = \text{konst.} . 1/\beta_n$.

Folgende Zahlen mögen eine Anschauung von der Größenordnung der einzelnen Glieder geben: Für den im Anhang der Dissertation angeführten Versuch mit Eisenstab I ist:

$\gamma_1 = 0{,}0127$, $\gamma_1 . l = 0{,}3112$ in der Nähe von 0,
$\gamma_2 = 0{,}1296$, $\gamma_2 . l = 3{,}1752$ „ „ „ „ $\pi = 3{,}1416$,
$\gamma_3 = 0{,}2575$, $\gamma_3 . l = 6{,}3088$ „ „ „ „ $2\pi = 6{,}2832$,
$\gamma_4 = 0{,}3857$, $\gamma_4 . l = 9{,}4497$ „ „ „ „ $3\pi = 9{,}4248$,
$\gamma_n . l$ konvergiert mit wachsendem n gegen $(n - 1) . \pi$.

1) $-$ für $\sin(\gamma_n l) > 0$ und $+$ für $\sin(\gamma_n l) < 0$.

$$\beta_1 = 0{,}00092, \quad \gamma_1^2/(b^2+\gamma_1^2) = 0{,}97576,$$
$$\beta_2 = 0{,}00381, \quad \gamma_2^2/(b^2+\gamma_2^2) = 0{,}99976,$$
$$\beta_3 = 0{,}01238, \quad \gamma_3^2/(b^2+\gamma_3^2) = 0{,}99994,$$
$$\beta_4 = 0{,}02667, \quad \gamma_4^2/(b^2+\gamma_4^2) = 0{,}99997.$$

$$\Delta = 0{,}0277, \quad \sqrt{f^2/a^2} = 0{,}0721\,,$$
$$\left(e^{-l.\sqrt{f^2/a^2}} + \Delta . e^{+l.\sqrt{f^2/a^2}}\right) = 0{,}333\,,$$
$$\sqrt{f^2/a^2}\left(e^{-l.\sqrt{f^2/a^2}} - \Delta . e^{+l.\sqrt{f^2/a^2}}\right) = 0{,}000649,$$
$$b.(1+\Delta) = 0{,}00206, \quad \sqrt{f^2/a^2}(1-\Delta) = 0{,}07011.$$

$$A_1 = \text{konst.}\,.\,75{,}90, \quad 1/\beta_1 = 1087{,}0,$$
$$A_2 = \text{konst.}\,.\,18{,}87, \quad 1/\beta_2 = 262{,}5,$$
$$A_3 = \text{konst.}\,.\,5{,}90, \quad 1/\beta_3 = 80{,}8.$$
$$A_4 = \text{konst.}\,.\,2{,}63, \quad 1/\beta_4 = 37{,}5.$$

$$A_2 = A_1 . 0{,}249, \quad 1/\beta_2 = 1/\beta_1 . 0{,}241,$$
$$A_3 = A_1 . 0{,}078, \quad 1/\beta_3 = 1/\beta_1 . 0{,}074,$$
$$A_4 = A_1 . 0{,}035, \quad 1/\beta_4 = 1/\beta_1 . 0{,}034.$$

IV. Auswertung des durch Beschränkung auf das erste Glied der Reihen verursachten Fehlers.

Wir haben uns bisher — für hinreichend großes t — auf das erste Glied der Reihen beschränkt, weil gerade in der ausschließlichen Verwendung dieses ersten Gliedes, wie das bereits in der Einleitung betont ist, ein wesentlicher Vorteil der Neumannschen Methode liegt, nämlich die Unabhängigkeit vom Anfangszustande. Es ist nunmehr festzustellen, was unter dem „hinreichend großen" t zu verstehen ist, oder mit anderen Worten: es muß der durch die Beschränkung auf das erste Glied verursachte Fehler von a^2 und damit auch von k ermittelt werden.

Durch das ständige Kombinieren zweier Messungen wird dieser Fehler bedeutend kleiner, als es auf den ersten Blick scheinen mag, da infolge dieser Berechnungsweise die Zeit durchaus nicht so groß gewählt zu werden braucht, daß die Temperaturen selbst bereits ohne meßbaren Fehler durch die

Reihen (9) und (10) dargestellt werden, um den Fehler von a^2 völlig verschwinden zu lassen. Die Beschränkung auf das erste Glied besteht keineswegs darin, daß das folgende und alle weiteren Glieder als klein gegenüber dem ersten vernachlässigt werden, es wird vielmehr infolge der stets vorgenommenen Differenzbildung der Logarithmen nur *die völlig verschwindende Änderung dieser kleinen Glieder in einem geringen Zeitintervall* (von Beobachtung zu Beobachtung — bei mir durchschnittlich 1 Min.) nicht berücksichtigt. Der Fehler ist nämlich von der Form:

$$\ln \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_2} = \delta_1 - \delta_2 .$$

Da nun aber $\delta_1 - \delta_2$ dadurch beliebig klein gemacht werden kann, daß die Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ klein gewählt wird, was bei genaueren Messungen — wenigstens soweit dieselben auf den Temperaturkoeffizienten des Wärmeleitvermögens Rücksicht nehmen — stets geschehen muß, so läßt sich dieser Fehler experimentell unter jede gewünschte Grenze, also jedenfalls auch unter die sonst vorliegende Genauigkeitsgrenze herabdrücken.

Um den analytischen Ausdruck für diesen Fehler aufzustellen, beschränke ich mich der Kürze halber auf das Hauptglied β_2. Ferner schreibe ich nur die Formeln für den Stab hin, da die entsprechenden für den Ring bis auf die Indizes genau dieselben sind. Man hat nur statt l den Index $l/2$ und statt n ($=1$ bis 6) die Indizes $n - 1$ ($=0$ bis 5) einzusetzen.

Es ist

$$\tfrac{1}{2} \cdot \{\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=l}\} = A_2 \cdot e^{-\beta_2 t} + A_4 \cdot e^{-\beta_4 t} + A_6 \cdot e^{-\beta_6 t} + \ldots$$

Unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung A_4 folgt somit:

$$\beta_2 \cdot (t_2 - t_1) = \ln (\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=l})_{t_1} - \ln (\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=l})_{t_2} .$$

Unter Beibehaltung dieser Glieder hingegen, also bis auf Glieder von der Ordnung A_6 wird:

$$\beta_2 \cdot (t_2 - t_1) = \ln \left[(\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=l})_{t_1} - 2 \cdot A_4 \cdot e^{-\beta_4 t_1}\right]$$
$$- \ln \left[(\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=l})_{t_2} - 2 \cdot A_4 \cdot e^{-\beta_4 t_2}\right] .$$

Der durch Fortlassen der Glieder von der Ordnung A_4 begangene Fehler ist demnach:

$$\Delta \beta_2 = 1/(t_2 - t_1) . \left\{ \ln \left(1 - \frac{2 . A_4 . e^{-\beta_4 t_1}}{(\vartheta_{x=0} - \vartheta_{x=l})_{t_1}}\right) - \ln \left(1 - \frac{2 . A_4 . e^{-\beta_4 t_2}}{(\vartheta_{x=0} - \vartheta_{x=l})_{t_2}}\right)\right\},$$

oder

$$\Delta \beta_2 = 1/(t_2 - t_1) . \ln \left(\frac{(\vartheta_{x=0} - \vartheta_{x=l})_{t_2}}{(\vartheta_{x=0} - \vartheta_{x=l})_{t_1}} \cdot \frac{(\vartheta_{x=0} - \vartheta_{x=l})_{t_1} - 2 . A_4 . e^{-\beta_4 t_1}}{(\vartheta_{x=0} - \vartheta_{x=l})_{t_2} - 2 . A_4 . e^{-\beta_4 t_2}} \right).$$

Setzt man hierin noch für $(\vartheta_{x=0} - \vartheta_{x=l})_t$ den bis auf Glieder von der Ordnung A_6 richtigen Wert

$$2 . (A_2 . e^{-\beta_2 t} + A_4 . e^{-\beta_4 t}),$$

so folgt:

$$\Delta\beta_2 = 1/(t_2 - t_1) . \ln\left(1 + (A_4/A_2) . e^{-(\beta_4-\beta_2) t_2} - (A_4/A_2) . e^{-(\beta_4-\beta_2) t_1}\right).$$

Für das im Anhange der Dissertation durchgeführte Beispiel ist:

$$\frac{A_4}{A_2} = 0{,}1394, \quad \beta_4 = 0{,}02667, \quad \beta_2 = 0{,}00381 .$$

Der Versuch dauert von $t = 4$ bis $t = 17$ Min. Für den Anfang des Beobachtungssatzes, d. h. für den *ungünstigsten* Fall ist somit $t_1 = 240$ und $t_2 = 300$ Sek. Hieraus ergibt sich:

$$\Delta \beta_2 = (1/60) . \ln(1 + 0{,}00015 - 0{,}00058) = - 0{,}000007$$

und

$$\Delta a^2 = \frac{\Delta \beta_2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} = \frac{0{,}000\,007}{0{,}01662} = 0{,}0004,$$

d. h.

$$0{,}2 \text{ Proz. } (a^2 = 0{,}173_4).$$

Mit wachsendem t nimmt dieser Fehler selbstverständlich sehr schnell ab. Für den Schluß desselben Beobachtungssatzes, d. h. für $t_1 = 16$ Min. $= 960$ Sek. und $t_2 = 17$ Min. $= 1020$ Sek. wird:

$$\Delta \beta_2 = (1/60) . \ln\{1 + 1{,}0 . 10^{-11} - 4{,}1 . 10^{-11}\} = - 5 . 10^{-13}$$

und

$$\Delta a^2 = \frac{5 . 10^{-13}}{0{,}01662} = 3 . 10^{-11} .$$

Es steht nun jedoch nichts im Wege, auch für den Anfang des Beobachtungssatzes den vorliegenden Fehler noch weiter zu verkleinern. Man hat dann nur die Differenz $t_2 - t_1$ kleiner als 60 Sek. zu wählen, was Neumann tatsächlich getan hat, indem er von 8 zu 8 Sek. beobachtete. Ich brauche wohl kaum noch hervorzuheben, daß selbst diese Fehler noch verkleinert werden können, wenn man zwischen Unterbrechung der Erwärmung und Anfang der Beobachtungen einige weitere Minuten verstreichen läßt. Ich brach mit Rücksicht auf die Empfindlichkeit des Galvanometers zur Zeit $t = 17$ Min. die Beobachtung ab. Bei einem Arrangement, das eine größere Genauigkeit als die von mir erreichte ($^1/_2$ Proz.) gestattet, muß auch die Empfindlichkeit des Galvanometers entsprechend größer sein, und man kann dann die Beobachtungen auf spätere Zeiten ausdehnen. Ja man würde wahrscheinlich sogar dazu gezwungen werden, weil für Beobachtungen zu einer früheren Zeit ein solches Galvanometer wegen der starken Temperaturänderungen am Anfange zu empfindlich sein müßte. Da aber wie gezeigt, mit wachsendem t der Fehler Δa^2 sehr schnell abnimmt und außerdem bei genauen Messungen mit Rücksicht auf den Temperaturkoeffizienten $t_2 - t_1$ klein gewählt werden muß, *so kann der durch Beschränkung auf das erste Glied entstehende Fehler der Ausarbeitung eines noch so genauen Beobachtungsarrangements niemals hinderlich werden.*

V. Die erreichte Genauigkeit.

(Um ein Bild von der Größenordnung der einzelnen Fehler zu geben, ist im folgenden ein Zahlenbeispiel durchgeführt worden. Die zugehörigen Beobachtungsdaten finden sich im Anhange meiner Dissertation, die ich Interessenten auf Wunsch jederzeit gerne übersende.)

Die Temperaturmessungen geschahen in der im Abschnitt II auseinandergesetzten Weise. Der Durchgang der Magnetnadel durch die Nullage wurde dabei mittels eines $^1/_2$ Sek. schlagenden Chronometers auf $^1/_{10}$ Sek. genau beobachtet. Dies entspricht einer Genauigkeit des Resultates von durchschnittlich $^1/_2$ Proz. Es ist nämlich:

$$(d\,a^2)_t = \frac{d\,[(\beta_2 - \beta_1)_t]}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2},$$

$$(d\beta_1)_t = \frac{\beta_1}{t_2 - t_1}\, d(t_2 - t_1),$$

$$(d\beta_2)_t = \frac{\beta_2}{t_2 - t_1}\, d(t_2 - t_1).$$

Bei gleicher Genauigkeit der Zeitbeobachtung ist somit $d\beta_1$ bedeutend kleiner als $d\beta_2$, so daß nur der letztere Fehler auszuwerten ist. Die Differenz $t_2 - t_1$ darf bis auf $^2/_{10}$ Sek. genau angesehen werden. Für Eisenstab I (vgl. Anhang der Dissertation) ist somit:

$$(d\beta_2)_t = \frac{0{,}0038}{60} \cdot 0{,}2 = 0{,}000013,$$

$$(d a^2)_t = \frac{(d\beta_2)_t}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} = 0{,}00078, \text{ d. h. } ^1/_2 \text{ Proz.}$$

Es fragt sich nun, ob die Fehler in der Temperaturbestimmung auf denselben geringen Einfluß herabgedrückt werden können. Da die Temperaturdifferenz der Kontaktstellen der elektromotorischen Kraft der Thermoelemente nicht proportional ist, so scheint dies zunächst, selbst bei genauer Eichung der Thermoelemente[1]) nicht möglich. Unterscheidet man jedoch scharf zwischen willkürlichen Beobachtungsfehlern einerseits und stets in demselben Sinne in das Resultat eingehenden Fehlern andererseits, so zeigt sich, daß die obige Genauigkeit wohl erreichbar ist. Wir können uns wieder auf das Hauptglied $\beta_2(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)$ beschränken. Es ist:

$$(d\beta_2)_\vartheta = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \left\{ \frac{d\vartheta}{(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})_{t_1}} - \frac{d\vartheta}{(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})_{t_2}} \right\}.$$

Für willkürliche, teils positiv, teils negativ zu nehmende Beobachtungsfehler ist somit:

$$(d\beta_2)_\vartheta = \frac{2 \cdot d\vartheta}{(t_2 - t_1) \cdot (\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})} = \frac{d\vartheta}{30 \cdot (\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})}.$$

Soll nun $(d a^2)_\vartheta$ von derselben Größenordnung wie $(d a^2)_t$ sein, so folgt:

$$d\vartheta = 30 \cdot 0{,}000013 \cdot (\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2}),$$

1) Bei den von mir benutzten Thermoelementen fand mit zunehmender Temperatur ein Ansteigen der elektromotorischen Kraft pro 1° C. statt. Es ergab sich $e = 52{,}02 + 0{,}018 \cdot (\vartheta - \vartheta_u)$, worin $\vartheta - \vartheta_u$ die Temperaturdifferenz der beiden Kontaktstellen und e die elektromotorische Kraft pro 1° C. in Mikrovolt ist. Näheres über die Aufstellung dieser empirischen Formel ergibt die Tabelle auf p. 50 der Dissertation.

also für den Anfang des Beobachtungssatzes

$$(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2} = 54^0): \quad d\,\vartheta = 0{,}02^0\ \mathrm{C}.$$

und für den Schluß des Beobachtungssatzes

$$(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2} = 3^0): \quad d\,\vartheta = 0{,}001^0\ \mathrm{C}.$$

Die Empfindlichkeit des Galvanometers war, wie bereits p. 920 erwähnt ist, derart reguliert, daß die Wanderung durch die Nullage mit einer Genauigkeit von $^1/_{10}$ Skt. $= 0{,}001^0$ C. bei den Messungen mit Hilfe des Thomsonschen Galvanometers und $^2/_3 \cdot 0{,}001^0$ C. bei den Messungen mit Hilfe des Kugelpanzergalvanometers beobachtet wurde. Hieraus geht hervor, daß selbst am Schluß des Beobachtungssatzes, d. h. im ungünstigsten Falle, die Empfindlichkeit des Galvanometers gerade noch der gewünschten Genauigkeit von $^1/_2$ Proz. genügt.

Wenn nun auch das Galvanometer eine Temperaturmessung bis auf $0{,}001^0$ C. gestattet, so dürfte die Umrechnung der beobachteten Mikrovolt in Celsiusgrade bis zu dieser Genauigkeit nur bei aufs genaueste geeichten Thermoelementen und vor allem nur durch äußerst mühsame Rechnung möglich sein. Bei der von mir durchgeführten Eichung ist eine solche Umrechnung nicht möglich, aber auch, wie im folgenden gezeigt werden soll, nicht nötig.

Dadurch, daß die elektromotorische Kraft der benutzten Thermoelemente der Temperaturdifferenz der Kontaktstellen nicht proportional ist, gehen in die einzelnen Rechnungen Fehler ein, die keineswegs willkürlich, d. h. nicht teils positiv, teils negativ sind. Diese Fehler machen sich vielmehr stets in demselben Sinne geltend, müssen also auch mit dem richtigen Vorzeichen genommen werden. Somit wird für diese Fehler:

$$d\,\vartheta = \frac{(t_2 - t_1) \cdot (d\,\beta_2)_\vartheta}{1/(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})_{t_1} - 1/(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})_{t_2}}$$

oder

$$d\,\vartheta = \frac{60 \cdot 0{,}000013}{1/(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})_{t_1} - 1/(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})_{t_2}}.$$

Hieraus folgt für den Anfang des Beobachtungssatzes:

$$d\,\vartheta = \frac{0{,}00078}{{}^1/_{54} - {}^1/_{48}} = 0{,}2^0\ \mathrm{C}.$$

und für den Schluß des Beobachtungssatzes:

$$d\vartheta = \frac{0{,}00078}{{}^1/_4 - {}^1/_8} = 0{,}01^{\,0}\ \mathrm{C.}$$

In den höheren Temperaturen (54, genauer 53,61, ist entstanden aus 131,14 – 77,53) hat also die Umrechnung der Mikrovolt in Celsiusgrade bis auf 0,2° C., in den niederen (4, genauer 3,95, ist entstanden aus 57,48 – 53,53) bis auf 0,01° C. genau zu erfolgen. In der Praxis genügt es vollständig, in der Formel $e = 52{,}02 + 0{,}018\,\vartheta$ für ϑ den doppelten Kompensationswiderstand zu setzen, wie dies auf p. 65 der Dissertation näher begründet ist. Der Bequemlichkeit halber waren nach $^1/_{10}$ Ohm fortschreitende Tabellen angelegt worden, aus denen die Celsiusgrade direkt entnommen werden konnten.

$$1\ \mathrm{Ohm} = [107/(52{,}02 + 0{,}036\,.\,\Omega)]\ {}^0\mathrm{C.}$$

Es ist nun noch der Einfluß eines Fehlers bei der Bestimmung von $\gamma_2^2 - \gamma_1^2$ zu ermitteln. Direkt durch die Beobachtung wird nur γ_1 bestimmt. γ_2 ergibt sich indirekt durch Rechnung aus γ_1 und Messung von $l/2$ und $z_2 - z_1$. Es ist nämlich

$$\frac{\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}}{2\,.\,\vartheta_{z=l/2}} = \cos\left(\gamma_1 \frac{z_2 - z_1}{2}\right),$$

$$\gamma_1 \,.\, \mathrm{tg}\,(\gamma_1\, l/2) = +\, b \quad \text{und} \quad \gamma_2 \,.\, \mathrm{ctg}\,(\gamma_2\, l/2) = -\, b\,.$$

Der durch $d\gamma_1$ in γ_2 hervorgerufene Partialfehler $(d\gamma_2)_{\gamma_1}$ hat stets dasselbe Vorzeichen wie $d\gamma_1$, was für $d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)$ von Wichtigkeit ist. Aus diesem Grunde wird $(d\,a^2)_{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}$ verhältnismäßig klein. Es ist:

$$(d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2))_{\gamma_1} = \pm\, 2\,.\,(\gamma_2 \,.\, (d\gamma_2)_{\gamma_1} - \gamma_1 \,.\, d\gamma_1)$$

und

$$(d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2))_{l/2} = \pm\, \gamma_2 \,.\, (d\gamma_2)_{l/2}\,.$$

Soll nun $(d\,a^2)_{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}$ von derselben Größenordnung sein wie die anderen Partialfehler, so folgt aus

$$(d\,a^2)_{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} = 0{,}00078: \quad d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) = 0{,}000075.$$

Werden die Längenmessungen, was leicht möglich ist, bis auf 0,1 mm genau ausgeführt, so macht sich ihr Einfluß eigentlich nur in γ_2 bemerkbar, und es genügt völlig, den Kosinus bis

auf 0,001 genau zu ermitteln, was ebenfalls keine Schwierigkeit bereitet.[1])

Für d(Kosinus) = 0,001 und $d(z_2 - z_1) = 0{,}02$ cm folgt aus

$$d\cos\left(\gamma_1 \frac{z_2 - z_1}{2}\right) = \sin\left(\gamma_1 \frac{z_2 - z_1}{2}\right) \cdot \frac{z_2 - z_1}{2} \cdot (d\gamma_1)_{\text{Kosinus}}:$$

$$(d\gamma_1)_{\text{Kosinus}} = 0{,}00069$$

und aus

$$(d\gamma_1)_{z_2 - z_1} = \frac{\gamma_1}{z_2 - z_1} \cdot d(z_2 - z_1): \quad (d\gamma_1)_{z_2 - z_1} = 0{,}00001_2 \,.$$

Somit ist jedenfalls:

$$d\gamma_1 \leqq 0{,}00070.$$

Ferner wird:

$$(d\,b)_{\gamma_1} = \left(\frac{\gamma_1}{\cos^2(\gamma_1\, l/2)} \cdot l/2 + \operatorname{tg}(\gamma_1\, l/2)\right) . \, d\gamma_1 \leqq 0{,}00022$$

und

$$(d\,b)_{l/2} = \frac{\gamma_1^2}{\cos^2(\gamma_1\, l/2)} \cdot d(l/2) \leqq 0{,}000\,002\,,$$

also:

$$d\,b \leqq 0{,}00022.$$

Schließlich ergibt sich aus:

$$\left\{-\gamma_2 \cdot \frac{1}{\sin^2(\gamma_2\, l/2)} \cdot l/2 + \operatorname{ctg}(\gamma_2\, l/2)\right\} (d\gamma_2)_b = d\,b:$$

$$(d\gamma_2)_b \leqq 0{,}00017$$

und aus

$$\left\{-\gamma_2 \cdot \frac{1}{\sin^2(\gamma_2\, l/2)} \cdot l/2 + \operatorname{ctg}(\gamma_2\, l/2)\right\} \cdot (d\gamma_2)_{l/2} = \frac{\gamma_2^2}{\sin^2(\gamma_2\, l/2)} \cdot d(l/2):$$

$$(d\gamma_2)_{l/2} \leqq 0{,}00011.$$

Somit wird endlich:

$$d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \leqq 0{,}00005_4$$

der Einfluß von $d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)$ ist demnach kleiner als der der übrigen Partialfehler.

Was schließlich noch die Bestimmung des Kosinus bis auf 0,001 genau betrifft, so ist bei den Temperaturmessungen

---

1) Vgl. hierzu das im Anhange der Dissertation durchgeführte Beispiel.

$(\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2})$ und $\vartheta_{z=l/2}$ keineswegs dieselbe Genauigkeit nötig wie etwa bei der Bestimmung der Differenzen $(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})$. Aus

$$\frac{\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}}{2 \, . \, \vartheta_{z=l/2}} = \cos\left(\gamma_1 \cdot \frac{z_2 - z_1}{2}\right)$$

folgt:

$$\frac{1}{2 \, . \, \vartheta_{z=l/2}} \, d(\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}) - \frac{\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}}{2 \, . \, (\vartheta_{z=l/2})^2} \cdot d(\vartheta_{z=l/2})$$
$$= d \cos\left(\gamma_1 \frac{z_2 - z_1}{2}\right) \leqq 0{,}001 \, ,$$

oder, da

$$\frac{\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}}{2 \, . \, \vartheta_{z=l/2}}$$

nahezu gleich 1 ist,

$$\frac{1}{2 \, . \, \vartheta_{z=l/2}} \cdot d(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2}) - \frac{1}{\vartheta_{z=l/2}} \cdot d(\vartheta_{z=l/2}) \leqq 0{,}001 \, .$$

Es wird daher für willkürliche Beobachtungsfehler:

$$\pm \frac{3}{2 \, . \, \vartheta_{z=l/2}} \cdot d\vartheta \leqq 0{,}001 \, ,$$

d. h. am Anfange des Beobachtungssatzes:

$$\vartheta_{z=l/2} = 100^0 \text{ C.} \quad d\vartheta \leqq 0{,}07^0 \text{ C.}$$

und am Ende des Beobachtungssatzes:

$$\vartheta_{z=l/2} = 35^0 \text{ C.} \quad d\vartheta \leqq 0{,}02^0 \text{ C.}$$

Hingegen erhält man für die konstanten, durch Umrechnung der Mikrovolt in Celsiusgrade entstehenden Fehler:

$$d\vartheta \cdot \left\{\frac{1}{2 \, . \, \vartheta_{z=l/2}} - \frac{1}{\vartheta_{z=l/2}}\right\} \leqq 0{,}001$$

oder

$$d\vartheta \cdot \frac{1}{2 \, . \, \vartheta_{z=l/2}} \leqq 0{,}001 \, ,$$

d. h. am Anfange des Beobachtungssatzes:

$$\vartheta_{z=l/2} = 100^0 \text{ C.} \quad d\vartheta \leqq 0{,}2^0 \text{ C.}$$

und am Ende des Beobachtungssatzes:

$$\vartheta_{z=l/2} = 35^0 \text{ C.} \quad d\vartheta \leqq 0{,}07^0 \text{ C.}$$

Das einzige, was bei der Bestimmung des Kosinus unbequem ist, aber trotzdem nicht einmal bei einer rohen Bestimmung vermieden werden kann, ist die Interpolation der

zeitlich nacheinander beobachteten Temperaturen $(\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2})$ und $\vartheta_{z=l/2}$ auf dieselbe Zeit.

Was schließlich die bei den Ringbeobachtungen erreichte Genauigkeit betrifft, so gilt für die β genau dasselbe wie beim Stabe. Zur Bestimmung der γ genügt es vollständig, den Durchmesser des Ringes bis auf 0,1 mm genau zu messen. Die theoretische Genauigkeitsgrenze ist hier ebenfalls $^1/_2$ Proz.

VI. Beobachtungsresultate und Bemerkungen zu denselben.

Die von mir untersuchten Materialien sind sämtlich dem Nachlasse Neumanns entnommen.[1]) Die Dimensionen der einzelnen Stäbe bez. Ringe erwiesen sich keineswegs als gleichgültig. Bei den Messungen mit zu großen Stäben oder Ringen waren die Temperaturerhöhungen an den Stellen $z = z_2$ bez. $z = 5.l/8$ zu klein gegenüber den Temperaturen an den Erwärmungsstellen, und es gewann die äußere Leitfähigkeit einen zu großen Einfluß. Waren hingegen die Dimensionen zu klein, so fand der Temperaturausgleich zu schnell statt, als daß eine genügende Anzahl von Beobachtungen gemacht werden konnte. Am zweckmäßigsten ergab sich für Ringe ein Durchmesser von 10—20 cm, für Stäbe eine Länge von etwa 20—50 cm, je nach der Leitfähigkeit des Materiales.

Die Resultate der einzelnen definitiven Messungen habe ich zahlenmäßig im Abschnitt VII der Dissertation angeführt. Hier begnüge ich mich daher in der Schlußtabelle die Mittelwerte zusammenzustellen.

Vergleicht man die von mir gefundenen Werte mit den Angaben Neumanns — obwohl ein solcher Vergleich aus den auf p. 939 angeführten Gründen nur wenig Zweck hat —, so sind meine Werte durchweg niedriger als die von Neumann angegebenen und stimmen somit besser mit den sich aus dem

---

1) Da in diesem weit mehr Stäbe als Ringe vorhanden sind, so hat Neumann bei seinen Untersuchungen wahrscheinlich trotz der komplizierteren Rechnung die Stäbe vor den Ringen bevorzugt, was wohl auch aus seinen Worten: „Dans quelques expériences j'ai aussi remplacé les barres par des anneaux“ (Ann. de chim. et phys. **66.** p. 184. 1862) hervorgeht.

Zahlenmaterial der verschiedensten Beobachtungen ergebenden Mittelwerten[1]) überein. Am stärksten weichen Neumanns Werte für Kupfer von meinen Resultaten ab; andererseits ist aber gerade bei Kupfer eine merkwürdig gute Übereinstimmung meiner Werte mit den von Jaeger und Diesselhorst[2]) gefundenen zu konstatieren.

Name	Neumann					Meine Mittelwerte für a^2 in g, cm und sec	Jaeger und Diesselhorst (nach ihren Angaben für die in Frage kommenden Temperaturen berechnet)
	k[3]) in Pariser Linie und Minute	Spezifisches Gewicht[3])	Spezifische Wärme[4])	a^2 in Pariser Linie und Minute	a^2 in g, cm und sec		
Kupfer	1306	8,73	0,093	1609	1,364	$1{,}12_0$ bei 75° C.	1,09 bei 75° C
Messing	356	8,48	0,093	451	0,382	$0{,}375_0$ „ 75	—
Zink	362	7,19	0,094	536	0,455	$0{,}411_7$ „ 50	0,398 bei 50° C.
Neusilber	129	8,54	0,095	159	0,135	$0{,}131_1$ „ 80	—
Eisen	193	7,74	0,11	227	0,192	$0{,}181_5$ „ 80	0,165 bei 80° C.

Auf eine experimentelle Bestimmung des spezifischen Gewichtes und der spezifischen Wärme habe ich verzichtet, weil eine solche für den Zweck meiner Arbeit gleichgültig ist. Ich hatte mir die Aufgabe gestellt, theoretisch und experimentell zu prüfen, ob die Neumannsche Methode zu einer exakten Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit geeignet ist, und hierbei

1) Eine Zusammenstellung der einzelnen Zahlenwerte (stationärer Zustand — Wiedemann, Franz, Forbes, Tait, Mitschell, F. Kohlrausch, Chwolson, Quick, Child, Longhear, Berget, Stewart, Hall; nicht stationärer Zustand — F. Neumann, Ångström, H. Weber, Kirchhoff, Hansemann, Lorenz, H. F. Weber, Hågström) findet sich in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure **40.** p. 45. 1896. Holborn und Wien.

2) Abhandlungen der Physik.-Techn. Reichsanstalt **3.** p. 269—424. 1900. Jaeger u. Diesselhorst, Über Kohlrauschs Methode der elektrischen Heizung.

3) Der Tabelle in den Ann. de chim. et phys. (III) **66.** p. 185. 1862 entnommen.

4) Den Tabellen in Kohlrauschs Praktischer Physik (9. Aufl. 1901) entnommen.

kommt einzig und allein die Bestimmung von a^2 in Betracht. Außerdem scheint es mir bei neuen Bestimmungen des Wärmeleitvermögens viel wertvoller zu sein, eine einfache und handliche Methode für Präzisionsmessungen weiter auszuarbeiten und insbesondere den Temperaturkoeffizienten für die verschiedenen Materialien genau zu bestimmen, als etwa für eine große Reihe einzelner Körper die innere Leitfähigkeit zahlenmäßig zu ermitteln. Das Leitvermögen hat ja bekanntlich nicht etwa für jede Metallsorte einen festen Wert, sondern ist für jeden einzelnen Körper einer und derselben Metallsorte — natürlich innerhalb gewisser Grenzen — verschieden[1]), was durch den großen Einfluß der geringsten chemischen Verunreinigung und einer verschiedenen mechanischen Behandlung — Härtegrad[2]) — bedingt ist. Ferner sind Mittelwerte durch die vielen in der Literatur vorliegenden Bestimmungen bereits hinlänglich genau bekannt, so daß weitere Bestimmungen an einem Mittelwerte nur wenig ändern können. Der Temperaturkoeffizient hingegen ist vorläufig noch nicht einmal der Größenordnung nach sicher, und einfache handliche Methoden fehlen völlig. Die Neumannsche Methode dürfte von den bisherigen die einfachste sein.

Will man meine Werte zu einem Vergleiche mit den Resultaten anderer Beobachter verwenden, so genügt es vollständig, für Dichte und spezifische Wärme Werte aus Tabellen — etwa Landoldt und Börnstein oder Kohlrausch — zu entnehmen, da diese beiden Größen für die einzelnen Körper einer und derselben Metallsorte nur sehr wenig varriieren. Ich füge daher noch folgende Schlußtabelle hinzu:

1) Aus diesem Grunde verzichte ich auf einen Vergleich mit den Werten anderer Beobachter und halte auch einen solchen mit den Werten Neumanns für unwichtig, obwohl ich sämtliche Materialien dem Nachlasse Neumanns entnommen habe. Diese Sammlung ist nämlich derartig reichhaltig, daß ich nur einen kleinen Teil derselben untersucht habe und mich daher zu einem Vergleiche meiner Werte mit denen Neumanns nicht berechtigt halte.

2) F. Kohlrausch (Wied. Ann. **33**. p. 678. 1888) hat das Leitvermögen des weichen Stahles um etwa 80 Proz. größer als dasjenige des harten gefunden.

	$a^2 \left[\frac{cm^2}{sec}\right]$	Temperatur in Celsiusgraden	Temperaturkoeffizient	Nach Kohlrausch ist		$k \left[\frac{g}{cm \cdot sec}\right]$
				Dichte	Spez. Wärme	
Stäbe:						
Eisen I	**$0,173_4$**	**80°**	**0,0010**	**7,8**	**0,11**	**$0,148_8$**
Eisen II	**$0,184_2$**	**80**	**0,0008**			**$0,158_6$**
Stahl	**$0,118_0$**	**80**	**0,0007**	**7,8**	**0,12**	**$0,110_4$**
Kupfer I	**$1,08_8$**	**75**	**$0,0004_5$**	**8,7**	**0,093**	**$0,879_9$**
Kupfer II	**$1,15_2$**	**75**	**0,0004**			**$0,931_7$**
Messing I	**$0,377_9$**	**75**	**0,0008**	**8,4**	**0,093**	**$0,295_2$**
Messing II	**$0,372_1$**	**75**	**0,0010**			**$0,290_7$**
Zink	**$0,425_2$**	**50**	**$0,0004_5$**	**7,1**	**0,094**	**$0,283_8$**
Neusilber	**$0,129_2$**	**80**	**$0,0005_5$**	**8,5**	**0,095**	**$0,104_3$**
Silber	**$1,69_0$**	**80**	**$0,0001_5$**	**10,5**	**0,056**	**$0,993_7$**
Blei	**$0,244_6$**	**40**	**0,0002**	**11,3**	**0,031**	**0,0857**
Zinn	**$0,378_4$**	**35**	**0,0004**	**7,3**	**0,054**	**$0,149_2$**
Ringe:						
Eisen I	**$0,189_5$**	**80**	**$0,0008_5$**	**7,8**	**0,11**	**$0,126_6$**
Eisen II	**$0,178_9$**	**80**	**0,0007**			**$0,158_5$**
Neusilber I	$0,132_6$	80	0,0010	8,5	0,095	$0,107_1$
Neusilber II	$0,131_6$	80	0,0010			$0,106_3$
Zink	$0,398_2$	50	0,0003	7,1	0,094	$0,265_8$

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Hrn. Prof. Dr. P. Volkmann im mathematisch-physikalischen Laboratorium der Universität Königsberg ausgeführt. Für die vielfache Unterstützung bei derselben spreche ich Hrn. Prof. Dr. Volkmann meinen wärmsten Dank aus.

Mariendorf bei Berlin, Oktober 1905.

(Eingegangen 20. Oktober 1905.)

3. *Über Astigmatismus, Koma und Aberration;*
von Allvar Gullstrand.

(Hierzu Taf. VIII.)

Die Abweichungen von der Homozentrizität in Strahlenbündeln, welche eine optische Abbildung vermitteln, werden einwandsfrei aus den geometrischen Eigenschaften der Wellenfläche des betreffenden Strahlenbündels deduziert. Diese Methode bietet nicht nur dadurch Vorteile, daß die einfache geometrische Beziehung zwischen Fläche und Normalenbündel eine leicht anzuwendende strenge mathematische Kontrolle ermöglicht, sondern auch darin, daß das Wahre von dem nur annähernd Wahren leichter getrennt werden kann, indem anstatt einer Anzahl ihrer geometrischen Bedeutung nach unbekannten Koeffizienten in einer Potenzenreihe — die ja nur annäherungsweise die Wahrheit darstellen kann — geometrische Größen untersucht werden, welche an und für sich die volle Wahrheit aussagen. Will man für die Beurteilung der Abweichungen die Potenzenreihen entwickeln, so findet man die fraglichen geometrischen Größen in den jetzt ihrer Bedeutung nach bekannten Koeffizienten der Reihe wieder.

Ganz abgesehen davon, daß die Wissenschaft als solche die Kenntnis des — nur durch die Untersuchung der Wellenfläche zu ermittelnden — Wesens der Abweichungen fordern muß, glaube ich, daß die Würdigung der geometrischen Beziehungen auch praktischen Nutzen bringen kann, indem die Abschätzung des Gültigkeitsbereiches der gewonnenen Formeln erleichtert wird.

Die mathematische Bedeutung der Brechungsformeln ist eine Beziehung zwischen den Hauptkrümmungen der Wellenflächen des einfallenden und gebrochenen Strahlenbündels und denjenigen der brechenden Fläche. Obwohl dieselben für die einfacheren Sonderfälle gewöhnlich ohne Bezugnahme auf die Wellenfläche hergeleitet werden, und obwohl dasselbe für ge-

wisse Abweichungen von der Homozentrizität der Fall ist, so ist einesteils eine erfolgreiche Erweiterung des zugänglichen Untersuchungsgebietes nur durch weitere Verfolgung der Beziehungen zwischen den drei Flächen zu erwarten, während anderenteils auch diese Beziehungen einer strengen mathematischen Kontrolle leicht zugänglich sind.

Nur den Nachteil hat die flächentheoretische Methode, daß sie gewöhnlich nicht als so leicht zugänglich angesehen wird, weshalb auch in der geometrischen Optik der dritten Dimension meistens, so weit als möglich, durch Projektionen aus dem Wege gegangen wird. Es ist auch nicht meine Absicht hier eine Darstellung zu geben, welche etwa gründliche Kenntnisse von der Geometrie der Flächen voraussetzte, sondern ich werde, da der Gegenstand nicht ohne Betreten dieses Gebietes hinreichend erläutert werden kann, nur eine möglichst leichtfaßliche Darstellung der geometrischen Beziehungen zwischen Wellenfläche und Strahlenbündel in den einfachsten Fällen geben, wobei ich von mathematischen Beweisen nur das zum Verständnis der Koma bei endlichem Einfallswinkel sowie der sogenannten sphärischen Aberration auf der Achse Unumgängliche anführen werde, im übrigen aber auf frühere Publikationen verweise.

Wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, ist die Darstellung auf monochromatische Abweichungen beschränkt, die in einfach brechenden Medien entstanden sind.

Unter dieser Bedingung kann bekanntlich durch jeden Punkt eines beliebigen Strahles eine Fläche gelegt werden, zu welcher sämtliche Strahlen des durch Brechung oder Spiegelung von ursprünglich homozentrischem Licht entstandenen Strahlenbündels Normalen sind. Eine solche Fläche, welche eigentlich die einhüllende Fläche der Elementarwellenflächen darstellt, wird Wellenfrontfläche oder kurz Wellenfläche des Strahlenbündels genannt. Die Bedeutung der Untersuchung dieser Fläche liegt darin, daß eben dieselben Abweichungen von der Homozentrizität, welche in einem Normalenbündel möglich sind, und — unter der erwähnten Bedingung — keine anderen im Strahlenbündel vorkommen.

Die Untersuchungsmethode kann nur eine differentialgeometrische sein, da nur die Differentialquotienten der Wellen-

flächengleichung in einem bestimmten Punkte aus den Gesetzen der Brechung erhalten werden, die Gleichung selber aber unbekannt bleibt und nur annäherungsweise durch Reihenentwickelung dargestellt werden kann. Ebenso wie der untersuchte Punkt auf der Wellenfläche durch diese Differentialquotienten mathematisch charakterisiert ist, eben auf dieselbe Weise geben uns die aus den Differentialquotienten ermittelten geometrischen Größen mathematisch exakte Maße, welche den durch den betreffenden Punkt gehenden Strahl und dessen Beziehungen zu der nächsten Umgebung im Strahlenbündel charakterisieren. Diese Untersuchung eines Strahlenbündels in der Umgebung eines bestimmten Strahles, welche mit der Untersuchung einer Fläche in der Umgebung eines bestimmten Punktes zusammenfällt, liefert also mathematisch genaue Resultate. Sobald man aber die durch Reihenentwickelung gewonnene Flächengleichung oder die entsprechenden Gleichungen der Normale benutzt, hat man schon den Boden der strengen Wahrheit verlassen, und die Resultate müssen bei jedem Schritt besonders auf ihre Zuverlässigkeit geprüft werden.

Es wird also eine endliche Öffnung des Strahlenbündels vorausgesetzt und dasselbe zunächst längs einem ausgewählten Strahle, dem Hauptstrahl, untersucht. Wird die Untersuchung längs mehreren Strahlen ausgeführt, so gewinnt man eine um so ausgedehntere Kenntnis vom Strahlenbündel, je mehr Untersuchungen angestellt werden. Die exakte Kenntnis kann nur auf diese Weise gewonnen werden, und die Sache würde sich offenbar nicht anders verhalten, wenn die Gleichung der Wellenfläche bekannt wäre, da ja dieselbe nur auf diese Weise, d. h. durch Untersuchung verschiedener Flächenpunkte, angewendet werden könnte.

Astigmatismus.

In der Flächengleichung $z = f(xy)$ mögen die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung, wie gebräuchlich mit $p\,q\,r\,s\,t$ bezeichnet werden. Das Koordinatensystem wird so gewählt, daß derjenige Strahl, längs welchem das Strahlenbündel untersucht wird, mit der Z-Achse, die Haupttangenten im entsprechenden Punkte der Wellenfläche mit der X- bez. Y-Achse zusammenfallen. Für diesen Punkt ist dann

$$x = y = z = p = q = s = 0$$

sowie
$$D_{,} = \frac{1}{\varrho_{,}} = r, \quad D_{,,} = \frac{1}{\varrho_{,,}} = t,$$
wenn mit $D_{,} D_{,,}$ die Hauptkrümmungen, mit $\varrho_{,} \varrho_{,,}$ die entsprechenden Krümmungshalbmesser im ersten bez. zweiten Hauptnormalschnitte bezeichnet werden, und derjenige Hauptnormalschnitt, welcher mit der XZ-Ebene zusammenfällt, der erste genannt wird.

Die allgemeinen Gleichungen der Flächennormale
$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0 \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0$$
geben, differentiiert, für den fraglichen Punkt, d. h. nach Einsetzen von $z = p = q = s = 0$:
$$d\xi = dx(1 - \zeta r), \quad d\eta = dy(1 - \zeta t).$$

Geht man auf der Fläche zu einem unendlich nahe gelegenen Punkt über, so entspricht diesem Punkte ein dem untersuchten Strahle unendlich nahe verlaufender anderer Strahl, dessen Beziehungen zum ersten diese Gleichungen angeben. Um zu erfahren, ob der untersuchte Strahl von anderen unendlich nahe verlaufenden Strahlen geschnitten wird, und in welchen Punkten, setzt man $d\xi = d\eta = 0$, woraus sich ergibt
$$\text{entweder} \quad \zeta = \varrho_{,}, \quad dy = 0 \quad \text{oder} \quad \zeta = \varrho_{,,}, \quad dx = 0,$$
wofern nicht $\varrho_{,} = \varrho_{,,}$ ist. Dies besagt, daß ein Strahl nur in den Krümmungsmittelpunkten der Wellenfläche, den *Fokalpunkten* des Strahlenbündels, von nächstliegenden Strahlen geschnitten werden kann, sowie daß die Ebene, welche zwei sich schneidende, einander unendlich nahe verlaufende Strahlen enthält, mit einem Hauptnormalschnitte der Wellenfläche zusammenfällt, den Fall $\varrho_{,} = \varrho_{,,}$ ausgeschlossen. Daß der Strahl wirklich von nächstliegenden Strahlen geschnitten wird, beweisen erst sukzessive Differentiationen, die ich an anderer Stelle[1]) ausgeführt habe.

Ein Strahl kann also entweder in zwei oder aber nur in einem Punkte von anderen ihm unendlich nahe verlaufenden Strahlen desselben, ursprünglich homozentrisch gewesenen Strahlenbündels geschnitten werden. Im ersteren Falle *ist das Strahlenbündel längs dem betreffenden Strahle astigmatisch,*

1) Allgemeine Theorie der monochromathischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophtalmologie, Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups. Ser. III 1900. Separat im Buchhandel zugänglich. p 45.

und der Grad des Astigmatismus wird — vom Brechungsindex des betreffenden Mediums abgesehen — durch die Differenz der Hauptkrümmungen der Wellenfläche $D_{,} - D_{,,}$ gemessen, falls das Strahlenbündel auf eine solche bezogen wird. Dies ist bei Übergang von einem Medium zum anderen der Fall, aber nicht bei Übergang von einer brechenden Fläche zur anderen in einem und demselben Medium. Hierbei wird der Astigmatismus durch die Brennstrecke $\varrho_{,,} - \varrho_{,}$ gemessen, die mit E bezeichnet werden mag.

Von der allgemeinen Konstitution des astigmatischen Strahlenbündels haben wir nur erfahren, daß die beiden Ebenen, *Hauptschnitte des Strahlenbündels*, die einen beliebigen Strahl und die ihm unendlich nahe verlaufenden Strahlen enthalten, welche ihn schneiden, aufeinander senkrecht stehen und mit den Hauptnormalebenen der Wellenfläche zusammenfallen. Ohne den Boden des exakten Wissens zu verlassen, erfahren wir auf dieser Stufe der Untersuchung auch nicht mehr davon.

Wird eine Reihenentwickelung nach Potenzen von x und y vorgenommen, wobei die Flächengleichung

$$z = \frac{x^2}{2\varrho_{,}} + \frac{y^2}{2\varrho_{,,}} + \cdots$$

und die Normalengleichungen

$$\xi = x\left(1 - \frac{\zeta}{\varrho_{,}}\right) + \cdots, \qquad \eta = y\left(1 - \frac{\zeta}{\varrho_{,,}}\right) + \cdots$$

erhalten werden, so ist auch damit kein Schade geschehen, solange keine weiteren Schlüsse daraus gezogen werden. Wenn aber aus dem Umstande, daß die so erhaltene Flächengleichung ein Paraboloid darstellt, der Schluß gezogen wird, daß das oskulierende Paraboloid ein besseres Bild des allgemeinen Flächenelementes gäbe als irgend ein anderes oskulierendes Flächenstück, so ist das ebenso falsch, wie die allgemein verbreitete Ansicht, daß das aus den so erhaltenen Normalengleichungen hergeleitete Sturmsche Konoid besser als irgend ein anderes beliebiges, der Tatsache der beiden aufeinander senkrechten Hauptschnitte nicht widersprechendes Modell die allgemeine Konstitution des Strahlenbündels darstelle. Im allgemeinen Strahlenbündel variieren sowohl die Fokalabstände wie die Hauptschnitte von Strahl zu Strahl,

und die Typen dieser Variationen können erst durch sukzessive Differentiationen ermittelt werden. Ein Modell, das die *allgemeine* Konstitution des Strahlenbündels darstellen soll, kann nicht mehr als vier Strahlen enthalten, von welchen je zwei in einem der beiden aufeinander senkrechten Hauptschnitte symmetrisch zu der Schnittlinie dieser beiden Ebenen miteinander verlaufen, da es weiter nichts Allgemeingültiges in der Konstitution des unendlich dünnen Strahlenbündels gibt. Wird ein einziger Strahl mehr hinzugefügt, so ist, wie unten weiter dargelegt werden soll, schon etwas vom speziellen Typus ausgesagt. Es ist leicht einzusehen, daß dies auch für den Fall gilt, daß ein Strahl in einem der beiden Hauptschnitte zugefügt wird, indem derselbe entweder durch den Schnittpunkt der beiden anderen gehen muß oder nicht, wodurch ausgesagt wird, ob der betreffende Fokalabstand längs dem Hauptstrahl ein Maximum bez. Minimum hat oder nicht. Der Ausdruck, daß der Hauptstrahl im Fokalpunkte von nächstliegenden oder ihm unendlich nahe verlaufenden Strahlen geschnitten wird, darf nämlich nicht mehr bedeuten, als daß dieser Punkt die Limeslage des Schnittpunktes darstellt, welche erst in dem Augenblicke erreicht wird, wo die sich schneidenden Strahlen in einem zusammenfallen.

Da das Konoid von Sturm also nicht die allgemeine Konstitution des Strahlenbündels angibt, sondern einen bestimmten Typus bezeichnet, so ist es von Interesse zu erfahren, ob dieser Typus auch den allgemeinsten Fall darstelle. Ich schicke von den Resultaten der nächsten Stufe der Rechnung, der Untersuchung der Koma, voraus, daß es nur den speziellsten, durch zwei Symmetrieebenen charakterisierten Haupttypus darstellen könnte. Endlich beantworte ich auch im voraus die Frage, ob das Konoid überhaupt einen mathematisch möglichen Typus des Strahlenbündels darstelle. Das ist bei einfach brechenden Medien und ursprünglich homozentrischem Lichte nicht der Fall, da ein Flächennormalenbündel mit zwei geraden Brennlinien nicht existiert.

Der Umstand, daß vom Sturmschen Konoide als Repräsentanten für die Konstitution eines dünnen Strahlenbündels nur das wirklich wahr ist, was aus den Eigenschaften des allgemeinen Flächenpunktes direkt hervorgeht, dürfte den Vorteil

der Kenntnis von den geometrischen Eigenschaften der Wellenfläche für die Untersuchung der im Strahlenbündel vorkommenden Abweichungen von der Homozentrizität beweisen. Es ist zwar gestattet, ein Flächenstück, dessen Breite ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung darstellt, wenn die Länge unendlich klein von der ersten Ordnung ist, als eine unendlich kurze Linie zu betrachten, und es ist wahr, daß jedes Strahlenbündel zwei aufeinander und auf den Hauptstrahl senkrechte solche Querschnitte hat — aber nur wenn es unendlich dünn ist, d. h. bei stetig sich verengernder Blende erst in dem Augenblicke, wo es verschwindet.

Praktische Versuche lehren auch, daß das Konoid, wenn es sich um reelle Strahlenbündel handelt, nur den Typus mit zwei Symmetrieebenen einigermaßen repräsentieren kann.

Will man die Abweichung von der Homozentrizität im Strahlenbündel durch Entwickeln nach Potenzen der Öffnungswinkel ausdrücken, so kann man schon auf diese Stufe eine longitudinale und eine laterale Abweichung definieren. Wenn nämlich einer der Fokalpunkte als das Zentrum angesehen wird, von welchem aus man die Abweichung rechnet, so kann der Abstand des Schnittpunktes des in einem Hauptschnitte verlaufenden Strahles mit dem anderen Hauptschnitte vom gewählten Zentrum als die longitudinale Abweichung dieses Strahles, der Abstand des Schnittpunktes mit der im gewählten Zentrum senkrecht zum Hauptstrahl gelegten Ebene vom selben Zentrum als die laterale Abweichung bezeichnet werden. Wenn die Öffnungswinkel $w_{,} w_{,,}$ auf dieser Stufe der Rechnung und im gewählten Koordinatensystem durch die Beziehungen

$$dw_{,} = D_{,} dx, \quad dw_{,,} = D_{,,} dy$$

definiert werden, so erhält man, falls z. B. der erste Fokalpunkt als Zentrum gewählt wird, für die longitudinale Abweichung den Wert E, für die laterale: $w_{,,} . E$. Obwohl nun diese Bezeichnung nicht üblich ist, führe ich die Werte deshalb an, weil man aus denselben schon auf dieser Stufe der Rechnung das allgemeingültige Gesetz ablesen kann, daß aus den Differentialquotienten n^{ter} Ordnung der Flächengleichung, die unendlich kleinen Größen der Ordnung $n - 1$ in der lateralen, der Ord-

nung $n-2$ in der longitudinalen Abweichung eines Strahles von der Homozentrizität erhalten werden.

Ist die Brennstrecke von derselben Größenordnung wie die Öffnung des Strahlenbündels, so gehorcht dasselbe den Gesetzen des Astigmatismus nicht mehr. Diese Fälle gehören in dieselbe Kategorie wie die nicht astigmatischen Strahlenbündel, von welchen auf dieser Stufe der Rechnung nur der Fokalpunkt bekannt ist, indem erst weitere Differentiationen lehren, von welchen nächstliegenden Strahlen ein Strahl geschnitten wird, längs welchem das Strahlenbündel ohne Astigmatismus — *anastigmatisch* — ist.

Was die Terminologie betrifft, so habe ich den Astigmatismus als Eigenschaft des Strahlenbündels längs einem ausgewählten Strahle bezeichnet, was immer gemeint wird, wenn kurz vom Astigmatismus eines Strahlenbündels gesprochen wird. Unter Astigmatismus eines optischen Instrumentes wird leider Verschiedenes verstanden. In der medizinischen Optik, wo Instrumente vorkommen, in welchen das axiale Strahlenbündel längs der Achse astigmatisch ist — astigmatische Augen, sphärozylindrische bez. torische Brillen — wird diese Eigenschaft gemeint. In der Literatur der konstruktiven Optik dagegen versteht man darunter den Astigmatismus eines schief einfallenden Strahlenbündels, oft auch nur den eines Strahlenbündels mit unendlich kleiner Neigung gegen die Achse, in welchem letzteren Falle der Astigmatismus des Instrumentes durch die Krümmungsdifferenz der beiden Bildflächen im Schnittpunkte mit der Achse gemessen wird. Ich kann nicht umhin, der Meinung Ausdruck zu geben, daß erstere Terminologie wissenschaftlich richtig, letztere recht unglücklich ist.

Die Formeln für die Berechnung des Astigmatismus im gebrochenen Strahlenbündel, wenn das einfallende Strahlenbündel und die brechende Fläche bekannt sind, hat schon Hamilton[1]) implizite gegeben, wonach dieselben von Sturm[2]) in leicht verständlicher Form entwickelt wurden. Man erhält sie, wie solche höherer Ordnung, durch Differentiation des

1) W. R. Hamilton, Theory of Systems of rays. Suppl. Trans. Roy. Irish Acad. 16. T. 1. 1830. p. 19. Lit. V.

2) Ch. Sturm, Mémoire sur l'optique. Journal de Math. pures et apliquées. 1838.

analytischen Ausdruckes für das Brechungsgesetz und der Normalengleichungen. Allgemein erhält man aus den Differentialquotienten einer beliebigen Ordnung im Schnittpunkte der Wellenfläche des einfallenden Bündels mit einem bestimmten Strahle und den Differentialquotienten derselben Ordnung in der Gleichung der brechenden Fläche für den Schnittpunkt mit dieser die exakten Werte der entsprechenden Differentialquotienten für den Schnittpunkt des gebrochenen Strahles mit der Wellenfläche des gebrochenen Strahlenbündels. Für die Spezialfälle, wo ein Hauptschnitt des einfallenden Strahlenbündels und ein Hauptnormalschnitt der brechenden Fläche mit der Brechungsebene zusammenfällt, werden die entsprechenden einfacheren Formeln gewöhnlich ohne Rücksichtnahme auf die Wellenfläche entwickelt.

Koma.

Durch die Differentialquotienten dritter Ordnung der Flächengleichung erhält man die von der zweiten Potenz der Öffnungswinkel abhängigen lateralen Abweichungen von der Homozentrizität, die Komafehler. Zunächst hat man dabei die geometrische Bedeutung dieser Differentialquotienten zu ermitteln.

Werden die allgemeinen Gleichungen für die Hauptkrümmungen der Flächen differentiiert, dann $p = q = s = 0$ gesetzt, so erhält man für das gewählte Koordinatensystem:

$$d D_{,} = d r\,, \quad d D_{,,} = d t.$$

Werden nun allgemein die Bogenelemente der Hauptkrümmungslinien der Fläche mit $d s_{,}\, d s_{,,}$ bezeichnet, so ergeben sich für das fragliche Koordinatensystem, in welchem $d s_{,} = d x$ und $d s_{,,} = d y$ ist, die einfachen Beziehungen:

$$\frac{d D_{,}}{d s_{,}} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{d D_{,}}{d s_{,,}} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{d D_{,,}}{d s_{,}} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{d D_{,,}}{d s_{,,}} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

durch welche einerseits aus einer beliebigen Flächengleichung die vom Koordinatensystem unabhängigen geometrischen Größen $d D_{,}/d s_{,} \ldots$ für einen beliebigen Punkt erhalten werden, andererseits aber auch, wenn diese bekannt sind, die Flächengleichung bis einschließlich der dritten Potenz von x und y entwickelt werden oder, was damit gleichbedeutend ist, die Gleichung

einer Fläche gewonnen werden kann, welche im fraglichen Punkt eine vollständige Berührung dritter Ordnung mit der Wellenfläche hat. Wir wissen hiermit, daß von Komafehlern das, und nur das, wahr ist, was aus diesen geometrischen Größen direkt abgeleitet werden kann: wird nach anderer Methode weniger gefunden, so hat die Methode nicht die volle Wahrheit gegeben, und was mehr gefunden wird, ist entweder falsch oder nur annähernd wahr.

Da die vier Größen die Variation der Hauptkrümmungen längs den beiden Hauptkrümmungslinien beim Durchgang durch den fraglichen Punkt bezeichnen, so zeigt der erste Blick, daß je zwei von ihnen verschwinden, je nachdem das Strahlenbündel um die eine oder andere Hauptnormalebene symmetrisch ist. Es empfiehlt sich schon deshalb, aber auch aus praktischen Gründen, je nachdem zwei Symmetrieebenen, nur eine oder gar keine vorhanden ist, drei Haupttypen der möglichen Strahlenbündel zu unterscheiden, welche als symmetrische Strahlenbündel, bez. Strahlenbündel mit einfacher, mit doppelter Asymmetrie bezeichnet werden.

Für die sogenannten Komafehler in zentrierten optischen Instrumenten braucht man also nur den Typus mit einfacher Asymmetrie zu berücksichtigen, indem bei schiefem Einfall das Strahlenbündel längs dem die Achse des Instrumentes schneidenden Strahle untersucht wird.

Wenn derjenige Hauptschnitt des Strahlenbündels, welcher mit der Symmetrieebene zusammenfällt, als der erste bezeichnet wird, so sind also nur die beiden Größen $dD_{,}/ds_{,}$ und $dD_{,,}/ds_{,}$ von Null verschieden. Ich bezeichne sie der Kürze halber mit U bez. W und nenne sie die *direkte* bez. die *transversale Krümmungsasymmetrie längs der ersten Hauptkrümmungslinie* im fraglichen Punkt. Die beiden Werte, welche gleich Null sind, werden also die direkte bez. die transversale Krümmungsasymmetrie längs der zweiten Hauptkrümmungslinie genannt.

So wie die Hauptkrümmungen von Punkt zu Punkt auf der Wellenfläche variieren, so entsprechen jedem Punkte auf dieser Fläche zwei Krümmungsmittelpunkte, und die verschiedenen Krümmungsmittelpunkte bilden zusammen zwei Flächen oder, wie man es gewöhnlich ausdrückt, eine Fläche, die Krümmungsmittelpunktsfläche oder Evolute, mit zwei ge-

sonderten Schalen, welche nur in einzelnen ausgezeichneten Punkten sich berühren. Diejenige Schale, welche den ersten Krümmungsmittelpunkt, den Schnittpunkt des Hauptstrahles mit den ihm im ersten Hauptschnitt nächstliegenden Strahlen enthält, nenne ich die erste.

Für die Richtungskosinus $\alpha\,\beta\,\gamma$ einer beliebigen Flächennormale gilt allgemein

$$\alpha = -\frac{p}{N}, \quad \beta = -\frac{q}{N}, \quad \gamma = \frac{1}{N},$$

wo

$$N^2 = 1 + p^2 + q^2$$

gesetzt ist. Werden die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Wellenfläche mit $x\,y\,z$, die des entsprechenden ersten Krümmungsmittelpunktes mit $\xi\,\eta\,\zeta$ bezeichnet, so ergibt die Projektion des ersten Krümmungshalbmessers $\varrho_,$ auf die drei Koordinatenachsen:

$$N(\xi - x) = -p\varrho_,, \quad N(\eta - y) = -q\varrho_,, \quad N(\zeta - z) = \varrho_,.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen ergibt für das gewählte Koordinatensystem, in welchem $p = q = s = 0$, mithin auch $dN = 0$ ist:

$$d\xi = dx - \varrho_, dp = 0, \qquad d\eta = dy - \varrho_, dq = \frac{D_, - D_{,,}}{D_,}\,dy,$$

$$d\zeta = d\varrho_, = -\frac{U}{D_,^2}\,dx,$$

$$d^2\xi = d^2x - \varrho_, d^2p - 2\,d\varrho_, dp = \frac{U}{D_,}\,dx^2 - \frac{W}{D_,}\,dy^2.$$

Man kann nun η und ζ als unabhängige Variablen betrachten, ξ als abhängige, wobei für die Differentialquotienten der Gleichung $\xi = f(\eta\,\zeta)$ der ersten Evolutenschale im ersten Krümmungsmittelpunkt folgende Werte resultieren

$$\frac{\partial\xi}{\partial\eta} = \frac{\partial\xi}{\partial\zeta} = \frac{\partial^2\xi}{\partial\eta\,\partial\zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial\eta^2} = -\frac{D_, W}{(D_, - D_{,,})^2}, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial\zeta^2} = \frac{D_,^3}{U},$$

aus welchen direkt hervorgeht, daß die Hauptnormalebenen der ersten Evolutenschale mit der Symmetrieebene bez. der ersten Fokalebene des Strahlenbündels, d. h. der im ersten Fokalpunkt senkrecht den Hauptstrahl schneidenden Ebene

zusammenfallen, und für den Krümmungsradius der Schnittlinie der Schale mit erstgenannter Ebene der Wert

$$R = \frac{U}{D_{,}^{2}}$$

erhalten wird, während die Krümmung der Schnittlinie der Schale mit der Fokalebene den Wert $-D_{,}W/(D_{,}-D_{,,})^2$ hat.

Erstgenannter Krümmungsradius dient als Maß der *direkten Asymmetrie des Strahlenbündels im ersten Hauptschnitt.* Man erhält ihn mittels obiger Formel unmittelbar aus dem entsprechenden Asymmetrienwerte der Wellenfläche und umgekehrt. Er wird, wie alle Krümmungen, positiv gerechnet, wenn die konkave Seite der betreffenden Linie der positiven Richtung der betreffenden Koordinatenachse zugekehrt ist. Wie ersichtlich, ist die Schale konkavkonvex, wenn die beiden Asymmetrienwerte der Wellenfläche, wie in optischen Instrumenten meistens der Fall ist, dasselbe Vorzeichen haben. Je größer dabei diese Asymmetrienwerte sind, um so größer wird der Krümmungsradius der Schnittlinie der Schale mit der Symmetrieebene, um so kleiner der Radius der Schnittlinie mit der Fokalebene, um so mehr geht also die Gestalt der Schale von einer sattelähnlichen in eine rinnenförmige über, was Anlaß zu der Bezeichnung „Rinnenfehler“ gegeben hat, wovon weiter unten die Rede sein wird.

Von der zweiten Evolutenschale wissen wir im voraus, daß sie im ersten Hauptschnitt des Strahlenbündels eine Kante haben muß, denn sonst wäre dieser Hauptschnitt keine Symmetriebene. Um die Richtung der Kantlinie zu finden, differentiieren wir die Gleichungen für die zweite Schale

$$N(\xi - x) = -p\,\varrho_{,,}\,, \quad N(\zeta - z) = \varrho_{,,}$$

und erhalten

$$d\,\xi = -\frac{D_{,}-D_{,,}}{D_{,,}}\,d\,x\,, \qquad d\,\zeta = -\frac{W}{D_{,,}^{2}}\,d\,x\,,$$

d. h. für den Winkel ϑ, den die Tangente der Kantlinie mit der zweiten Fokalebene bildet

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{W}{D_{,,}(D_{,}-D_{,,})}\,,$$

wobei die positive Richtung dieses Winkels durch die Beziehung $\operatorname{tg}\vartheta = -d\,\zeta/d\,\xi$ definiert ist. Wird im zweiten Fokal-

punkt die Normale zur Kantlinie in der Symmetrieebene gezogen und verlängert, bis sie die erste Fokalebene trifft, so findet man für den längs der Normale der ersten Schale gemessenen Abstand des Schnittpunktes vom ersten Krümmungsmittelpunkt den Wert

$$S = -E \operatorname{tg} \vartheta = \frac{W}{D_{,} D_{,,}^{2}},$$

der als Maß der *transversalen Asymmetrie des Strahlenbündels im ersten Hauptschnitt* dient. Wie ersichtlich, entspricht einem positiven Werte von S die Bedingung $\xi > 0$ für den fraglichen Schnittpunkt.

Durch die beiden Asymmetrienwerte R und S ist das Strahlenbündel bezüglich Komafehler vollständig charakterisiert. Dieselben sind von der Lage der Wellenfläche unabhängig, werden aber durch die ermittelten Beziehungen unmittelbar aus den entsprechenden Differentialquotienten der Gleichung einer beliebigen Wellenfläche erhalten und geben andererseits unmittelbar durch dieselben Beziehungen die Differentialquotienten dritter Ordnung einer beliebigen Wellenfläche.

Ebenso wie die Fokalabstände von Strahl zu Strahl variieren, ist das auch mit den Asymmetrienwerten der Fall. Wenn kurz von den Asymmetrienwerten eines Strahlenbündels gesprochen wird, so wird also nur die Asymmetrienwerte längs dem fraglichen Strahle gemeint.

Um die Abweichungen eines Strahles von der Homozentrizität mittels dieser Werte nach Potenzen von den Öffnungswinkeln $w_{,} w_{,,}$ entwickeln zu können, müssen wir zunächst diese näher definieren. Am einfachsten tun wir dies, indem wir damit die Winkel bezeichnen, welche die Projektionen des Strahles auf den beiden Hauptnormalebenen mit dem Hauptstrahl bilden. Hierbei gelten für $p = q = s = 0$ folgende Beziehungen:

$$d w_{,} = d p, \quad d^2 w_{,} = d^2 p, \quad d w_{,,} = d q, \quad d^2 w_{,,} = d^2 q,$$

durch welche auch die Vorzeichen in Übereinstimmung mit der vorläufigen, p. 947 gegebenen Definition bestimmt sind. Eine kurze Überlegung lehrt, daß diese Beziehungen auch für die Definition der Öffnungswinkel als der Winkel zwischen dem

Strahle und den beiden Hauptschnitten gültig sind, da die Ausdrücke für diese Definition

$$w_{,} = -\arc\sin\alpha,\quad w_{,,} = -\arc\sin\beta$$

auch zu denselben führen.

Durch die unmittelbar herzuleitenden Beziehungen

$$R = -\frac{d\varrho_{,}}{dw_{,}},\quad S = -\frac{d\varrho_{,,}}{dw_{,}}$$

tritt die analoge Bedeutung der Asymmetrienwerte des ohne Zusammenhang mit einer Wellenfläche untersuchten Strahlenbündels und der Krümmungsasymmetrien der Wellenfläche zutage.

Um nicht zu viele Ausdrücke für die Abweichungen eines Strahles von der Homozentrizität im astigmatischen Strahlenbündel zu erhalten, empfiehlt es sich, die lateralen Abweichungen in den beiden Fokalebenen so zu messen, daß in der ersten nur der Abstand des Schnittpunktes des Strahles mit der Fokalebene vom zweiten Hauptschnitt berücksichtigt, in der zweiten nur der Abstand des Schnittpunktes des Strahles mit der Fokalebene vom ersten Hauptschnitt gemessen wird. Die lateralen Abweichungen eines Strahles sind dann die Abweichungen vom Typus des Konoides von Sturm. Die auf diese Weise in der ersten Fokalebene gemessene Abweichung nenne ich *die erste laterale,* die andere die *zweite laterale.* Die entsprechenden longitudinalen Abweichungen lassen sich nur unter Berücksichtigung der abwickelbaren Normalflächen definieren, können aber auch bei der Untersuchung der Komafehler entbehrt werden, weshalb ich sie hier übergehe, um die Darstellung nur mit dem notwendigen Minimum von der Flächentheorie zu belasten.

Wir haben also die Gleichungen der Normale noch einmal zu differentiieren, wobei $\xi\,\eta$ als Funktionen von $w_{,} w_{,,}$ zu behandeln, mithin zunächst $x\,y$ als Funktionen von $p\,q$ darzustellen sind. Aus den Beziehungen

$$d^2 p = U\,dx^2 + W\,dy^2 + D_{,}\,d^2x,\quad d^2 q = 2\,W\,dx\,dy + D_{,,}\,d^2 y$$

erhalten wir

$$d^2 x = -R\,dp^2 - S\,dq^2 + \varrho_{,}\,d^2 p,\quad d^2 y = -2\,S\,dp\,dq + \varrho_{,,}\,d^2 q,$$

und aus den Normalengleichungen durch zweimalige Differentiation

$$d^2\xi = d^2x - \zeta d^2p, \quad d^2\eta = d^2y - \zeta d^2q,$$

mithin, indem wir für die erste laterale Abweichung in der ersten Gleichung $\zeta = \varrho_{,}$, für die zweite laterale Abweichung in der zweiten $\zeta = \varrho_{,,}$ setzen, die Werte:

Erste laterale Abweichung: $\xi = -\frac{w_{,}^2}{2}R - \frac{w_{,,}^2}{2}S.$

Zweite laterale Abweichung: $\eta = -w_{,}w_{,,}S.$

Andere Komafehler als diese gibt es nicht, wofern man darunter Abweichungen versteht, welche der zweiten Potenz der Öffnungswinkel proportional sind. Wie ersichtlich, würde man den gleichen Ausdruck für diese Abweichungen erhalten, wenn dieselben in einer beliebigen zum Hauptstrahl senkrechten Ebene gemessen würden, da $d^2p = d^2w_{,}$, $d^2q = d^2w_{,,}$ ist, und $w_{,}w_{,,}$ unabhängige Variabelen sind. Es würde aber dabei ein Glied erster Ordnung hinzukommen, während die angegebenen Werte für die erste bez. zweite laterale Abweichung die totale Abweichung bis einschließlich der Ordnung der Komafehler darstellen, indem das Glied erster Ordnung verschwindet. Dazu kommt noch, daß auf der Stufe der Aberrationen nur auf diese Weise einfache Werte erhalten werden können, und eine gleichmäßige Behandlung der Abweichungen verschiedener Ordnung immer ein Vorteil ist.

Diese Darstellung der Komafehler habe ich, um dieselbe zugänglicher zu machen, nicht nur in der Weise beschränkt, daß ich nur auf Strahlenbündel mit einfacher Asymmetrie Rücksicht genommen habe, sondern auch dadurch, daß nur diejenigen aus den Differentialquotienten dritter Ordnung der Flächengleichung zu ermitteluden geometrischen, das Strahlenbündel charakterisierenden Größen hergeleitet wurden, die für das Verständnis des Wesens der Abweichungen unumgänglich sind. Die vollständige Untersuchung einschließlich der Aberrationen, d. h. unter Berücksichtigung sämtlicher Differentialquotienten bis einschließlich der vierten Ordnung in der Gleichung einer beliebigen Wellenfläche, findet man in der schon zitierten Arbeit. Die vollständige Untersuchung der Asym-

metrienwerte findet sich mit geringerem mathematischen Apparate in einer älteren Publikation.[1]) Zwar findet man weder auf der einen noch auf der anderen Stelle den Namen Koma, weil dieser Name einen Spezialfall bezeichnet, und die Untersuchungen allgemeingültig sind. In letztgenannter Arbeit sind allgemeingültige Formeln entwickelt, welche für ein beliebiges einfallendes Strahlenbündel nach Brechung in einer beliebigen Fläche — unter Berücksichtigung der Differentialquotienten dritter Ordnung auch in der Gleichung dieser — die Asymmetrienwerte des gebrochenen Strahlenbündels geben. Die einfacheren Formeln, welche beim Vorhandensein einer Symmetrieebene gelten, sind dort auch mit den einfachsten Mitteln entwickelt.

Mit diesen Formeln habe ich die Asymmetrienwerte bei schiefem Durchgang durch Linsen berechnet und durch Versuche kontrolliert, Versuche, welche bewiesen haben, daß für praktisch vorkommende Öffnungen die Berücksichtigung der Asymmetrien genügt, um die verschiedenen Typen von Strahlenbündeln zu charakterisieren, so daß also die Definition einer Brennlinie als eines Strahlenbündelquerschnittes, dessen Breite unendlich klein von dritter Ordnung ist, wenn die Länge ein Unendlichkleines erster Ordnung darstellt, hinreichend genau ist, um bei den vorkommenden Öffnungen auch diese Brennlinie auf einen entsprechend schief gehaltenen Schirm auffangen zu können.

Die oben gegebene Darstellung der Asymmetrien geht davon aus, daß die Brennstrecke endlich ist. Doch ist es ersichtlich, daß die in den Werten der lateralen Abweichungen auftretenden Größen R und S unabhängig von der Größe der Brennstrecke aus den Differentialquotienten dritter Ordnung der Wellenflächengleichung erhalten werden. In der Tat sind dieselben auch im anastigmatischen Strahlenbündel gültig. Die Untersuchung dieser Strahlenbündel erforderte eine Durchforschung der Kreispunkte der Flächen, welche mir vollständig erst in der zitierten späteren Arbeit gelang, wo ich das für die fragliche Aufgabe Notwendige angeführt habe.[2])

1) A. Gullstrand, Skand. Arch. f. Physiologie 2. p. 269. 1890.
2) Vgl. auch A. Gullstrand, Acta Mathematica 29. p. 59. 1904.

Von anderen Darstellungen der Komafehler bei endlicher Neigung des Strahlenbündels gegen die Achse eines zentrierten optischen Instrumentes kenne ich nur diejenige von Czapski[1]), welcher darunter nur die direkte Asymmetrie in der Symmetrieebene des Strahlenbündels versteht, und diejenige von König und v. Rohr[2]), welche *drei* Komafehler beschreiben. Der erste wird Koma im engeren Sinne oder, wie auch bei Czapski, Unsymmetrie in tangentialen Büscheln erweiterter Öffnung genannt und entspricht vollkommen, wie auch die Benennung angibt, der direkten Asymmetrie. Der Zusammenhang mit dem Evolutenradius wird hier aus Versehen so angegeben, daß der *halbe* Asymmetrienwert gleich dem Radius gesetzt wird.[3]) Der zweite Komafehler wird Rinnenfehler genannt und als die tangentiale Abweichung in sagittalen Büscheln erweiterter Öffnung definiert. Da die Tangentialebene die Symmetrieebene darstellt, so entspricht dieser Definition der transversale Asymmetrienwert. Die Rechnung, welche das von der zweiten Potenz des sagittalen Öffnungswinkels abhängige Glied in dem Wert für den Abstand des Schnittpunktes eines windschiefen Strahles mit der Tangentialebene von der Sagittalebene zu ermitteln bezweckt, wird für Strahlenbündel endlicher Neigung nicht zu Ende geführt. Wäre das der Fall, so hätte sie den transversalen Asymmetrienwert ergeben müssen, da der Definition nach das gesuchte Glied eben das Glied $-(w_{,,}^2/2)\,S$ im Werte für die erste laterale Abweichung ist.

Will man dieses Resultat durch die von den Verfassern bezweckte Rechnung erhalten, so hat man nur, um den Schnittpunkt eines beliebigen Strahles mit der Tangentialebene zu finden, in der Normalgleichung

$$\eta - y + q(\zeta - z) = 0$$

---

1) S. Czapski, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. 2. Aufl. p. 144. 1904. Auch schon in der ersten Auflage von Winkelmanns Handb. d. Phys. 2. Abt. 1. p. 180ff.

2) M. v. Rohr, Die Theorie der optischen Instrumente I. Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten vom Standpunkte der geometrischen Optik p. 265ff. 1904.

3) Bei S. Czapski l. c. findet man den entgegengesetzten Druckfehler, doch nur in der zweiten Auflage.

$d\eta = d^2\eta = 0$ zu setzen, wonach durch zwei Differentiationen erhalten wird:

$$dy(1 - \zeta t) = 0, \quad d^2y - \zeta d^2q - 2\,dq\,d\zeta = 0,$$

welche Werte, wenn die Öffnungswinkel als unabhängige Variabelen angesehen werden, unter Anwendung des bei der Ermittelung der lateralen Abweichungen gefundenen Wertes für d^2y die Beziehungen

$$\zeta = \varrho_{\prime\prime}, \quad d\zeta = -S\,dp$$

ergeben, aus welchen mittels des dortselbst angegebenen Wertes für d^2x durch zweimalige Differentiation der Normalengleichung

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0$$

resultiert:

$$d\xi = dx(1 - \zeta r) = -E\,dp,$$

$$d^2\xi = d^2x - 2\,d\zeta\,dp = -(R - 2S)\,dp^2 - S\,dq^2,$$

d. h. für den gesuchten Abstand des Schnittpunktes eines Strahles mit der Tangentialebene von der Sagittalebene

$$\xi = -w_\prime E - \frac{w_\prime^2}{2}(R - 2S) - \frac{w_{\prime\prime}^2}{2}S,$$

wo das letzte Glied also nach der gegebenen Definition den Rinnenfehler bezeichnet und durch die bezweckte Rechnung erhalten ist.

Der Umstand, daß das zweite Glied hier nicht mit dem ersten Gliede im Werte für die erste laterale Abweichung übereinstimmt, steht nur scheinbar damit in Widerspruch, daß die laterale Abweichung, soweit sie von den zweiten Potenzen der Öffnungswinkel abhängig ist, für jede beliebige Ebene, mit welcher der Hauptstrahl senkrecht geschnitten wird, unveränderlich bleibt, denn die Ebene, mit welcher der Hauptstrahl hier geschnitten wurde, steht nicht senkrecht auf denselben, oder, wie man es auch ausdrücken kann, die Lage der den Hauptstrahl senkrecht schneidenden Ebene ist von der ersten Potenz des Öffnungswinkels $w_\prime$ abhängig.

Der dritte von den beschriebenen Komafehlern wird Dreiecksfehler oder die tangentiale Differenz der sagittalen Schnittweiten genannt. Letztere Benennung entspricht der transversalen Asymmetrie, und die Rechnung führt auch zu

dem oben ermittelten Werte für die zweite laterale Abweichung. Zum Namen Dreiecksfehler kann daran erinnert werden, daß die Dreiecksform der Strahlenbündelquerschnitte, wie meine oben zitierten Versuche auch praktisch darlegen, dann am ausgeprägtesten ist, wenn eben die transversale Asymmetrie gleich Null ist, indem dabei, wie die angegebenen Werte für die Krümmungen der ersten Evolutenschale lehren, die eine Seite des Dreieckes bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung gerade wird.

Die Untersuchung der Komafehler wird von den Verfassern in Zusammenhang mit der Entwickelung von Formeln für die Berechnung derselben im gebrochenen Strahlenbündel ausgeführt. Von diesen Formeln stimmen diejenigen für den Komafehler im engeren Sinne und für den sogenannten Dreiecksfehler nach entsprechender Umformung mit den meinigen überein und führen auch in erster Linie zu zwei, von den Verfassern mit $d\tau/du$ bez. $d\varsigma/du$ bezeichneten Werten, welche, vom Vorzeichen abgesehen, mit den Asymmetrienwerten des gebrochenen Strahlenbündels identisch sind.

In einer eben erschienenen Arbeit behandelt Gleichen[1]) unter dem Begriffe Koma nur die direkte Asymmetrie und sagt von den Resultaten der Untersuchung, durch welche das Wesen der Komafehler ermittelt und die Berechnung derselben für das gebrochene Strahlenbündel durchgeführt wurde, daß sie für die photographische Optik zurzeit noch keine Verwendbarkeit beanspruchen können.[2]) Daß der Name Koma in der erwähnten Untersuchung nicht vorkommt, dürfte doch vielleicht dieses Urteil mit veranlaßt haben.

Beschränkt man sich bei der Darstellung der Komafehler auf den Fall eines unendlich wenig gegen die Achse eines zentrierten Instrumentes geneigten Strahlenbündels, so braucht man nur auf die direkte Asymmetrie Rücksicht zu nehmen, weil dann die Erfüllung einer Bedingungsgleichung genügt, um beide Asymmetrienwerte gleich Null zu machen.

---

1) A. Gleichen, Vorlesungen über photographische Optik, p. 186 ff. Leipzig 1905.

2) l. c. p. 114.

Aberration.

Solange man sich auf die Untersuchung des axialen Bündels in zentrierten optischen Instrumenten beschränkte, war Aberration gleichbedeutend mit Abweichung von der Homozentrizität. In diesem allgemeinsten Sinne umfaßt also der Begriff der monochromatischen Aberrationen auch die durch Astigmatismus und Asymmetrie oder sogenannte Koma bedingten Abweichungen und müßte eigentlich auch auf solche höherer Ordnung ausgedehnt werden. Die Gesetze der Aberration wurden aber für symmetrische Abweichungen hergeleitet, welche als laterale zu der dritten, als longitudinale zu der zweiten Potenz des Neigungswinkels eines Strahles gegen den Hauptstrahl proportional sind, mithin von den Differentialquotienten vierter Ordnung in der Flächengleichung abhängen. Bei der allgemeinen Untersuchung empfiehlt es sich daher unter *Aberration im engeren Sinne* nur symmetrische Fehler zu verstehen, welche durch die Differentialquotienten vierter Ordnung in der Gleichung der Wellenfläche bestimmt werden. Außer von der Aberration eines Strahles spricht man aber auch von Instrumenten mit größerer oder geringerer Aberration, wobei eine Eigenschaft des im Instrumente gebrochenen Strahlenbündels gemeint wird. Da ich nun durch die Untersuchung der Aberrationen im engeren Sinne geometrische Größen ermittelt habe, welche für diese Stufe der Rechnung eine ähnliche Bedeutung haben wie die Asymmetrienwerte für die Komafehler, und da diese Werte ebenso wie jene von Strahl zu Strahl variieren, so spreche ich von den durch dieselben bestimmten *Aberrationen eines Strahlenbündels* von endlicher Öffnung *längs einem bestimmten Strahle.* Diese Aberrationswerte sind also von der Blendengröße unabhängig. Je kleiner aber die Blende ist, um so genauer kann aus ihnen die Abweichung des peripherstem Strahles berechnet werden. Für das axiale Strahlenbündel in zentrierten optischen Instrumenten, wo es nur einen Aberrationswert gibt, ist dieser gewöhnlich nicht gleich Null, wenn „die sphärische Aberration behoben ist“, indem darunter gewöhnlich die Behebung der Abweichung eines Rand- oder intermediären Strahles verstanden wird. Um diese Begriffe auseinander zu halten, habe ich die Abweichung eines Rand-

strahles bei bestimmter Blendengröße als *periphere Totalaberration* bezeichnet. Durch die Kenntnis der Aberration längs der Achse und der einer bestimmten Blendengröße entsprechenden peripheren Totalaberration ist man schon einigermaßen imstande, eine Vorstellung von der Wirkung der sonst sogenannten Zonen der sphärischen Aberration zu gewinnen. Von diesen beiden Werten entspricht aber nur die Aberration längs der Achse dem Begriffe der Aberrationen im engeren Sinne, während die periphere Totalaberration durch rechnerische Verfolgung eines Randstrahles ermittelt werden muß.

Im Falle des axialen Strahlenbündels in einem aus Umdrehungsflächen zusammengesetzten zentrierten optischen System genügt es die Schnittlinie der Wellenfläche mit einer der Koordinatenebenen zu untersuchen. Wird also in der Flächengleichung $y = 0$ gesetzt, so resultiert eine Gleichung $z = f(x)$, in welcher die Krümmung der fraglichen Schnittlinie in einem beliebigen Punkt allgemein durch die Formel

$$D = \frac{r}{N^3}$$

erhalten wird, in welcher

$$r = \frac{d^2 z}{d x^2}, \qquad N^2 = 1 + \left|\frac{d z}{d x}\right|^2$$

gesetzt worden ist. Wird diese Gleichung zweimal differentiiert, dann

$$\frac{d z}{d x} = \frac{d^3 z}{d x^3} = 0$$

gesetzt, mithin dasjenige Koordinatensystem gewählt, in welchem der Hauptstrahl mit der Z-Achse zusammenfällt, so ergibt sich

$$\frac{d^2 D}{d s^2} = \frac{d^4 z}{d x^4} - 3 D^3 .$$

Dieser Wert, den ich mit Φ bezeichne, dient zur geometrischen Charakterisierung der Fläche auf der fraglichen Stufe der Rechnung. Ist er positiv, so hat die Umdrehungsfläche im Pol eine schwächere Krümmung, ist also bei positiver Krümmung hier flacher als in den umgebenden Punkten, und der Unterschied von der Form der oskulierenden Sphäre wird in erster Annäherung durch denselben gemessen. Ich nenne deshalb Φ den *Abflachungswert* der Fläche im fraglichen Punkte,

d. h. im Pol der Umdrehungsfläche, da andere Punkte nicht durch *einen* Abflachungswert hinreichend charakterisiert sind. Die geometrische Bedeutung des Abflachungswertes kann an Umdrehungsflächen zweiten Grades illustriert werden. Wird die allgemeine Gleichung einer solchen für das angewendete Koordinatensystem

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\varepsilon\frac{z^2}{c^2}=\frac{2z}{c},$$

welche ein Rotationsellipsoid, -paraboloid bez. -hyperboloid bezeichnet, je nachdem $\varepsilon=+1$, $\varepsilon=0$ bez. $\varepsilon=-1$ gesetzt wird, differentiiert, so ergibt sich für $y=0$, d. h. für die Schnittlinie mit der XZ-Ebene:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d^3z}{dx^3}=0,\quad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{c}{a^2},\quad \frac{d^4z}{dx^4}=\frac{3\varepsilon c}{a^4},$$

woraus resultiert

$$-\frac{\Phi}{3D^3}=\frac{c^2-\varepsilon a^2}{c^2}.$$

Dies besagt, daß, wenn Abflachungswert und Krümmung verschiedenes Vorzeichen haben, die Zahl $-\Phi/3D^3$ das Quadrat der Exzentrizität jener konischen Sektion darstellt, in welcher die XZ-Ebene die Umdrehungsfläche zweiten Grades schneidet, welche mit der fraglichen Umdrehungsfläche eine vollständige Berührung vierter Ordnung im Pole hat, d. h. bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung als der für die Berechnung der Aberration in Frage kommenden mit ihr zusammenfällt, während, wenn Abflachungswert und Krümmung dasselbe Vorzeichen haben, die Zahl $\Phi/3D^3$ gemäß obenstehendem Ausdrucke die Achsen des Rotationsellipsoids angibt, welches in seinem Punkte kleinster Krümmung die erwähnte Berührung mit der untersuchten Fläche hat.

Die Beziehung des Abflachungswertes zu dem von Siedentopf[1]) nach Abbe angegebenen Deformationskoeffizienten $\varkappa$ findet man, indem die in Polarkoordinaten gegebene Gleichung für ein rechtwinkliges Koordinatensystem umgeformt wird, durch entsprechende Differentiation, wobei

$$\Phi=-24\varkappa$$

erhalten wird.

1) l. c. M. v. Rohr, Die Theorie etc. p. 26.

Die dem Abflachungswerte entsprechende, die Evolute charakterisierende geometrische Größe kann auf folgende Weise ermittelt werden. Wenn allgemein für eine in der XZ-Ebene gelegene krumme Linie $\varrho\, d\, s$ bez. $R\, d\, \sigma$ Krümmungshalbmesser und Bogenelement der Linie selbst bez. deren Evolute bezeichnen, so gilt für den Öffnungswinkel w unter Berücksichtigung der Richtung, in welcher die Krümmungen positiv gerechnet werden, und wenn man die Bogenelemente in derselben Richtung wie die betreffenden Koordinaten positiv rechnet,

$$d\, w = \frac{d\, s}{\varrho} = -\frac{d\, \sigma}{R},$$

weil ja die Normalen der Evolute auf den entsprechenden Normalen der Evolvente senkrecht stehen. Allgemein ist nun, wie oben bewiesen worden,

$$-\frac{d\, \varrho}{d\, w} = R,$$

d. h. durch Differentiation

$$-\frac{d^2 \varrho}{d\, w^2} = \frac{d\, R}{d\, w} = -R\, \frac{d\, R}{d\, \sigma} = A,$$

wenn mit A der Krümmungshalbmesser der Evolute von der Evolute bezeichnet wird. Für den Fall einer Umdrehungsfläche, deren Achse mit der Z-Achse zusammenfällt, erhält man unmittelbar

$$-\frac{d^2 \varrho}{d\, w^2} = \frac{\Phi}{D^4},$$

mithin

$$A = \frac{\Phi}{D^4} = -\frac{d^2 \varrho}{d\, w^2}.$$

Dieser Krümmungshalbmesser A, den ich den *Aberrationswert des Strahlenbündels* nenne, enthält alles, was von der Aberration im engeren Sinne im fraglichen Strahlenbündel ausgesagt werden kann, und an demselben ist man sehr gut imstande, sich eine Vorstellung davon zu machen, wie viel — oder wie wenig — dies ist. Man ersieht, daß die Schnittlinie der Evolute oder kaustischen Fläche des Strahlenbündels mit einer Meridianebene als Kreisevolvente durch Abwickelung eines Fadens konstruiert werden kann. Da der Evolutenradius von der Wellenfläche gleich Null ist, mithin die fragliche

Schnittlinie eine Spitze hat, welche ihre eigene Evolute berührt, so erhält man durch eine Abwickelung nur einen Zweig der kaustischen Linie. Den anderen erhält man, wenn der Faden in entgegengesetzter Richtung aufgewickelt wird, indem man die Abwickelung wieder am selben Berührungspunkte beginnt. Fällt die positive Richtung der Z-Achse, wie gewöhnlich, mit der Bewegungsrichtung des Lichtes zusammen, so bedeutet ein positiver Wert von A eine sogenannte positive oder unterkorrigierte sphärische Aberration.

Durch den Aberrationswert ist nur der Krümmungsradius der Evolute von der kaustischen Linie im Berührungspunkte beider gegeben. Die kaustische Linie kann also ebensogut von einer anderen beliebigen Kurve abgewickelt werden, welche im Berührungspunkte dieselbe Krümmung hat, nur darf diese Kurve keine Inflexionspunkte haben — wohl aber Spitzen von derselben Art wie die der kaustischen Linie — da nämlich erstere einem unendlich großen Asymmetrienwert längs dem entsprechenden Strahle entsprechen würden, was ausgeschlossen ist. Da nun sämtliche Strahlen des Strahlenbündels als Tangenten der gewonnenen kaustischen Linie konstruiert werden, so kann man auf diese Weise eine beliebige Anzahl Strahlenbündel mit einem und demselben Aberrationswerte konstruieren, welche in anschaulicher Weise die Bedeutung dieses Wertes illustrieren.

Bekanntlich wird die kaustische Linie gewöhnlich als semikubische Parabel aufgefaßt und konstruiert. Von dieser Auffassung ist ebensoviel richtig wie von der Auffassung derselben als der Evolvente einer beliebigen Kurve mit dem entsprechenden Krümmungsradius im Berührungspunkte, da die Spitze der fraglichen semikubischen Parabel bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung als der dem Aberrationswerte entsprechenden mit der Spitze der genannten Evolvente zusammenfällt.

Die semikubische Parabel erhält man durch sukzessive Differentiation der oben angewendeten Gleichungen für die Evolute

$$N(\xi - x) = -p\,\varrho\,, \quad N(\zeta - z) = \varrho\,,$$

wobei für die Schnittlinie einer Umdrehungsfläche mit der

XZ-Ebene im angewendeten Koordinatensystem resultiert (x als unabhängige Variabele betrachtet)

$$\zeta = \varrho\,, \quad d\,\xi = d^2\,\xi = d\,\zeta = 0\,, \quad d^2\,\zeta = d^2\,\varrho = -\frac{\Phi}{D^2}\,d\,x^2,$$

sowie

$$d^3\,\xi - 3\,d^2\,N\,d\,x = -3\,d\,p\,d^2\,\varrho - \varrho\,d^3\,p = \left(\frac{3\,\Phi}{D} - \frac{1}{D}\,\frac{d^4\,z}{d\,x^4}\right)d\,x^3,$$

oder da $d^2\,N = D^2\,d\,x^2$, ist:

$$d^3\,\xi = \frac{2\,\Phi}{D}\,d\,x^3.$$

Werden dann ξ und ζ nach Potenzen von x entwickelt, so erhält man

$$\xi = \frac{x^3\,\Phi}{3\,D}\,, \qquad \zeta - \varrho = -\frac{x^2\,\Phi}{2\,D^2}$$

und nach Elimination von x die Gleichung der semikubischen Parabel

$$9\,A\,\xi^2 = -8\,(\zeta - \varrho)^3,$$

aus welcher wieder durch Differentiation auf gewöhnliche Weise der Wert A für den Evolutenradius in der Spitze erhalten werden kann.

Für die laterale Aberration in der Fokalebene $\zeta = \varrho$ findet man durch Differentiation der Normalengleichung

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0:$$

$$d^3\,\xi = d^3\,x - \varrho\,d^3\,p + 3\,d\,p\,d^2\,z = -\frac{\Phi}{D}\,d\,x^3 = -A\,d\,w^3,$$

da nämlich $d^3\,p = (d^4\,z / d\,x^4)\,d\,x^3 + r\,d^3\,x$ ist.

Es ist also die laterale Aberration

$$\xi = -\frac{w^3}{6}\,A$$

und die Beziehung des Aberrationswertes zu den Koeffizienten $\mathfrak{a}$ von Czapski und anderen

$$A = -6\,\mathfrak{a}\,.$$

Durch Differentiation des analytischen Ausdruckes für das Brechungsgesetz und der Normalengleichungen erhält man die für diesen Sonderfall früher bekannte Formel für die Berechnung der Aberration, wobei aber der Abflachungswert der brechenden Fläche mitberücksichtigt wird.

Mit dieser Darstellung der Aberration des axialen Bündels in einem zentrierten System habe ich am einfachsten Beispiele

die Methode demonstrieren wollen, welche die Untersuchung der Aberrationen im allgemeinen Fall und die vollständige Diskussion der Sonderfälle ermöglicht hat. Eine solche Untersuchung wäre nach der bisher für die sogenannte sphärische Aberration angewendeten Methode, so weit ich sehen kann, nicht möglich.

Schon bei der Untersuchung der Aberration längs dem axialen Strahle in einem Instrumente für anamorphotische Abbildung scheitert diese Methode, da zwar die in den beiden Hauptschnitten des Instrumentes verlaufenden Strahlen untersucht werden können, wobei sich zwei Aberrationswerte ergeben, die Aberrationen aber erst durch drei voneinander unabhängige Werte bestimmt sind.

In diesen Instrumenten ist das axiale Strahlenbündel zwischen zwei Brechungen astigmatisch mit zwei Symmetrieebenen. Für solche Strahlenbündel ist die Wellenfläche durch die vier geometrischen Größen

$$\Phi' = \frac{d^2 D_,}{d s_,^2}, \quad \Omega' = \frac{d^2 D_,}{d s_{,,}^2}, \quad \Omega'' = \frac{d^2 D_{,,}}{d s_,^2}, \quad \Phi'' = \frac{d^2 D_{,,}}{d s_{,,}^2}$$

bestimmt, welche ich in Übereinstimmung mit der für die Asymmetrienwerte angewendete Terminologie benenne, so daß Φ' bez. Ω'' die direkte bez. transversale Abflachung längs der ersten Krümmungslinie messen, die beiden anderen die entsprechende Bedeutung für die zweite Krümmungslinie haben. Die beiden transversalen Abflachungswerte sind aber nicht unabhängig voneinander, wie aus den Beziehungen zu den Differentialquotienten vierter Ordnung der Flächengleichung hervorgeht.

Diese sind im oben angewendeten Koordinatensysteme

$$\Phi' = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - 3 r^3, \qquad \Omega' = \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} - r t^2.$$

$$\Omega'' = \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} - r^2 t. \quad \Phi'' = \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} - 3 t^3,$$

wonach

$$\Omega' - \Omega'' = D_, D_{,,} (D_, - D_{,,})$$

ist. Die beiden übrigen Differentialquotienten vierter Ordnung sind bei Vorhandensein von auch nur einer Symmetrieebene in diesem Koordinatensystem gleich Null.

Für das Strahlenbündel kommen die vier Größen

$$A' = \frac{\Phi}{D_{,}^{4}}, \quad C' = \frac{\Omega'}{D_{,}^{2} D_{,,}^{2}}, \quad C'' = \frac{\Omega''}{D_{,}^{2} D_{,,}^{2}}, \quad A'' = \frac{\Phi''}{D_{,,}^{4}}$$

zur Verwendung, welche nach entsprechender Terminologie als direkte bez. transversale Aberration im betreffenden Hauptschnitt benannt werden. Die beiden Evolutenschalen haben je eine Kante, welche in einer der Symmetrieebenen liegt. Für ihre Schnittlinien mit der anderen Symmetrieebene gibt der betreffende Wert der direkten Aberration dieselben Beziehungen wie oben der Aberrationswert für das Normalenbündel einer Umdrehungsfläche. Die Krümmung der Kantlinie ist für die erste bez. zweite Schale

$$-\frac{C''}{E^2} \quad \text{bez.} \quad -\frac{C'}{E^2}.$$

Da nun, wie ersichtlich, $C' - C'' = E$, mithin die Differenz der beiden Krümmungen gleich $1/E$ ist, so ist ein Strahlenbündel mit geraden Kantlinien der beiden Evoluten mathematisch unmöglich. Es folgt hieraus, wie schon hervorgehoben worden ist, daß das Konoid von Sturm zwar das astigmatische Strahlenbündel mit zwei Symmetrieebenen repräsentieren kann, dabei aber die beiden Brennlinien nicht gerade sein dürfen, falls überhaupt ein mathematisch mögliches Strahlenbündel dargestellt werden soll. Werden aber im Konoide die Krümmungen der Brennlinien in Übereinstimmung mit dem eben angegebenen Gesetze bestimmt, so hat dasselbe einen Sinn, indem im Modelle die Brennlinien, in der Wirklichkeit die Kantlinien der Evolute eine Strahlenvereinigung zweiter Ordnung bedeuten.

Die Werte für die lateralen Aberrationen eines Strahles sind

$$\xi = -\frac{w_{,}^{3}}{6} A' - \frac{w_{,} w_{,,}^{2}}{2} C'', \quad \eta = -\frac{w_{,}^{2} w_{,,}}{2} C' - \frac{w_{,,}^{3}}{6} A'',$$

wobei wie oben erstere in der ersten, letztere in der zweiten Fokalebene gemessen wird. Da nun $C' - C'' = E$ ist, so ist ein astigmatisches Strahlenbündel ohne laterale Aberration mathematisch unmöglich, was mit dem erwähnten Verhalten der Kantlinienkrümmungen in Zusammenhang steht.

In einem Instrumente für anamorphotische Abbildung ist das Strahlenbündel nach der letzten Brechung wieder anastigmatisch, aber vom dem Normalenbündel einer Umdrehungsfläche weit verschieden. In diesem wird der Hauptstrahl in jeder Meridianebene von nächstliegenden Strahlen geschnitten, in jenem nur in zwei oder vier Ebenen je nach der relativen Größe der Aberrationswerte. Solcher gibt es nur drei, da die transversale Aberration in den beiden Symmetrieebenen die gleiche ist. Da die transversale Aberration für den Verlauf der Strahlen in den Winkeln zwischen den beiden Symmetrieebenen bestimmend ist, so bezeichne ich dieselbe im anastigmatischen Strahlenbündel auch als Diagonalaberration. Das Vorhandensein von zwei Hauptschnitten außer den Symmetrieebenen wird durch die Bedingungsgleichung

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{A' - 3\,C}{A'' - 3\,C}$$

für die Tangente des Winkels zwischen den betreffenden Hauptschnitten und der ersten Symmetrieebene bestimmt. Wenn die direkten Aberrationswerte beide das Dreifache der diagonalen betragen, so wird die Lage anderer Hauptschnitte nicht mehr durch diese Gleichung bestimmt. Die Wellenfläche hat dabei eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit einer Umdrehungsfläche, und es entscheiden erst weitere Differentiationen über die Existenz und Lage anderer Hauptschnitte.

Es ist bekannt, daß eine verschiedene Einstellung eines optischen Instrumentes bei verschieden großer Blende durch die sogenannte sphärische Aberration bedingt wird. Wenn nun in einem anastigmatischen Strahlenbündel die beiden Werte der direkten Aberration nicht identisch sind, so hat dies zur Folge, daß die scharfe Einstellung für solche Linien am Objekte, welche in den Symmetrieebenen verlaufen, nur für eine bestimmte Blendengröße dieselbe sein kann. Das Instrument wirkt also, als ob es längs der Achse mit Astigmatismus behaftet wäre, dessen Grad mit der Blendengröße wechselt. Diese Eigenschaft nenne ich astigmatische Aberration, indem ich den Astigmatismus der Aberration durch die Differenz $A' - A''$ der beiden direkten Aberrationswerte messe. Auf dieselbe Weise messe ich den Diagonalastigmatismus der Aberration durch die Differenz $A' + A'' - 6C$. Der Effekt der diagonal-

astigmatischen Aberration des gebrochenen Strahlenbündels ist die Notwendigkeit einer verschiedenen Einstellung des Instrumentes für die scharfe Abbildung eines in der Objektebene belegenen Kreuzes, je nachdem dessen Linien in den Symmetrieebenen liegen oder einen diagonalen Verlauf haben. Sind die beiden direkten Aberrationswerte gleich, so daß kein Astigmatismus der Aberration vorhanden ist, wobei die Abbildung des Kreuzes in beiden Lagen von der zweiten Ordnung ist, indem die vier Hauptschnitte einen Winkel von 45^0 miteinander bilden, so tritt die eventuell vorhandene diagonalastigmatische Aberration besonders deutlich hervor, wie es die Taf. VIII zeigt, welche die Photographie eines leuchtenden Punktes unter Anwendung eines Objektives mit diagonalastigmatischer Aberration darstellt. Der leuchtende Punkt war ein Sonnenbildchen, das Objektiv eine dem photographischen Teleobjektive ähnliche Kombination aus einer bizylindrischen Lupe und einem positiven Okulare. Die bizylindrische Lupe besteht aus vier planzylindrischen Gläsern, jedes von ca. 16 cm Brennweite, deren konvexe Flächen alle nach dem Okulare gekehrt sind, und von denen die vorderste und hinterste Linse unter sich parallele Achsen haben, welche auf den Achsen der beiden mittleren senkrecht stehen. Der wegen der Dicke der Linse resultierende, sonst unmerkliche Astigmatismus der bizylindrischen Lupe, welcher sich in der empfindlichen Kombination mit dem Okulare bemerkbar macht, wurde durch eine passend eingeschaltete schwache Zylinderlinse behoben. Bei der Reproduktion auf der Tafel ist die Originalphotographie um $^1/_2$ verkleinert worden.

Der Bau der kaustischen Fläche im anastigmatischen symmetrischen Strahlenbündel ist für jeden Fall aus den Aberrationswerten berechnet. Im dargestellten Typus ist dieser relativ einfach. Dieser Typus bietet dadurch Interesse, daß die Strahlengebilde, die wir um die Sterne sehen, durch ähnliche Aberrationsvorgänge höherer Ordnung in der Kristallinse bedingt werden. Auf dem Bau des anastigmatischen Strahlenbündels näher einzugehen, dürfte hier nicht der Platz sein, ich füge nur hinzu, daß die für das astigmatische gegebenen Werte der lateralen Aberrationen eines Strahles auch hier ihre Gültigkeit beibehalten. Die Aberrationswerte des gebrochenen symmetrischen Strahlenbündels erhält man aus den entsprechen-

den Werten des einfallenden und den Abflachungswerten der brechenden Flächen mittels der von mir angegebenen Formeln.

Für Strahlenbündel mit einer Symmetrieebene kommen, wie auch im allgemeinen Strahlenbündel, dieselben Aberrationswerte wie im symmetrischen zur Verwendung, nur sind einerseits die Relationen der Aberrationswerte zu den Abflachungswerten der Wellenfläche, andererseits die Beziehungen dieser zu den entsprechenden Differentialquotienten der Flächengleichung nicht mehr so einfach. Beim Vorhandensein einer Symmetrieebene gibt es, wie oben gezeigt worden ist, auch nur diese vier Aberrationswerte für die eindeutige Bestimmung des Strahlenbündels, und die Beziehung $C' - C'' = E$ ist allgemeingültig, so daß von den vier Aberrationswerten auch hier nur drei unabhängig sind.

Da die Aberration bei schief einfallenden Strahlenbündeln in zentrierten optischen Systemen neuerdings[1]) Gegenstand der Untersuchung geworden sind, führe ich hier die für die lateralen Aberrationen geltenden Formeln an, um zu zeigen, wie die Abhängigkeit der beiden transversalen Aberrationswerte voneinander auch hier zutage tritt. Wenn nämlich der Ausdruck für die erste laterale Aberration

$$\xi = -\frac{w_,^3}{6} a_1 - \frac{w_, w_{,,}^2}{2} a_2$$

geschrieben wird, so kann dem Ausdrucke für die zweite folgende Form gegeben werden[2]):

$$\eta = -\frac{w_,^2 w_{,,}}{2} (a_2 + E) - \frac{w_{,,}^3}{6} a_3.$$

Auch im allgemeinen Strahlenbündel sind die Ausdrücke für die lateralen Aberrationen[3]) äußerst einfach, wenn krummlinige Koordinaten zur Verwendung kommen und die Öffnungswinkel längs den abwickelbaren Flächen, nicht längs den Hauptschnitten gerechnet werden.

Die Berechnung der Aberrationswerte im gebrochenen Strahlenbündel mit einfacher Asymmetrie ist einfach eine

1) A. König u. M. v. Rohr, l. c. p. 307 ff.

2) l. c., Allgemeine Theorie etc. nach den Formeln p. 39.

3) Ebenda p. 41.

Differentiationsaufgabe und kann sofort ausgeführt werden, wenn ein Bedürfnis dafür vorliegt. Ich habe diese Differentiation nicht ausgeführt, weil ich derselben nicht nötig gehabt habe. Persönlich bin ich auch davon überzeugt, daß es für die nähere Untersuchung eines weit geöffneten asymmetrischen Strahlenbündels vorteilhafter ist, die Asymmetrienwerte nebst den Schnittweiten für ein paar Strahlen zu berechnen als die Aberrationswerte längs einem Hauptstrahle zu suchen.

Aber auch für die nähere Untersuchung weit geöffneter axialer Strahlenbündel dürfte es vorteilhafter sein, Schnittweiten und Asymmetrienwerte für einige mittlere Strahlen und den Randstrahl zu berechnen als die sogenannten Zonen durch Reihenentwickelung mittels der längs dem Hauptstrahl gültigen Aberrationswerte höherer Ordnung zu ermitteln zu suchen. In zentrierten, aus Umdrehungsflächen bestehenden Systemen braucht hierbei nur die direkte Asymmetrie berechnet zu werden, da die transversale numerisch gleich der Brennstrecke multipliziert mit der Kotangente des Winkels ist, den der gebrochene Strahl mit der Achse des Instrumentes bildet, wie aus obiger Darstellung hervorgeht.

Ist z. B. in einem Objektive mit „korrigierter sphärischer Aberration“ der Aberrationswert längs der Achse positiv, wobei sogenannte positive Zonen vorhanden sind, und bezeichnet man den daraus resultierenden direkten Asymmetrienwert eines sehr wenig geneigten Strahles im axialen Bündel als positiv, so kann man sofort aus dem Vorzeichen des Asymmetrienwertes längs einem etwas mehr geneigten Strahle ersehen, ob die dem positiven Zonenfehler entsprechende Kante der kaustischen Fläche einer größeren oder geringeren Strahlenneigung als der des untersuchten Strahles entspricht. Bei zunehmender Neigung gegen die Achse bleibt die Asymmetrie erst positiv, um dann durch Null in negative Werte überzugehen. Derjenige Strahl, längs welchem die Asymmetrie behoben ist, schneidet, in die Blendenebene verfolgt, zusammen mit den entsprechenden, in anderen Meridianebenen verlaufenden Strahlen diese Ebene längs einem Kreise, den ich eine Linie $U = 0$ genannt habe. Bei kompliziertem Korrektionszustande können nun mehrere Linien $U = 0$ vorkommen, aber immer wird man, wenn diese bekannt sind, aus der Neigung des entsprechenden Strahles

und der längs diesem ermittelten Schnittweite die exakte Lage der Kanten der kaustischen Fläche finden. Die auf einem Meridianschnitte der kaustischen Fläche diesen Kanten entsprechenden Spitzen der Schnittlinie genügen zusammen mit dem Aberrationswerte längs dem Hauptstrahl und der Schnittweite, eventuell auch dem Asymmetrienwerte längs dem Randstrahl zur Konstruktion der kaustischen Fläche, welche den sichersten Grund für die Beurteilung des Korrektionszustandes abgibt.

Daß die Methode der Projektion eines Zerstreuungskreises zurück in die Objektebene kein absolutes Maß für diese Beurteilung abgibt, ist ja längst bekannt, da die Abschätzung eigentlich erst dann anfängt, wenn man zu entscheiden hat, wie große Zerstreuungskreise bei dem Zwecke des Instrumentes zulässig sind. Dies hängt aber in erster Linie von der Lichtverteilung innerhalb des Zerstreuungskreises ab, welche sich am leichtesten durch die Form der kaustischen Fläche beurteilen läßt, da jeder Kante eine Lichtkonzentration längs dem dieselbe berührenden Strahle entspricht. Für die Rückprojektion in die Objektebene dürfte auch kein Bedürfnis vorliegen, da auf der Stufe, wo die Aberration untersucht wird, die Vergrößerung des Instrumentes längst bekannt ist, mithin die von der Zerstreuungsfigur gedeckten Details ebenso bequem am Bilde untersucht werden können wie am Objekte.

Es hat ja unter allen Umständen die praktische Erfahrung das letzte Wort in der Frage, wie große Fehler zulässig sind, und eine solche kann ebensogut an die Form der kaustischen Fläche anknüpfen wie an die Größe der in die Objektebene zurückprojizierten Zerstreuungskreise. Für erstere können hinreichend viele mathematisch exakte Data ermittelt werden, letztere sind durch Reihenentwickelung gewonnen.

Vor der Berechnung der Zonenfehler durch Reihenentwickelung mittels Aberrationswerten höherer Ordnung, welche längs der Achse gültig sind, dürfte die Methode der Untersuchung der kaustischen Fläche den Vorteil der mathematischen Genauigkeit haben. Gegenüber der Methode der trigonometrischen Verfolgung möglichst vieler Strahlen verhält sie sich offenbar wie die Berechnung der Schnittweiten mittels der Brechungsformeln gegenüber der Ermittelung derselben

durch trigonometrische Verfolgung zweier wenig gegeneinander geneigter Strahlen.

Umgekehrt können die Kanten der kaustischen Fläche und die denselben entsprechenden Linien $U = 0$ in der Blendeebene am fertigen Instrumente experimentell untersucht werden, wodurch die Beschaffung hinreichenden Materiales für die Erfahrung erleichert wird. Auf solche Weise konnte auch der Korrektionszustand des Auges trotz der komplizierten, durch die Kristallinse verursachten Aberrationen höherer Ordnung ermittelt werden.

(Eingegangen 2. November 1905.)

---

4. Über die von den sekundären β- und γ-Strahlen des Radiums in verschiedenen Gasen hervorgebrachte Ionisation[1]; von Gottlieb Kučera.

Einleitung. Wenn Radiumstrahlen auf feste oder flüssige Körper auffallen, so entsteht an den bestrahlten Stellen eine neue Radiation, die sogenannte Sekundärstrahlung. Dieselbe wurde von Becquerel im Jahre 1901 auf photographischem Wege entdeckt und ist im gewissen Sinne der von Sagnac entdeckten Sekundärröntgenstrahlung analog. Gegenstand der vorliegenden Untersuchung war die Ionisation, welche von den Sekundärstrahlen in verschiedenen Gasen verursacht wird. Einen indirekten Anstoß zu dieser Arbeit gab die Ansicht Rutherfords[2], daß überall da, wo sich Elektronen losreißen oder wo sie auftreffen, eine Röntgenstrahlung entstehen muß, und zwar im ersten Falle eine harte, im zweiten eine weiche. Wenn aber die Sekundär-β-Strahlung aus weichen Röntgenstrahlen bestehen sollte, so müßte sie eine von den β- und γ-Strahlen stark abweichende Ionisation verursachen.

Versuchsanordnung. Als Strahlungsquelle diente eine Kapsel mit 5 mg von reinstem Radiumbromid (Gieselsches Präparat). Die α-Strahlen werden im Glimmerblatt, welches das Salz bedeckt, absorbiert, so daß nur die β- und γ-Strahlen heraustreten. Die Radiumkapsel *R* (Fig. 1) befand sich am Ende einer zentralen (10,4 cm tiefen und 2,8 cm breiten) Bohrung eines Bleizylinders *V* von 14,5 cm Länge und 9,5 cm Durchmesser. Die Wand der Bohrung war ihrer ganzen Länge

1) Auszug aus den „Rozpravy“ der böhm. Kaiser Franz Joseph-Akademie der Wissenschaften in Prag.

2) E. Rutherford, Radioactivity, Cambridge 1904. p. 145; Nature 69. p. 436. 1904.

nach mit einer 2 mm dicken Papierschicht bedeckt, um die an dieser Wand entstehende Sekundärstrahlung zu verringern, denn diese kann nach ihrem Austritt aus der Öffnung der Bohrung eine Tertiärstrahlung veranlassen. Der Bleizylinder war zwischen den Polschuhen *S* und *N* eines starken Elektromagnets gelagert, dessen Feld die β-Strahlen ablenken sollte, um das Experimentieren mit den γ-Strahlen allein zu ermöglichen. Bei den definitiven Messungen wurde es jedoch nicht benutzt, da es sich herausstellte, daß das Feld auch auf die Sekundärstrahlung wirkte, und zwar in einer Weise, der zahlen-

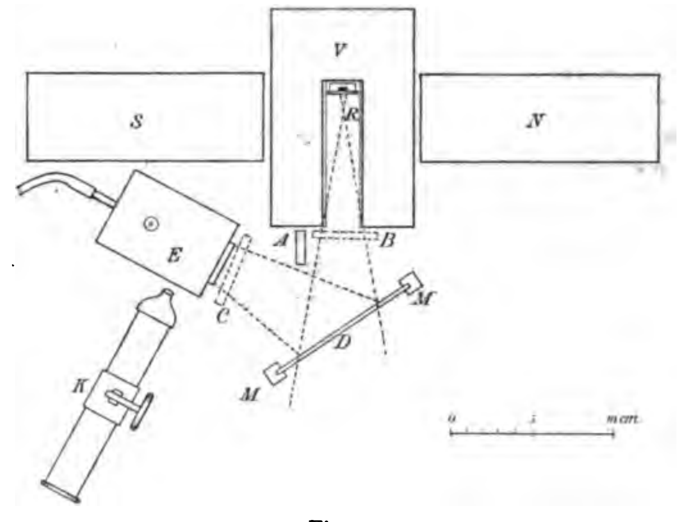


Fig. 1.

mäßig keine Rechnung getragen werden konnte. Vor der Öffnung der Bohrung war in einem Winkel von weniger als 45° ein kleines Holzgestell *M* (zwei parallele mit je einer Nut versehene vertikale Holzleisten) aufgestellt und festgeklemmt, und zwar so, daß auf die Holzteile die direkte β- und γ-Strahlung nicht auftreffen konnte; Platten *D* aus verschiedenem Material, die als Radiatoren dienten, konnten in die Nuten eingeschoben werden. Die an ihnen entstehende Sekundärstrahlung fiel durch eine seitliche, mit einem Glimmerblättchen von 0,0094 mm Dicke bedeckte Öffnung in ein Elektroskop *E* hinein und ionisierte das darin befindliche Gas. Die Einrichtung des

Elektroskopes, daß mit verschiedenen Gasen gefüllt werden konnte, eine kleine Kapazität und daher große Empfindlichkeit für Strommessungen besaß und mittels Bernstein isoliert war, soll an einer anderen Stelle des näheren beschrieben werden. Das Elektroskop wurde instinktmäßig so aufgestellt, daß der Einfallswinkel der direkten Radiumstrahlung dem Abgangswinkel der Sekundärstrahlen ungefähr gleich war; später erfuhr ich aus einer weiter unten zitierten Arbeit von Mc Clelland, daß in dieser Richtung die Sekundärstrahlung am kräftigsten ist. Damit in das Elektroskop keine Sekundärstrahlung vom äußersten Ende der Bohrungswand eindringen kann (denn sie hatte eine merkliche Wirkung), wurde ihr ständig ein Bleischirm *A* von 6 mm Dicke in den Weg gestellt, der sie absorbierte. Das Elektroskopblättchen wurde mit einem ziemlich stark vergrößernden Mikroskop *K* betrachtet, welches mit einem Okularmikrometer versehen war. Es waren ca. 60 Teilstriche seiner nach 0,2 mm geteilten Skala im Gesichtsfeld, und es wurde die Zeit gemessen, welche das Elektroskopblättchen brauchte, um 40 Teilstriche zu durchlaufen; beim Wasserstoff waren es nur 10 Teilstriche. Zur Zeitmessung wurden zwei Stoppchronometer benutzt, die Fünftelsekunden angaben.

Die Gase, mit welchen das Elektroskop gefüllt wurde, wurden in destilliertem Wasser gewaschen, durch konzentrierte Schwefelsäure getrocknet und passierten weiter zwei Stopfen aus Glaswolle. Um eine mögliche Ionisation vollends zu beseitigen, wurden sie dann durch eine 35 cm lange Messingröhre von 2 cm Durchmesser hindurchgeleitet, die durch zwei Ebonitpfropfen an beiden Enden verschlossen war und in der Achse einen 1 mm dicken Messingdraht trug. Die Röhre war geerdet, und der Messingdraht, der mit einer Leidener Batterie verbunden war, auf ein Potential von 500—1000 Volt (mit einem Braunschen Elektrometer bestimmt) geladen. Durch dieses starke Feld wird das hindurchstreichende Gas von gewöhnlichen Ionen befreit. War das Elektroskop mit einem anderen Gase als Luft gefüllt, so wurde darin ein kleiner Überdruck von einigen Zentimetern Wassersäule gegenüber dem äußeren barometrischen Druck aufrecht erhalten, der mittels eines Wassermanometers gemessen wurde.

Berechnung der Ionisation. Die Ionisation eines Gases wird gemessen, indem man sie dem Sättigungsstrom proportional setzt, der darin bei genügender Voltage entsteht. Wird die Messung mit einem Elektroskop ausgeführt und sind φ_1, V_1 und C_1 sein Ausschlag, Potential und Kapazität, die in der Zeit t auf die Werte φ_2, V_2 und C_2 fallen, so ist die Intensität i des Sättigungsstromes

$$i = \frac{V_1 C_1 - C_2 V_2}{t},$$

also der Fallzeit des Blättchens von φ_1 auf φ_2 umgekehrt proportional.

In den nachfolgenden Versuchen wurden folgende Größen gemessen:

1. Der Strom i_0, welcher im Elektroskop entsteht, wenn die ganze β-Strahlung und ein Teil der γ-Strahlen abgefangen werden, teils durch den Bleizylinder, teils durch einen 6,2 mm dicken Bleischirm B, der vor seine Öffnung gestellt wird (Fig. 1). Die Ionisation im Gase rührt hauptsächlich her von der in das Elektroskop direkt hineingelangenden γ-Strahlung, die allerdings durch die Wände des Zylinders hindurchgehen mußte („harte γ-Strahlung") zum Teil aber auch von einer sekundären γ-Strahlung, die an den inneren Wänden des Elektroskopes an den Austritt- bez. Auffallstellen dieser Strahlen entsteht. Die beobachtete Fallzeit des Blättchens sei t_0.

2. Der Strom $i_0 + i_1$, welcher entsteht, wenn man den Schirm B beseitigt; der Teil i_1 rührt von der Sekundärstrahlung der Luft vor der Öffnung des Bleizylinders her. Fallzeit t_1.

3. Der Strom $i_0 + i_1 + i_P$, welcher nach dem Hinzutreten der sekundären Strahlung von Blei, also nach dem Einschieben einer Bleiplatte in den Holzrahmen entsteht. Die Fallzeit sei t_P.

4. Die analoge Stromstärke $i_0 + i_1 + i_x$ für die Sekundärstrahlung eines anderen Stoffes x.

5. Die Stromstärke $i_0 + i_\gamma$, wenn die Sekundärstrahlung von Blei nur durch γ-Strahlen erregt wird, also der Schirm B und die strahlende Bleiplatte angewandt werden; entsprechende Fallzeit sei t_γ.

Wenn man anstatt der Fallzeiten t ihre reziproken Werte τ mit den entsprechenden Indizes einführt, so hat man

$$i_0 = K.\tau_0, \qquad i_0 + i_1 = K.\tau_1, \qquad i_0 + i_1 + i_P = K.\tau_P,$$

$$i_0 + i_1 + i_x = K.\tau_x \qquad i_0 + i_\gamma + K.\tau_\gamma,$$

wo K eine Konstante ist, die bei gleichbleibendem φ_1 und φ_2 den Wert nicht ändert. Bezeichnen wir noch die Stromstärken bez. Ionisationen und reziproke Fallzeiten bei einem anderen Gase als Luft mit großen Buchstaben J resp. T.

Dann haben wir folgende Beziehungen:

$$(1)\ \frac{i_x}{i_P} = \frac{\tau_x - \tau_1}{\tau_P - \tau_1}, \quad (2)\ \frac{i_1}{i_P} = \frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_P - \tau_1}, \quad (3)\ \frac{i_\gamma}{i_P} = \frac{\tau_\gamma - \tau_0}{\tau_P - \tau_1},$$

$$(4)\ \frac{J_P}{i_P} = \frac{T_P - T_1}{\tau_P - \tau_1}, \quad (5)\ \frac{J_0}{i_0} = \frac{T_0}{\tau_0}.$$

Die erste und die zweite geben die auf Blei bezogenen Intensitäten der Sekundärstrahlung des Stoffes x resp. der Luft; die dritte gibt den Anteil der γ-Strahlen an der Erregung der Sekundärstrahlen. Die vierte gibt die relative Ionisation eines Gases bezogen auf Luft als Einheit durch die Sekundärstrahlung von Blei; dieselbe Größe für einen anderen Stoff als Radiator folgt aus anderweitig bekannten Größen als

$$\frac{J}{i} = \frac{J}{J_P} \cdot \frac{J_P}{i_P} \Big/ \frac{i}{i_P}.$$

Bei der Berechnung der Größe J_P/i_P ist noch darauf Rücksicht zu nehmen, daß bei der Messung die Luft allgemein unter einem anderen Druck b gestanden, als das Gas (B). Da die Ionisation in ziemlich weiten Grenzen dem Druck des Gases proportional ist, so gilt allgemein

$$\frac{J_P}{i_P} = \frac{T_P - T_1}{\tau_P - \tau_1} \cdot \frac{b}{B}.$$

Die letzte 5. Beziehung gibt die relative Ionisation in verschiedenen Gasen durch „harte γ-Strahlen".

Gase und Radiatoren. Die Luft wurde in das Elektroskop entweder aus dem Laboratorium oder von außen hineingeleitet; die Ergebnisse waren in beiden Fällen die gleichen. Der

Wasserstoff wurde einem mit zincum purissimum pro analysi und chemisch reiner verdünnter H_2SO_4 beschickten Kippschen Apparate entnommen, die Kohlensäure aus chemisch reiner Salzsäure und Marmorstückchen bereitet. Der Sauerstoff entstammte einer Bombe der Berliner Sauerstofffabrik. Das Schwefeldioxyd wurde aus H_2SO_4 und $NaHSO_3$ hergestellt. Als Radiatoren dienten je drei hintereinander gestellte und je 1 mm dicke und 1 dm² große gewalzte Bleche aus Pb, Al, Zn, Fe, Cu, Ni. Glas wurde in der Form von zwei abgewaschenen photographischen Platten von der Gesamtdicke von 3,9 mm, Ebonit als eine einzige 2,15 mm dicke Platte benutzt. Aus vier schmäleren Platinplatten wurde eine 1 dm² große und in der Mitte 0,8 an zwei Seiten 0,4 mm dicke Platte durch geeignete Klammern hergestellt. Von Papier wurden 1 bis 8 Lagen Zeichenpapier von je 0,25 mm Dicke benutzt.

Die Messungen. Als Beispiel wie die Messungen und die Berechnung durchgeführt wurden, stehe hier als Tabelle I ein Auszug aus dem Beobachtungsprotokoll und zwar eine Reihe mittlerer Genauigkeit, die zweite für Kohlensäure.

Beim Wasserstoff wurde, um die Zeit der einzelnen Messungen zu verkürzen, die Fallzeit des Blättchens zwischen zehn mittleren Teilstrichen (49—39, 48—38) gemessen — für Luft als Radiator dauerte dann die Beobachtung ca. 12 Minuten. Dadurch wird die Genauigkeit etwas verringert, da der Augenblick des Durchgangs des Blättchens durch einen Teilstrich der sehr langsamen Bewegung wegen schwer genau richtig zu erfassen ist.

Eine Übersicht aller in der Weise, wie sie Tabelle I zeigt, gewonnenen Ergebnisse enthält die Tabelle II. Es ist zu bemerken, daß die drei Reihen für „Luft" unter verschiedenen Anfangs- und Endpotentialen (ca. 250—225, 300—275, 350—330 Volt) erhalten wurden, die Übereinstimmung der Ergebnisse zeigt, daß die angewandte Voltage zur Hervorbringung des Sättigungsstromes genügt. Bei den übrigen Gasen war das Anfangspotential ca. 300 Volt.

Zur Bestimmung von J_P/i_P und J_0/i_0 wurden besondere Meßreihen gemacht und zwar in der Weise, daß die Größen τ_0, τ_1 und τ_P zuerst für Luft und womöglich anschließend für

Tabelle I.

Kohlensäure II.

Barometerdruck 747,0 mm Hg 0°. Überdruck in CO_2 9,0 cm H_2O = 7,4 mm Hg. Mittlere Beobachtungstemperatur 20,5° C.
Das Elektroskop wurde um 3^h p. m. mit CO_2 gefüllt.
Chronometer I gibt die Fallzeit von 64 bis 24, Chronometer II von 63 bis 23 Skt. des Mikrometers.

Nr.	Radiator	Schirm	Zeit der Beobachtung	Chronometer I	Chronometer II	Mittlere Fallzeit t sec	$T = \frac{1}{t}\cdot 10^3$	$T_x - T_1$	$\frac{J_x}{J_p}$
1	Luft	A	3^h 35^m	5^m 17,6^s	5^m 19,6^s	—	—	—	—
2	„	A	3 44	5 39,8	5 38,6	—	—	—	—
3	„	A	4 9	5 39,0	5 39,0	339,4*)	$2,95_0$	—	0,040
4	„	A	4 18	5 37,0	5 40,6	—	—	—	—
5	„	A B	4 37	6 19,8	6 21,8	380,8	$2,62_7$	—	—
6	Blei	A B	4 45	6 3,8	6 4,4	364,1	$2,74_8$	—	0,015
7	Luft	A	4 54	5 39,2	5 39,2	—	—	—	—
8	Blei	A	—	1 31,4	1 31,2	91,3**)	10,96	8,01	1,000
9	„	A	5 7	1 31,4	1 31,4	—	—	—	—
10	Aluminium	A	5 13	3 2,8	3 2,6	182,7	$5,47_5$	$2,51_5$	0,314
11	Zink	A	5 17	2 6,4	2 6,0	126,2	$7,92_6$	$4,97_6$	0,621
12	Glas	A	5 21	3 9,0	3 7,6	188,3	$5,31_4$	$2,36_4$	0,295
13	Papier, 1 Schicht	A	5 30	4 51,2	4 52,8	292,0	$3,42_7$	$0,47_7$	0,059
14	„ 3 Schichten	A	5 36	4 20,0	4 19,2	259,6	$3,85_6$	$0,90_6$	0,113
15	„ 5 „	A	5 43	4 13,0	4 12,4	252,7	3,96	1,01	0,126
16	„ 8 „	A	5 48	4 6,8	4 7,0	246,9	4,05	1,10	0,137
17	Luft	A	5 57	5 38,6	5 39,4	—	—	—	—
18	Eisen	A	6 3	2 17,6	2 18,0	137,8	7,26	4,31	0,538
19	Kupfer	A	6 8	2 8,8	2 9,8	129,3	$7,73_5$	$4,78_5$	0,596
20	Nickel	A	6 12	2 9,8	2 10,0	129,9	$7,70_4$	$4,75_4$	0,593
21	Platin	A	6 22	1 35,2	1 36,0	95,6	10,46	7,51	0,938
22	Blei	A	—	1 31,0	1 31,4	—	—	—	—
23	Ebonit	A	—	3 35,8	3 37,4	216,6***)	4,62	1,67	0,208
24	„	A	6 33	3 36,2	3 36,8	—	—	—	—
25	Luft	A	6 48	5 40,4	5 41,0	—	—	—	—

*) Mittel aus Nr. 3, 4, 17, 25. **) Mittel aus Nr. 8, 9, 22. ***) Mittel aus Nr. 23, 24.

Tabelle II.

Relative Intensitäten der Ionisation infolge der Sekundärstrahlung verschiedener Stoffe in verschiedenen Gasen; Ionisation durch Sekundärstrahlung von Blei = 1000.

Radiator	H_2 I.	H_2 II.	Luft I.	Luft II.	Luft III.	O_2 I.	O_2 II.	CO_2 I.	CO_2 II.	SO_2	Mittel	Eve	Mc Clelland	Dichte des Radiators	At.-Gew. des Radiators	Ionis./Dichte	Ionis./At.-Gew.
Blei	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	11,3	207	87,5	4,84
Platin	—	930	—	—	914?	—	940	—	938	987	932	—	920	21,4	195	43,5	4,78
Zink	644?	618	616	623	618	610	625	623	621	627	622	560	650	7,1	65,4	86,7	9,5
Kupfer	605	597	590	596	590	590	592	601	596	590	595	560	640	8,9	63,6	67,0	9,36
Nickel	—	588	—	—	584	—	590	—	593	582	587	—	—	8,8	58,7	66,6	10,0
Eisen	549	548	546	541	544	538	541	536	538	529	541	530	620	7,8	55,9	69,4	9,7
Aluminium . . .	322	298	319	319	315	317	304	321	314	319	315	300	330	2,7	27,1	117	11,6
Glas	295	293	286	296	290	295	295	298	295	281	292	312	310	2,5	—	117	—
Ebonit	218	229	203	217	215	209	—	209	208	205	212	227	270	1,2	—	177	—
Papier: 1 Schicht	67	55	—	62	60	54	62	60	59	51	59	—	—	—	—	—	—
3 Schichten	—	119	—	127	118	109	117	121	113	106	116	—	—	—	—	—	—
5 „	—	135	—	—	135	—	134	—	129	—	133	—	—	—	—	—	—
8 „	151	137	134	134	140	141	148	143	137	134	140	149	230	—	0,8	175	—
Luft	48	47	—	39	41	38	39	34	40	35	40	—	—	0,0012	—	33000	—
Sek. γ-Strahlung / Sek. γ+β-Strahlung	0,009	0,012	0,008	0,010	0,009	0,013	0,014	0,011	0,015	0,015	0,012	0,190	—				

das andere Gas bestimmt wurden. Die Ergebnisse sind in der Tabelle III zusammengestellt.

Tabelle III.

Relative Ionisation verschiedener Gase durch die Sekundärstrahlung $\left(\frac{J_p}{i_p}\right)$ und durch harte γ-Strahlen $\left(\frac{J_0}{i_0}\right)$.

Gas	$\frac{J_p}{i_p}$	β-Strahlen Strutt	$\frac{J_0}{i_0}$	γ-Strahlen Strutt
Luft . .	1,00	1,00	1,00	1,00
H_2 . . .	0,160₅ 0,162₅	0,157	0,179 0,168	0,169
O_2 . . .	1,20	1,21	1,14₅	1,17
CO_2 . .	1,55	1,57	1,51	1,53
SO_2 . .	1,81 (2,32)	2,31	1,84	2,13

Zur Durchführung der Rechnung wurde ein 50 cm langer logarithmischer Rechenschieber benutzt.

Diskussion zur Tabelle II. Wie aus den angeführten Zahlen ersichtlich, ist die auf Blei bezogene relative Ionisation durch Sekundärstrahlen verschiedener Stoffe in allen Gasen innerhalb der Versuchsfehler dieselbe. Man könnte erwarten, daß wenigstens bei den wenig die β-Strahlen absorbierenden Radiatoren die Ionisation wachsen wird, wenn wir zu dichteren Gasen übergehen. Da nämlich diese Radiatoren nur die langsamsten β-Strahlen absorbieren, werden sie wahrscheinlich die weichste sekundäre Strahlung aussenden, welche in dichteren Gasen relativ mehr absorbiert werden könnte, als in dünneren. Wenn ein solcher Effekt existiert, muß die Differenz der Ionisierungsstärke innerhalb der durch die Methode unvermeidlichen Versuchsfehler liegen. Die Sekundärstrahlung muß also von einer ziemlich durchdringenden Art sein und kann also auf keinen Fall den α-Strahlen analog sein. Die relativ sehr große Radiation der Luft wird dadurch erklärlich, daß eine sehr dicke Schicht strahlt, wogegen bei den anderen Stoffen die Strahlung auf eine ziemlich dünne Oberflächenschicht beschränkt ist. Dies erhellt aus den Angaben für 1, 3, 5 und 8 Schichten von Papier (Fig. 2). Je mehr Schichten hinzugefügt werden, desto langsamer wächst die Strahlung und

nähert sich einem Grenzwert, welcher dann erreicht wird, wenn die Dicke des Radiators so groß ist, daß die von seiner untersten Schicht ausgehende Sekundärstrahlung im Radiator selbst absorbiert wird, bevor sie aus ihm heraustreten kann. In zwei Spalten der Tab. II sind die Resultate von Eve[1]) u. McClelland[2]) angeführt, die sich mit einer ähnlichen Messung der relativen Strahlungsfähigkeit verschiedener Stoffe beschäftigt hatten. Die Übereinstimmung der Resultate dieser beiden Forscher ist nicht besonders befriedigend; die Zahlen der Tab. II liegen meistenteils zwischen ihren beiden. Die Gesamtresultate ihrer Arbeiten werden aber durch die Daten der Tabelle bestätigt. Eve fand, daß das Verhältnis $\frac{\text{Sek. Radiation}}{\text{Dichte}}$ gar nicht konstant ist, wogegen McClelland die Vermutung aussprach, daß das Verhältnis $\frac{\text{Sek. Radiation}}{\text{Atomgewicht}}$ dazu neigt, bestimmte Gruppen zu bilden, z. B. eine, wo es ca. 5 beträgt, eine andere, wo es ca. 10 gleich ist. Es scheint eher, daß dieses Verhältnis als Funktion des Atomgewichtes aufgetragen eine glatte zur Abszissenachse schwach konvexe Kurve bildet. Es wären aber mehr Beobachtungen bei verschiedenartigeren Atomgewichten nötig, um diese Frage zu entscheiden. Allgemein scheint die Intensität der sekundären Strahlung mit wachsendem Atomgewicht kleiner zu werden.

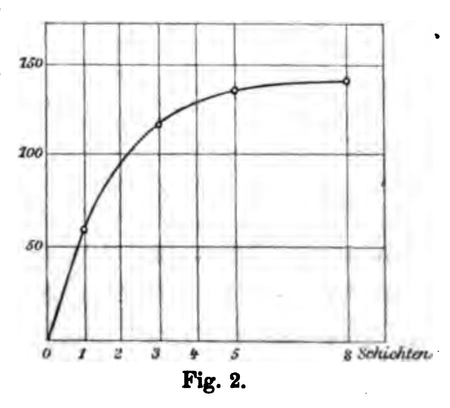


Fig. 2.

In der letzten Zeile der Tab. II ist das Verhältnis der sekundären Strahlung, die durch γ-Strahlen nach dem Passieren eines 6,2 mm dicken Bleischirmes hervorgerufen wird, zur gesammten, durch alle β- und γ-Strahlen verursachten angeführt. Aus meinen Messungen folgt, daß etwa 1 Proz. der Gesamtstrahlung von den allerdings durch den Bleischirm geschwächten

---

1) A. S. Eve, Phil. Mag. (6) 8. p. 669. 1904.

2) J. A. McClelland, Phil. Mag. (6) 9. p. 230. 1905.

γ-Strahlen herrührt. Eve fand dagegen, daß die γ-Strahlen nach dem Passieren eines 6,3 mm dicken Bleischirmes etwa 19 Proz. der gesamten Sekundärstrahlung veranlaßten. Nach dem Durchgang durch eine x mm dicke Bleischicht verbleibt von den ursprünglichen γ-Strahlen J_0 der Teil J, welcher gleich ist $J = J_0 . e^{-\lambda x}$. Der Absorptionskoeffizient λ berechnet sich aus der Angabe Rutherfords, daß in einer 9 mm dicken Schicht 50 Proz. der Strahlen absorbiert werden. Aus einer kleinen Rechnung folgt also, daß durch 6,2 mm Blei 62 Proz. der γ-Strahlen hindurchdringen; also würde die totale γ-Strahlung nach meinen Messungen etwa $1,2 \cdot \frac{100}{62} = 1,9$ Proz., nach Eve aber $19 \cdot \frac{100}{62} = 30$ Proz. der gesamten sekundären Radiation zur Folge haben. Eves Resultat ist wenig begreiflich, wenn wir bedenken, daß die Ionisationsvermögen der β- und γ-Strahlen des Radiums ungefähr im Verhältnis 100 : 1 stehen und umgekehrt das Verhältnis der Durchdringungsvermögen ca. 1 : 100 beträgt. Auch ein Ergebnis von McClelland verträgt sich besser mit meinen Messungen als mit denjenigen von Eve; er führt nämlich an, daß die sekundäre Radiation auf 7 Proz. sank, wenn in den Weg der Radiumstrahlen eine Schicht aus Zinnfolie von 0,4 mm Dicke eingeschaltet wurde, durch welche die γ-Strahlen fast gar nicht geschwächt wurden und durch welche noch ein Teil der β-Strahlen hindurchging.

In einigen Versuchen wollte ich das Elektroskop gänzlich vor der sekundären Strahlung der Luft abschirmen, und stellte schräg vor seine Öffnung einen dritten Bleischirm (von 6,0 mm Dicke (vgl. Fig. 1). Aber in diesem Falle trat anstatt der erwarteten Verminderung immer eine, wenn auch kleine Vergrößerung der Ionisation auf. Daraus folgt, daß die γ-Strahlen auch da, wo sie aus einem Körper *heraustreten*, eine Emission von sekundärer Strahlung veranlassen, die schon Eve beobachtet hat. Diese Beobachtung führe ich nur deshalb an, weil die γ-Strahlen eine weit über 5 cm dicke Bleischicht durchdrungen hatten, und doch diesen Effekt zeigten. Dadurch erklärt Eve die Resultate Paschens[1]) ohne die Annahme, daß die γ-Strahlen negative Ladungen mit sich führen.

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 14. p. 164. 1904.

Diskussion zur Tabelle III. Unter J_P/i_P sind die durch die Sekundärstrahlen von Blei in verschiedenen Gasen verursachten relativen Ionisationen aufgeführt, unter J_0/i_0 die durch „harte“ γ-Strahlen entstandenen. Zum Vergleich geben zwei nebenstehende Spalten relative Ionisationen durch direkte β- und γ-Strahlen des Radiums, wie sie von Strutt[1]) bestimmt worden sind. Da die Werte von Strutt als auf 1—2 Proz. genau bezeichnet werden, so sieht man bis auf die letzte Zeile eine in den Grenzen der Versuchsfehler *vollständige Übereinstimmung zwischen den relativen Ionisationen durch Sekundärstrahlen und die β-Strahlen des Radiums.* Auch die Werte für γ-Strahlen, welche 1 cm (Strutt) oder 3,5 und mehr Zentimeter Blei (J_0/i_0) durchdrungen hatten, sind gleich. Die erste Übereinstimmung bestätigt das Resultat, welches McClelland durch magnetische Ablenkung erhalten hatte, daß die Sekundärstrahlung wenigstens vorwiegend aus β-Strahlen besteht. Keineswegs bestätigt sich die Vermutung Rutherfords, daß auf der Anprallstelle von Elektronen eine weiche Röntgenstrahlung entstehen würde. Da in der Formel

$$\frac{J_x}{i_x} = \frac{\frac{J_x}{J_P}}{\frac{i_x}{i_P}} \cdot \frac{J_P}{i_P}$$

der Faktor bei J_P/i_P laut Tab. II in den Grenzen der Versuchsfehler überall gleich 1 ist, sind auch die relativen Ionisationen durch Sekundärstrahlen verschiedener Radiatoren innerhalb der Versuchsfehler gleich. Es bleibt nur noch die Diskrepanz der Werte in der letzten Zeile beim SO_2 zu erklären übrig. Sie steht im Zusammenhang mit besonderen, bei frisch bereiteten Gasen auftretenden Erscheinungen.

Die Ionisation in frisch bereiteten Gasen. Frisch bereitetes Schwefeldioxyd wurde durch Glaswolle, konzentrierter Schwefelsäure und wiederum Glaswolle in das Elektroskop eingefüllt und seine durch spontane Ionisierung und harte γ-Strahlen verursachte Ionisation gemessen. Es ergaben sich Zahlen, die in der Tab. IV zusammengestellt und in der Kurve I des Diagramms 3 graphisch aufgetragen sind.

1) R. J. Strutt, Phil. Trans. London A. **196.** p. 508. 1901 u. Proc. Roy. Soc. **72.** p. 208. 1903.

Tabelle IV.

Kurve I, Diagramm 3		
Beobachtungszeit	**Fallzeit des Blättchens** t **sec**	**Leitfähigkeit** $\tau = \frac{1}{t} \cdot 10^5$
0m bis 5m	**225,3**	**444**
„ 11	**247,9**	**403_5**
„ 18	**262,7**	**381**
„ 24	**267,2**	**374**
„ 31	**272,5**	**367**
„ 40	**279,5**	**358**
„ 48	**282,4**	**354**
„ 56	**285,4**	**350_5**
„ 64	**285,6**	**350_2**
„ 73	**286,9**	**349**
„ 95	**286,2**	**349_6**
„ 147	**287,8**	**348**

Tabelle V.

Kurve II, Diagramm 3			Kurve III, Diagramm 3		
Beobachtungszeit	Fallzeit t sec	Leitfähigkeit $\tau = \frac{1}{t} \cdot 10^5$	Beobachtungszeit	Fallzeit t sec	Leitfähigkeit $\tau = \frac{1}{t} \cdot 10^5$
0m bis 4m	117	854	0m bis 3m	121,3	824
„ 9	124,5	803	„ 8	126,2	792
„ 14	127,4	785	„ 18	127,8	782
„ 19	129,0	775	„ 23	127,5	784
„ 28	127,1	786	„ 32	128,2	780
„ 37	130,0	769	„ 37	128,4	779
„ 45	131,2	762	„ 43	128,4	779
„ 67	131,2	762	„ 53	129,1	774
Elektroskop stand entladen			„ 63	129,0	775
97m bis 99m	127,5	785	„ 72	129,1	774
„ 104	127,8	783	„ 102	129,4	772
„ 109	129,1	774			
„ 115	130,7	765			
„ 127	131,2	762			
„ 135	131,1	763			

Wie man sieht, sinkt die Ionisation (und Leitfähigkeit) zuerst schnell, dann langsamer und erreicht nach etwa einer Stunde einen Wert, der in den Grenzen der Beobachtungsfehler eine lange Zeit hindurch konstant bleibt, vorausgesetzt, daß das Elektroskop während dieser Zeit immer geladen bleibt. Bei der Berechnung der Tab. III benutzte ich bei allen Gasen diese konstanten Werte, die sich nach ca. $1^1/_2$ Stunden eingestellt haben, wie ja auch aus der Tab. I ersichtlich ist. Auf diese Weise bekam ich für die relative Ionisation durch

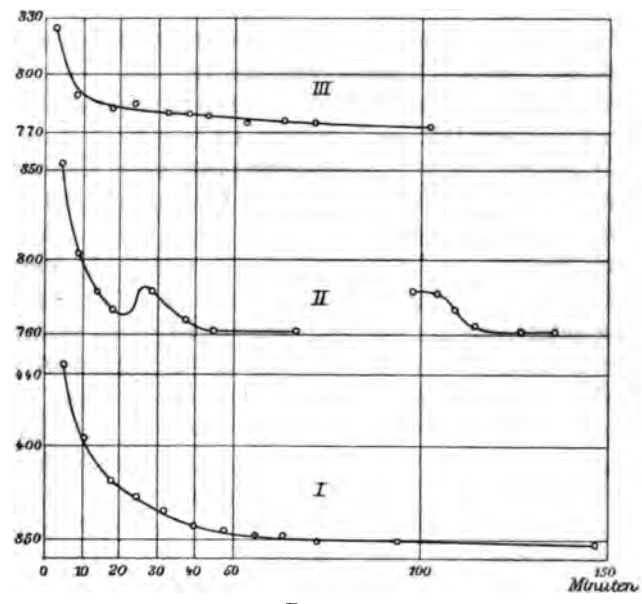


Fig. 3.

Sekundärstrahlen im SO_2 den Wert 1,81. Wenn man bei der Berechnung den ersten beobachteten Wert bald nach dem Einfüllen des Gases benutzt, so bekommt man die eingeklammerte Zahl 2,32, die mit der Struttschen in vollständiger Übereinstimmung steht. Strutt arbeitete nach einer elektrometrischen Methode, bei welcher die einzelnen Beobachtungen nur eine relativ sehr kurze Zeit (weniger als 1 Minute) dauerten, so daß sie wahrscheinlich in schneller Aufeinanderfolge gemacht wurden. Deshalb vermute ich, daß er diese anfänglichen Werte bei der Berechnung benutzte.

Leider ist in seiner Abhandlung keine Andeutung über diesen Punkt zu finden. Es wäre erwünscht, bei den Messungen der Ionisation in Gasen diesem Umstande Rechnung zu tragen. Auch die übrigen Gase H_2, CO_2 und sogar O_2, welches aus der Bombe entnommen wurde, zeigten diese Erscheinung, wenn auch nicht in demselben Maße wie SO_2.

Die Ionisation in der Luft. Die Erscheinungen in der Luft waren noch verwickelter. In das Elektroskop wurde entweder Luft aus dem Laboratorium, wo sich die Radiumkapsel ca. 3 Wochen lang befand, oder aber von außen her eingefüllt. Die Erscheinungen waren im ersten Falle ausgesprochener, jedoch ähnlich wie im zweiten. Der Verlauf der Ionisation ist in der Tab. V zahlenmäßig angegeben, und in den Kurven II und III des Diagramms 3 graphisch dargestellt. Kurve II bezieht sich auf frisch eingefüllte Luft, Kurve III auf Luft, welche nachher während ca. 14 Stunden im ungeladenen Elektroskop eingeschlossen verblieb.

Ein Versuch zur Erklärung des zeitlichen Verlaufes der Ionisation in frisch bereiteten Gasen und in der Luft. Das frisch bereitete Gas ist ionisiert, aber nicht durch gewöhnliche Ionen, welche z. B. bei der Bestrahlung durch Becquerel- oder Röntgenstrahlen etc. entstehen. Diese Ionen besitzen nämlich eine ziemlich große Beweglichkeit und Rekombinationsfähigkeit, so daß sie im ziemlich starken Felde innerhalb des Elektroskops sehr schnell innerhalb weniger als einer Sekunde verschwinden müßten. Die Ionen, welche im frisch bereiteten Gase zugegen sind, brauchen aber eine ziemlich lange Zeit, um zu verschwinden, so daß sie eine außerordentlich kleine Beweglichkeit und außerdem einen sehr kleinen Koeffizienten der Rekombination besitzen müssen. Es wäre vielleicht nicht unmöglich, daß es sich um sehr langsame Ionen handelt, die Bloch[1] neuerdings gefunden, und bei denen er einen außerordentlich kleinen Rekombinationskoeffizienten bestimmt hat. Daß es sich wirklich um eine gewisse Art von Ionisation handelt, erhellt aus folgenden Versuchen: Wenn ein frisch bereitetes Gas ständig durch ein geladenes Elektroskop hindurchgeht, so etabliert

1) E. Bloch, Journ. d. Phys. (4) 3. p. 913. 1904; Compt. rend. 138. p. 1599. 1904.

sich ein Gleichgewichtszustand zwischen den stetig neu gelieferten und den durch das Feld auf die Elektroden weggetragenen Ionen. Die Fallzeit des Blättchens, welche bei einem derartig eingerichteten Versuch beobachtet wurde, war 4^m 30^s, 4^m 29^s, 4^m 35^s, 4^m 36^s, 4^m 26^s, 4^m 30^s. Wenn der Gasstrom schneller durch das Elektroskop hindurchgeleitet wird, so werden in derselben Zeit mehr neue Ionen geliefert, und es ist zu erwarten, daß die Fallzeit der Blättchen kleiner wird; der Versuch ergab 4^m $6{,}6^s$, 4^m 8^s. Aber ein solcher Gasstrom führt auch eine sehr große Menge von nicht verbrauchten Ionen wieder weg. Die größte Leitfähigkeit ist also zu erwarten, wenn man das nicht geladene Elektroskop mit frischem Gase füllt und gleich nachher die Leitfähigkeit bestimmt. Zwei derartige Versuche ergaben Fallzeiten 3^m 51^s und 3^m $51{,}5^s$. Augenscheinlich geschehen Rekombinationen von diesen trägen Ionen sehr langsam, so daß das hauptsächlichste Mittel, um sie aus dem Gase zu entfernen, das elektrische Feld ist; je stärker es ist und je länger es wirkt, desto schneller muß die Leitfähigkeit sinken. Es wurde also wiederum das ungeladene Elektroskop mit frischem Gase gefüllt und die Fallzeit zu 3^m 51^s bestimmt; dann blieb das Elektroskop ca. 5 Minuten lang auf etwa 300 Volt geladen und im Anschluß daran wurde die Fallzeit zu 4^m $21{,}5^s$ bestimmt. Wenn es nachher während 7 Minuten auf etwa 600 Volt geladen gehalten wurde, stieg sie auf 5^m $1{,}3^s$. Sowohl der zeitliche Verlauf der Ionisation, als auch alle diese Versuche sind auf Grund der Hypothese über die Anwesenheit von sehr trägen Ionen im frisch bereiteten Gase leicht zu erklären.

Der Verlauf der Kurve II, Diagramm 3 für Luft erinnert an die Kurven von Curie[1]) für den Abfall der Aktivität von Körpern, die während einer sehr kurzen Zeit dem Einflusse der Radiumemanation ausgesetzt waren, wenn man bedenkt, daß daneben noch eine andere konstante und relativ sehr starke Quelle der Ionisation (nämlich die harte γ-Strahlung) tätig ist. Alle diese Versuche wurden ja angestellt in Gegenwart von Radium in dem Bleizylinder, wie es Fig. 1 veranschaulicht. Es muß nur der zweite Teil der Kurve II über-

1) P. Curie, Phys. Zeitschr. 5. p. 316. 1904.

raschen, nachdem das Elektroskop von der 67. zur 97. Minute im ungeladenen Zustande gestanden hatte. Die Leitfähigkeit stieg während dieser Zeit etwas an, und kehrte zum ursprünglichen Werte erst dann zurück, nachdem im Gase durch eine längere Zeit hindurch ein elektrisches Feld hergestellt war. Ähnlich stieg sie auch an, wenn die Luft im Elektroskop über die Nacht während ca. 14 Stunden gestanden hatte (Kurve III). Es handelt sich wahrscheinlich um eine Erscheinung, welche derjenigen in frisch bereiteten Gasen analog ist. Schwieriger ist es aber hier die Quelle des Ursprungs der trägen Ionen aufzufinden. Möglich wäre es, daß bei der Ionisierung der Luft neben den gewöhnlichen auch diese wenig beweglichen und sich schwer rekombinierenden Ionen entstehen. Während einer halben Stunde entstanden bei der Ionisation durch harte γ-Strahlen so viele, daß die durch sie bedingte Leitfähigkeit ca. $\frac{785-762}{762} = 3$ Proz. der Leitfähigkeit infolge gewöhnlicher Ionen betrug. Ob es sich um eine neue Art von trägen Ionen sui generis handelt, oder ob es vielleicht suspendierte Staubteilchen sind, die ihre Ladung den gewöhnlichen Ionen verdanken, müssen neue Versuche entscheiden. Der zweiten Möglichkeit steht im Wege der Umstand, daß die Luft beim Einfüllen in das Elektroskop durch destilliertes Wasser und konzentrierte H_2SO_4 getrieben wurde und durch zwei Stöpsel aus Glaswolle filtriert war.

Zum Schluß erfülle ich eine angenehme Pflicht, indem ich meinem Chef, dem Vorstand des k. k. Physikalischen Instituts der böhmischen Universität, Hrn. Hofrat Prof. Dr. Strouhal, der mir die Mittel zur Ausführung dieser Arbeit bereitwilligst zur Verfügung stellte, meinen besten Dank ausspreche.

Prag, k. k. Physik. Inst. der böhm. Univ., Oktober 1905.

(Eingegangen 2. November 1905.)

5. *Über die Energie der Kathodenstrahlen im Verhältnis zur Energie der Röntgen- und Sekundärstrahlen; von W. Wien.*

(Aus der Wüllner-Festschrift mit einigen Zusätzen.)

Die Energie der Röntgenstrahlen ist zuerst von Dorn[1]), später von Rutherford[2]) und Schöps[3]) bestimmt worden, Leininger[4]) vermochte dagegen keine Wärmewirkung zu beobachten. Um diese Versuche aufzuklären, unternahm ich die Bestimmung der Wärmewirkung der Röntgenstrahlen im Verhältnis zur Energie der erzeugenden Kathodenstrahlen, zumal sich hieraus Schlüsse auf die Impulsbreite der Röntgenstrahlen ziehen lassen. Schließlich untersuchte ich auch die Energie der wieder von den Röntgenstrahlen erzeugten Sekundärstrahlen, die sich freilich nur indirekt bestimmen läßt unter der Voraussetzung, daß es Kathodenstrahlen sind und unter Benutzung der von Dorn angegebenen Werte der Geschwindigkeit.

Ich hielt es für zweckmäßig, zwei voneinander unabhängige Methoden zur Bestimmung der Wärmewirkung zu benutzen, und wandte sowohl das Bolometer als die Thermosäule an. Rutherford erhebt zwar Bedenken gegen die Verwendung der letzteren, indem er meint, daß die Wärmeabgabe aus dem Innern der Thermosäule, wo die Röntgenstrahlen absorbiert werden, in anderer Weise erfolgen müsse als die Ableitung der oberflächlich absorbierten Wärmestrahlen, die man zum Zweck der Eichung auffallen läßt. Mir hat diese Meinung nicht eingeleuchtet, da die Absorption der Röntgenstrahlen in Metallen auch nicht in der Nähe der Oberfläche geschieht und die Empfindlichkeit der von mir benutzten Thermosäule, die aus 30 aneinandergefügten Antimon–Wismutelementen bestand, in Luft genau so groß war wie im hohen Vakuum. Zu dem

---

1) E. Dorn, Wied. Ann. 63. p. 160. 1897.
2) E. Rutherford, Phys. Zeitschr. 2. p. 53. 1900.
3) Schöps, Inauguraldiss. Halle 1899.
4) F. Leininger, Phys. Zeitschr. 2. p. 691. 1900.

Zweck bestrahlte ich die in eine weite Glasröhre geschlossene Thermosäule mit einer Glühlampe, einmal wenn Luft in der Röhre, dann wenn ein hohes Vakuum erzeugt wurde. Die Galvanometerausschläge waren dieselben. Es geht hieraus hervor, daß die Luftleitung, an die man für die Oberflächenabgabe der Wärme zuerst denken müßte, keine Rolle spielt. Schließlich hat sich dann auch gezeigt, daß die Ergebnisse mit dem Bolometer mit denen, welche die Thermosäule gab, so weit übereinstimmten, als man erwarten kann.

Eine wesentliche Unsicherheit in der Energiemessung der Röntgenstrahlen liegt darin, daß man nicht die freie Strahlung ohne absorbierende Schicht beobachten kann. Ich habe mir viel erfolglose Mühe gegeben, diese Unsicherheit wenigstens herabzudrücken. Deshalb versuchte ich anfangs die Thermosäule in eine Röhre zu schieben, die mit zwei hintereinander befindlichen Aluminiumfenstern versehen war, und die Röhre ins Innere der Röntgenröhre zu bringen. Es scheiterte dies aber daran, daß es unmöglich war, die Thermosäule gegen die starke Wärmeentwickelung in der Röhre zu schützen. Auch Versuche, die Röntgenstrahlen durch Aluminiumfenster anstatt durch die Röhrenwand gehen zu lassen, führten zu keinem Ergebnis, weil sich solche größere Fenster nicht wohl ohne Kitt anbringen lassen und dieser die notwendige Konstanz des Vakuums zu sehr beeinträchtigt.

Ich war daher gezwungen zur Benutzung einer gewöhnlichen Röntgenröhre zurückzukehren und die Absorption der Wand besonders zu bestimmen, wobei allerdings die selektive Absorption außer acht gelassen werden mußte. Die Bestimmung der Energie der erzeugenden Kathodenstrahlen geschah kalorimetrisch. Benutzt wurde eine Röhre von Müller in Hamburg, wo die Antikathode eine Glasröhre mit eingeschmolzenem Platinboden ist. Diese Röhre diente als Kalorimetergefäß, das immer bis zu einer Marke mit Wasser gefüllt wurde. Die Temperaturerhöhung in 5 Minuten wurde an einem eingesenkten Thermometer beobachtet. Die dieser Temperaturerhöhung entsprechenden Kalorien wurden gefunden, indem eine gleiche durch einen galvanischen Strom hervorgerufen wurde, der durch eine eingesenkte Spule floß und dessen Wattverbrauch bestimmt wurde.

Die Müllersche Röhre besitzt eine leidlich funktionierende Vorrichtung zur Regulierung des Vakuums, indem in einem Nebenrohr Kathodenstrahlen auf einem imprägnierten Glimmerplättchen Gas entwickeln. Die Spannung wurde während der Versuche konstant auf 58700 Volt gehalten, was durch eine Funkenstrecke mit Kugeln von 6 cm Radius kontrolliert wurde.

Die Spannung wurde nach den Messungen von Voigt[1]) aus der Funkenstrecke berechnet. Es ist natürlich möglich, daß die mit einem Induktionsapparat erzeugten Spannungen nicht ganz denselben Funkenlängen entsprechen als bei Benutzung einer Influenzmaschine. Der durch die Stromunterbrechung bedingte Anstieg der Spannung gibt möglicherweise etwas andere Funkenlängen als die mehr kontinuierlich wirkende Influenzmaschine. Der hierdurch bedingte Fehler soll besonders untersucht werden.

Die Thermosäule sowohl wie das Bolometer befanden sich in einem Zinkkasten, der eine große Öffnung zum Hindurchlassen der Röntgenstrahlen hatte. Diese Öffnung wurde durch dünnes Aluminiumblech von 0,03 mm Dicke geschlossen. Um alle Wärmewirkungen sicher auszuschließen, wurde noch ein zweites Aluminiumblatt eingeschoben. Dann zeigte ein auf mehrere hundert Grad erhitztes, geschwärztes Metallblech, das an der Stelle der Röntgenröhre sich befand, keine Einwirkung auf die Strahlungsmesser.

Als Galvanometer diente ein Siemenssches astatisches Glockengalvanometer von ca. 6 Ohm Widerstand, das gewöhnlich auf einer Empfindlichkeit von $2 . 10^{-9}$ Amp. pro Skalenteil gehalten wurde und dabei tagelang konstante Empfindlichkeit und auch guten Nullpunkt hielt. Obwohl dieses Instrument den du Bois-Rubensschen und Paschenschen an Empfindlichkeit etwas unterlegen ist, so ist es doch viel unempfindlicher gegen Störungen aller Art und daher in den modernen Laboratorien sehr am Platze, zumal die anderen Galvanometer selten bei einer höheren Empfindlichkeit benutzt werden.

Bei dieser Empfindlichkeit gab die Thermosäule, deren Fläche 1,4 qcm betrug, einen Ausschlag von 30—40 mm durch die Einwirkung der Röntgenstrahlen. Nicht viel größer war der

1) E. Voigt, Ann. d. Phys. **12**. p. 385. 1903.

Ausschlag des Bolometers, obwohl seine Fläche 225 qcm betrug. Das letztere konnte, sollte der Nullpunkt konstant bleiben, nur mit schwachem Strome benutzt werden.

Die Röntgenröhre wurde mit einem 40 cm-Induktorium und Turbinenunterbrecher betrieben. Die Zahl der Unterbrechungen betrug 32 in der Sekunde.

Das Bolometer war nach Art der Lummer-Kurlbaumschen Flächenbolometer aus 0,03 mm dickem und 5 mm breitem Platinblech hergestellt, bei dem zwei Zweige der Wheatstoneschen Brücke bestrahlt werden. Die Streifen sind so angeordnet, daß die Streifen des einen Zweiges die Lücken des anderen decken. Die beiden anderen Widerstände mußten aus ebensolchem Blech in gleichen Abmessungen hergestellt werden, weil sich sonst der Nullpunkt nicht konstant hielt. Geeicht wurden sowohl Bolometer als Thermosäule durch die Strahlung eines schwarzen Körpers von 100°. Bei einer Empfindlichkeit von $1{,}9 \,.\, 10^{-9}$ Amp. des Galvanometers, 188 Skt. der Empfindlichkeitsmessung, entsprach einem Skalenteil

$$5{,}4 \,.\, 10^{-8} \,\frac{\text{g-Kal.}}{\text{sec}} \text{ pro Quadratzentimeter}$$

aufgefallene Strahlung der Thermosäule.

Bei der Röntgenröhre betrug die Entfernung des Zentrums der Antikathode von der Thermosäule 13,5 cm.

Die Messung wurde so gemacht, daß eine Bleiplatte zwischen Röntgenröhre und Thermosäule geschoben wurde. Es wurde die Ablenkung am Galvanometer beobachtet, die beim Fortziehen der Bleiplatte eintrat.

Eine Beobachtungsreihe ergab die folgenden Werte.

Die Zahlen bedeuten, wenn r die Entfernung von der Antikathode bedeutet,

$$\frac{2\,\pi\, r^2 \times \text{Skalenteile der Röntgenstrahlung}}{\text{Temperaturerhöhung im Kalorimeter} \times \text{Skalenteile Empf.}}$$

bei einer Empfindlichkeit

$$\frac{188}{288} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{-9} \text{ Amp.}$$

10,0
10,4
8,8
8,6
8,7
9,3

Andere Reihen ergaben nur wenig abweichende Werte.

Unter Berücksichtigung der Empfindlichkeit der Thermosäule und des Galvanometers ergibt sich, da die Temperaturerhöhung durch die Kathodenstrahlen um 1° in 5 Minuten

$$0{,}103 \frac{\text{g-Kal.}}{\text{sec}}$$

entsprach, für die

$$\frac{\text{Energie der Röntgenstrahlen}}{\text{Energie der Kathodenstrahlen}} = 9{,}17 \,.\, 10^{-4} = \frac{E_r}{E_k} = \frac{5{,}4 \,.\, 188 \,.\, 9{,}3 \,.\, 10^{-8}}{0{,}103} \,.$$

Streng genommen wird bei der Wärmewirkung $E_k - E_r$ gemessen, doch ist eben E_r gegen E_k zu vernachlässigen.

Hier ist noch die Korrektur für die Absorption in der Röhrenwand anzubringen.

Die Absorption in der Röhrenwand wurde nach zwei Methoden bestimmt. Erstens wurde ein Stück Glas von einer ähnlichen Röhre vor die Thermosäule geschoben und die Verringerung des Ausschlages beobachtet.

Dann wurden durch eine andere Röhre von nahe gleicher Spannung Röntgenstrahlen erzeugt, die auf einer im Vakuum befindlichen Platte Sekundärstrahlen erzeugten.

Es wurde nun die gewöhnlich benutzte Röntgenröhre vor die Sekundärröhre geschoben und die Verringerung der erzeugten Sekundärstrahlung gemessen, worauf wir weiter unten noch näher eingehen werden. Hier erfolgt die Absorption der Röntgenstrahlen in beiden Glaswänden der Röhre und sie wurde unter Voraussetzung homogener Strahlung auf eine Glaswand reduziert.

Die so gewonnenen Resultate stimmten bis auf wenige Prozent mit den nach ersterer Methode erhaltenen überein. Hiernach gehen 68 Proz. der Röntgenstrahlen durch die eine Wand der Röntgenröhre. Durch diese Zahl ist der Wert von E_r / E_k zu korrigieren. Wir erhalten so

$$\frac{E_r}{E_k} = 1{,}35 \,.\, 10^{-3}.$$

Während bei der Thermosäule alle Röntgenstrahlen absorbiert werden, ist dies beim Bolometer nicht der Fall. Erstens geht ein Teil der Strahlen durch das Platinblech, dann ein weiterer durch die Lücken der nicht genau sich

deckenden Streifen. Die Menge Röntgenstrahlen, die durch das Bolometer geht, wurde ebenfalls mit der Sekundärstrahlröhre bestimmt. Bei der großen Ausdehnung der Bolometerfläche wurde die durchgegangene Strahlung an verschiedenen Stellen bestimmt und der Mittelwert genommen.

Es fand sich, daß das Bolometer 24 Proz. im Mittel hindurchläßt. Die bolometrischen Beobachtungen ergaben für

$$\frac{2\,\pi\,r^2 \text{ Skalenteile}}{\text{Skalenteile Empf.} \times \text{Temperaturerhöhung}} = 7{,}5,$$

wenn die Empfindlichkeit des Galvanometers auf die bei der Thermosäule reduziert war. Hieraus berechnet sich

$$\frac{E_r}{E_k} = 1{,}09\,.\,10^{-3}.$$

Die Abweichung von dem mit Hilfe der Thermosäule erhaltenen Wert ist nicht größer als die Fehler der einzelnen Beobachtungen, die hauptsächlich durch die Inkonstanz des Unterbrechers bedingt waren.

Trotz der etwas geringeren Empfindlichkeit halte ich die Beobachtungen mit der Thermosäule für die zuverlässigeren, weil die Konstanz des Nullpunktes eine größere war und vor allem die Korrektion wegen der Durchlässigkeit des Bolometers fortfällt.

Die gesamte Energie der Röntgenstrahlen beträgt für eine Temperaturerhöhung von 10,8° des von den Kathodenstrahlen erwärmten Kalorimeters, also 1,15 g-Kal./sec Kathodenstrahlenenergie,

$$E_r = 1{,}5\,.\,10^{-3}\,\frac{\text{g-Kal.}}{\text{sec}},$$

eine Zahl, die mit der von Dorn gefundenen nahe übereinstimmt mit dem Unterschiede, daß hier 32 Unterbrechungen in der Sekunde erfolgten, bei Dorn nur fünf. Den Grund der negativen Ergebnisse von Leininger habe ich nicht mit Sicherheit auffinden können, zumal die von ihm benutzte Röntgenröhre zerstört ist. Das von ihm benutzte Bolometer war dem meinigen ganz ähnlich. Möglicherweise war die Anzahl der Unterbrechungen für die gebrauchte Röhre nicht groß genug.

Die Abhängigkeit der Energie der Röntgenstrahlen von der Spannung und von der Art und Zahl der Unterbrechungen soll der Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein.

Wir können den gefundenen Wert für das Verhältnis der Energie der Röntgenstrahlen zu der der Kathodenstrahlen benutzen, um die Impulsbreite der Röntgenstrahlen zu berechnen.[1])

Hierbei treten die Unsicherheiten in den Grundlagen der Elektronentheorie insofern hervor, als es zweifelhaft bleibt, ob man die Gestalt der Elektronen als unabhängig von der Bewegung annehmen soll oder ob man ihnen die Gestalt eines Heavisideschen Ellipsoids, das sich mit der Geschwindigkeit ändert, zuzuweisen hat.

Obwohl die letztere Annahme die größere Wahrscheinlichkeit für sich hat, ist die Theorie für diesen Fall noch nicht so weit ausgebildet, um die Strahlung eines verzögerten Elektrons für Geschwindigkeiten zu berechnen, die nahe an der Lichtgeschwindigkeit liegen. Die von mir aufgestellte Bedingung, daß $\frac{v}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$ klein gegen 1 sei, ist bei den vorliegenden Beobachtungen nicht mehr erfüllt.

Ist dagegen die Gestalt des Elektrons unveränderlich, so ist nach Wiechert[2]) die Bedingung zu erfüllen, daß bei kugelförmiger Gestalt des Elektrons vom Radius R der Bewegungszustand sich in der Zeit $2R/(c-v)$ durch die Verzögerung j nur wenig ändert, so daß $(2R/c-v)j$ klein gegen v sein muß, wenn c die Lichtgeschwindigkeit und v die Elektronengeschwindigkeit bezeichnen.

Aus der Formel

$$R = \frac{2}{3} e \cdot \frac{e}{m}$$

berechnet sich, wenn wir für das Elementarquantum nach Thomson $e = 3{,}4 \,.\, 10^{-10}$ elektrostatische $= 1{,}13 \,.\, 10^{-20}$ elektromagnetische Einheiten und für $e/m = 1{,}87 \,.\, 10^{7}$ elektromagnetische Einheiten setzen

$$R = 1{,}415 \,.\, 10^{-13}\,\text{cm}.$$

1) Vgl. J. Larmor, Phil. Mag. (5) **44.** p. 503. 1897.

2) E. Wiechert, Elektrodynamische Elementargesetze. Jubelband für H. A. Lorentz, 1900.

Es wird sich zeigen, daß bei dieser Kleinheit des Radius die erwähnte Bedingung angenähert erfüllt ist.

Für die Ausstrahlung eines mit der Geschwindigkeit v fliegenden Elektrons, das während dt um $j\,dt$ in seiner Geschwindigkeit verzögert wird, ist zuerst von Abraham[1]) der Ausdruck abgeleitet

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}j^2 \cdot \frac{dt}{k^6},$$

wo $k^2 = 1 - v^2/c^2$ ist.

Bei gleichförmiger Verzögerung ist

$$l = \frac{j}{2}t^2.$$

Wird das Elektron auf der Strecke l von $v = v_0$ bis auf $v = 0$ verzögert, so ist $v_0^2 = 2jl$, also

$$dt = \frac{dv}{j} = \frac{dv}{v_0^2} \cdot 2l,$$

so daß wir für die während der ganzen Verzögerung von einem Elektron ausgestrahlte Energie den Wert erhalten

$$\frac{4\,l\,e^2 j^2}{3\,c^3 v_0^2}\int\limits_0^{v_0}\frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} = \frac{v_0^3\,e^2}{24\,c^3\,l}\left\{\frac{2 + 3\,k_0^2}{k_0^4} + \frac{3}{2}\frac{c}{v}\log\frac{1 + \frac{v_0}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}}\right\},$$

$$k_0^2 = 1 - \frac{v_0^2}{c^2}.$$

Die Geschwindigkeit v_0 berechnen wir aus dem bekannten Werte von e/m und der Spannung $V = 58700$ Volt.

Die Energie eines Elektrons von der Geschwindigkeit v_0 ist bei Oberflächenladung

$$\frac{e^2}{2R}\left\{\frac{c}{v_0}\log\frac{1 + \frac{v_0}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}} - 1\right\}.$$

Hiervon ist die Energie des ruhenden Elektrons

$$E = \frac{e^2}{2R}$$

1) M. Abraham, Ann. d. Phys. 10. p. 105. 1903.

abzuziehen, um die Bewegungsenergie zu erhalten. Diese ist also

$$\frac{e^2}{2R}\left\{\frac{c}{v_0}\log\frac{1+\frac{v_0}{c}}{1-\frac{v_0}{c}}-2\right\}$$

gleich der geleisteten Arbeit Ve. Setzen wir für

$$R=\frac{2}{3}\frac{e.e}{c^2m},$$

so wird

$$\left(\frac{4}{3c^2}V\frac{e}{m}+2\right)\frac{v_0}{c}=\log\frac{1+\frac{v_0}{c}}{1-\frac{v_0}{c}},$$

für den angegebenen Wert von V ergibt sich

$$v_0=1{,}38.10^{10}\frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Die Energie der Kathodenstrahlen ist nun, wenn in der Sekunde N Elektronen aufprallen,

$$E_k=NVe,$$

woraus

$$N=\frac{E_k}{Ve}.$$

Die Impulsbreite hängt von der Richtung der ausgesandten Welle ab. Sie ist $\lambda=2lc/v$ in der Richtung senkrecht auf der Bewegungsrichtung des Elektrons. In der der Bewegungsrichtung entgegengesetzten Richtung muß die Rückseite des Impulses noch die Strecke l durchlaufen, so daß die Impulsbreite hier

$$\frac{2lc}{v}+l=l\left(1+\frac{2c}{v}\right)$$

beträgt. In dieser Richtung ist aber die ausgestrahlte elektromagnetische Energie Null.

Bildet die Richtung der Welle den Winkel α mit der Bewegungsrichtung, so ist die Impulsbreite

$$l\left(\cos\alpha+\frac{2c}{v}\right).$$

Also muß die Strahlung schon bei ganz gleichmäßiger Ver-

zögerung und vollkommen gleichen Geschwindigkeiten aller Elektronen inhomogen sein. Für die Impulsbreite $\lambda = 2\,l\,c / v_0$ ist

$$\lambda = \frac{E_k}{E_r} \cdot \frac{1}{V} \cdot \frac{v_0^2\,e}{12\,c^2} \left\{ \frac{2 + 3\,k_0^2}{k_0^4} + \frac{3}{2} \frac{c}{v_0} \log \frac{1 + \frac{v_0}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}} \right\}.$$

Setzen wir den gefundenen Wert von E_k / E_r ein, so erhalten wir

$$\lambda = 2{,}3 \,.\, 10^{-10}\ \text{cm}.$$

Wir haben hier für E_r die wirklich ausgesandten Röntgenstrahlen gesetzt. Da sich aber die Röntgenwellen ebenso gut in die Antikathode hinein ausbreiten, so ist es richtiger für die Berechnung der Impulsbreite den Wert für E_r zu verdoppeln. Dann wird

$$\lambda = 1{,}15 \,.\, 10^{-10}\ \text{cm}.$$

Sommerfeld[1]) hat aus den Beobachtungen von Haga und Wind berechnet

$$\lambda = 1{,}3 \,.\, 10^{-8}\ \text{cm},$$

also über 100 mal so groß. Wie weit die Inhomogenität der Röntgenstrahlen hierbei in Frage kommt, läßt sich schwer übersehen.

Im übrigen hat unsere Rechnung die Voraussetzung, daß die Erwärmung durch die Röntgenstrahlen wirklich die Energie dieser mißt.

Da die Röntgenstrahlen an den Körpern, auf die sie treffen, Sekundärstrahlen erzeugen, so schien es mir von Wichtigkeit, auch die Energie dieser zu untersuchen.

Eine einfache Überlegung ergibt, daß diese im Vergleich zur Energie der Röntgenstrahlen nur gering sein kann. Denken wir uns eine große Anzahl dünner Platinfolien aufeinander gelegt und von Röntgenstrahlen durchstrahlt, so werden an allen Sekundärstrahlen erzeugt werden, soweit die Röntgenstrahlen überhaupt eindringen können. Fast alle diese Strahlen

1) A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **46.** p. 93. 1902; Physik. Zeitschr. **2.** p. 59. 1902.

werden aber wieder absorbiert, weil ja die Absorption von Kathodenstrahlen viel größer ist als die von Röntgenstrahlen.

Es scheint mir nicht unmöglich zu sein, daß die Absorption der Röntgenstrahlen überhaupt nur indirekt dadurch erfolgt, daß Sekundärstrahlen erzeugt werden. Es erscheint von vornherein nicht ausgeschlossen, daß die Röntgenstrahlen, ebenso wie sie von Elektronen erzeugt werden, nun ihrerseits nur auf Elektronen wirken.

Würde man die Absorptionsgesetze der Kathodenstrahlen und die Eigenschaften der Sekundärstrahlen näher kennen, so würde sich diese Hypothese prüfen lassen. Denn wenn alle Energie der Röntgenstrahlen in solche von Sekundärstrahlen verwandelt wird, so könnte man die erzeugte Menge Sekundärstrahlen berechnen, sobald man ihre Geschwindigkeit kennen würde. Wenn man nun das Absorptionsgesetz der Sekundärstrahlen ebenfalls kennen würde, so ließe sich berechnen, wie viel der erzeugten Sekundärstrahlen wieder an die Oberfläche gelangt. Diese Menge ließe sich mit der beobachteten vergleichen. Wir wollen eine solche Rechnung anstellen unter der Voraussetzung, daß die in der Tiefe x von der Oberfläche erzeugten Sekundärstrahlen nach dem Gesetz e^{-kx} absorbiert werden. Doch können wir von der Energie der Röntgenstrahlen nur die Hälfte in Ansatz bringen, da jedenfalls ebensoviel Sekundärstrahlen nach vorwärts wie nach rückwärts gehen.

Da jedenfalls nur aus sehr geringer Tiefe Sekundärstrahlen nach außen gelangen können, wird von der Intensität der auffallenden Röntgenstrahlen nur ein kleiner Teil für diese in Betracht kommen. Ist J_r die Intensität der Röntgenstrahlen pro Flächeneinheit, so ist in geringer Tiefe x die Intensität

$$J_r e^{-k_r x} = J_r(1 - k_r x).$$

$J_r k_r x$ ist also die absorbierte Menge Röntgenstrahlen. In der Schicht von der Dicke dx wird also $J_r k_r dx$ in Sekundärstrahlen verwandelt. Davon soll die Hälfte nach rückwärts gehen. Von den zwischen x und $x + dx$ erzeugten Sekundärstrahlen gelangt der Bruchteil $e^{-k_k x}$ nach außen; also von dieser Schicht

$$\frac{J_r}{2} k_r \, dx \, e^{-k_k x}.$$

Dies ist von 0 bis ∞ zu integrieren. Die Energie der austretenden Sekundärstrahlen ist also

$$\int_0^\infty \cdot \frac{J_r}{2} k_r\, d x \,.\, e^{-k_k x} = \frac{J_r}{2} \frac{k_r}{k_k},$$

also

$$\frac{J_s}{J_r} = \frac{1}{2} \frac{k_r}{k_k},$$

wo im Zähler J_r gegen J_s vernachlässigt ist.

Da das Absorptionsgesetz der Kathodenstrahlen sicher ein ganz anderes ist, so können wir nur eine rohe Annäherung an die Wirklichkeit erwarten.

Die Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen ist nach Dorn recht verschieden und infolgedessen ist auch die Absorption, die ja in hohem Maße von der Geschwindigkeit abhängt, unsicher.

Nimmt man nach den Beobachtungen von Seitz[1]) einen Absorptionskoeffizienten $k_k = 225000$ für Platin an, der der Geschwindigkeit $6{,}8 \,.\, 10^9$ nach Dorn[2]) ungefähr entsprechen würde, und für k_r nach Holtsmark 1000, so hätten wir für $J_s / J_r = 1/500$.

Die Beobachtungen der Sekundärstrahlen geschahen nach einer ähnlichen Methode wie die von Holtsmark.[3]) Die auf der Platinplatte aufgefangene positive Elektrizität wurde nach drei verschiedenen Methoden bestimmt. Einmal ging der Strom durch einen hohen Widerstand zur Erde und die stationäre Spannung wurde an einem Elektrometer abgelesen. Dann wurde die Spannung bestimmt, zu welcher ein Plattenkondensator von etwa 10^4 cm in bestimmter Zeit geladen wurde. Endlich wurde die Elektrizitätsmenge nach der von Harms[4]) angegebenen Methode bestimmt. Alle drei Bestimmungen führten zu übereinstimmenden Ergebnissen.

Es muß noch erwähnt werden, daß bei dieser Methode die Sekundärstrahlen zu messen, die von den Glaswänden der

1) W. Seitz, Ann. d. Phys. **6.** p. 1. 1901; **12.** p. 860. 1903; Physik. Zeitschr. p. 395. 1904.

2) E. Dorn, Jubelband für H. A. Lorentz, 1900.

3) G. Holtsmark, Ann. d. Phys. **10.** p. 522. 1903

4) F. Harms, Ann. d. Phys. **10.** p. 816. 1903.

Röhre ausgesandten Sekundärstrahlen teilweise das Platinblech treffen müssen und daher dessen positive Ladung verkleinern. Nach Curie und Sagnac sendet Glas diese Strahlen allerdings lange nicht in der Menge aus wie Platin. Es sollen jedoch besondere Versuche das Verhältnis des Emissionsvermögens von Platin zu Glas bestimmen.

Das Elektrometer war ein Dolezaleksches mit Bernsteinisolation der Quadranten. Von größter Wichtigkeit bei diesen Versuchen ist das Fernhalten der durch Röntgenstrahlen leitend gemachten Luft von allen mit dem Elektrometer verbundenen Metallteilen.

Bei einer Temperaturerhöhung des Kalorimeters von im Mittel 38° ergab sich ein Strom von $1 . 10^{-11}$ Amp. Setzen wir nach Dorn die Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen $6{,}8 . 10^9$, so entspricht das einer Energie von 1,24 Erg/sec oder $2{,}97 . 10^{-8}$ g-Kal./sec.

Andererseits war die Größe des Platinbleches, auf dem die Sekundärstrahlen erzeugt wurden, 42 qcm. Es befand sich in einer Entfernung von 31,8 cm von der Antikathode.

Ferner ist zu berücksichtigen, daß ein Teil der Röntgenstrahlen in der Wand der Sekundärstrahlröhre absorbiert wird. Um diesen Teil zu bestimmen, wurde die Röhre zwischen Thermosäule und Röntgenröhre gebracht. Es ergab sich, daß eine Wand der Röhre 75 Proz. der Strahlen hindurchläßt. Aus diesen Zahlen berechnet sich die Energie der auffallenden Röntgenstrahlen zu $1{,}6 . 10^{-5}$ g-Kal./sec, so daß das Verhältnis zur Sekundärstrahlung $E_r / E_s = 530$ wird.

Die Übereinstimmung mit dem aus den Absorptionskoeffizienten gefundenen ist natürlich eine rein zufällige, da wir ebensogut den Wert für den Absorptionskoeffizienten der Kathodenstrahlen anders hätten wählen können. Immerhin zeigt sich, daß die Annahme, alle Röntgenstrahlen verwandeln sich in Sekundärstrahlen, vorläufig mit den Tatsachen vereinbar ist.

Derartige Schlüsse zu ziehen wird man berechtigt sein, wenn man sich auf den zunächst natürlich erscheinenden Standpunkt stellt, daß die Energie der Sekundärstrahlen den Röntgenstrahlen entnommen wird.

Geht man aber auf den Mechanismus dieser Verwandlung näher ein, so zeigen sich bedeutende Schwierigkeiten, um ein-

zusehen, woher die große Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen stammt.

Wir können zunächst leicht die Geschwindigkeit berechnen, welche einem Elektron durch *eine* Röntgenwelle, die von der Bremsung *eines* Elektrons herrührt, erteilt wird.

Legen wir um den Erregungspunkt der Röntgenwelle eine Kugel mit dem Radius R, so ist, wenn wir das Elektron mit der anfänglichen Geschwindigkeit weiter gehen lassen, dieses um die Strecke $R(v/c)$ weitergegangen, bis die Welle die Kugel erreicht hat. Beziehen wir alles auf ein Koordinatensystem im Elektron, so ist jetzt die Gleichung der Kugel

$$\left(x + \frac{v}{c} R\right)^2 + \varrho^2 = R^2, \quad \varrho^2 = y^2 + z^2,$$

oder

$$x = R\left(\sin\vartheta - \frac{v}{c}\right),$$

$$\varrho = R\cos\vartheta.$$

Setzen wir diese Werte in meine Formeln[1]) ein, so erhalten wir für die Feldintensität

$$\mathfrak{E} = \sqrt{\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_\varrho^2} = \frac{a\,e\,b^2 k^2 \cos\vartheta}{R\left(1 - \frac{v}{c}\sin\vartheta\right)^3} = -\frac{j\,e\cos\vartheta}{c^2 R\left(1 - \frac{v}{c}\sin\vartheta\right)^3},$$

$$j = -a\,b^2 k^2 c^2.$$

Der Maximalwert für $\mathfrak{E}$ ergibt sich hieraus für unsere Zahlen

$$\mathfrak{E} = 0{,}102\,.$$

Diese Feldstärke wirkt beschleunigend auf ein Elektron nach der Gleichung

$$m\frac{d^2 x}{d t^2} = e\,\mathfrak{E},$$

woraus

$$v = \frac{e}{m}\,\mathfrak{E}\,\tau \text{ folgt}, \quad \tau = \frac{v_0}{j}.$$

Um den Maximalwert der erreichten Geschwindigkeit zu erhalten, müßten wir die Variation des Zeitintegrales von $\mathfrak{E}$ gleich Null setzen und hieraus ϑ und dann die für dieses ϑ erreichte Geschwindigkeit berechnen.

1) W. Wien, Ann. d. Phys. **13**. p. 655. 1904.

Für den vorliegenden Zweck genügt es vollständig, einen Mittelwert für $\mathfrak{E}$ anzunehmen, indem wir das Mittel aus dem größten Wert von $\mathfrak{E}$ und demjenigen nehmen, auf den $\mathfrak{E}$ an dieser Stelle sinkt, wenn $v = 0$ geworden ist, $\mathfrak{E} = 0{,}0256$. Dieser ist

$$\mathfrak{E} = 0{,}0638 .$$

Die von der Röntgenwelle einem Elektron mitgeteilte Geschwindigkeit ist hiernach

$$v = \frac{e}{m}\,\mathfrak{E}\,\frac{v_0}{j} = \frac{e}{m}\,\frac{\mathfrak{E}\,\lambda}{c},$$

woraus

$$v = 1{,}37 \,.\, 10^{-4}\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

folgt. Die Anzahl der in der Sekunde verzögerten Elektronen, durch welche die Röntgenwellen entstanden, war

$$N = \frac{E_k}{V e} = 7{,}2 \,.\, 10^{14} .$$

Damit durch Beschleunigung durch die Röntgenwellen die Geschwindigkeit $v = 10^9$ cm/sec erreicht werde, müßten die in 0,01 Sek. auffallenden Elektronen zusammenwirken.

Es ist daher ausgeschlossen, daß die Sekundärstrahlen durch direkte Beschleunigung durch die Röntgenwelle ihre Geschwindigkeit erhalten.

Aus diesem Grunde scheint mir auch nicht möglich zu sein, daß die Sekundärstrahlen aus den freien Elektronen im Metall, welche die Leitfähigkeit bedingen, entnommen werden.

Die einzige Möglichkeit, die großen Geschwindigkeiten der Sekundärstrahlen zu erklären, scheint mir in der Möglichkeit zu liegen, daß Elektronen im Atom im Zustande labilen Gleichgewichtes dadurch sich befinden, daß die Anziehung des positiven Atoms die Abstoßung negativer Elektronen nahe ausgleicht. Durch die Wirkung einer Anzahl aufeinander folgender Röntgenwellen, deren Wirkung ja immer in derselben Richtung erfolgt, kann ein Elektron mehr in die Abstoßungssphäre anderer Elektronen gedrängt werden, wodurch ein Hinausstoßen erfolgen muß.

Dann stammt allerdings die Energie der Sekundärstrahlen direkt aus der Atomenergie und wir wissen in diesem Fall nicht, ob die als Erwärmung gemessene Energie überhaupt

die Energie der Röntgenstrahlen ist.[1]) Denn der größte Teil der ausgesandten Sekundärstrahlen wird wieder absorbiert und würde eine Verwandlung der Atomenergie in Wärme bedeuten.

Eine derartige Energieabgabe der Atome würde eine Veränderung dieser nach sich ziehen müssen, die dem Verhalten der radioaktiven Stoffe analog wäre.

Möglich ist aber auch, daß die in den Atomen absorbierten Röntgenwellen die Energie der ausgesandten Sekundärstrahlen deckt, was die Unveränderlichkeit der Atomenergie gewährleisten und mit der oben ausgesprochenen Hypothese zusammenfallen würde.

Daß die große Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen etwa in den Elektronen der Atome vorhanden sein könnte, erscheint ebenfalls unmöglich. Eine einfache Rechnung zeigt nämlich, daß bei so großen Geschwindigkeiten, bei denen sich doch die Elektronen, um im Atom zu bleiben, auf sehr stark gekrümmten Bahnen bewegen müssen, eine so bedeutende Energieausstrahlung eintreten muß, daß die Bewegungsenergie in kurzer Zeit dadurch vernichtet wird.

Bei transversaler Beschleunigung j ist die während dt ausgestrahlte Energie

$$E = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3} j^2 \frac{dt}{k^4}\,.$$

Nehmen wir für das Elektron eine Kreisbahn an, in der es durch die anziehende Kraft eines gleich großen positiven Teilchens e gehalten wird,

$$\frac{v^2}{r} = \frac{e\,e_1}{m}\frac{1}{r^2}\,.$$

Während einer Umlaufsdauer T wird die Energie ausgestrahlt

$$E = \frac{2}{3}\frac{e^2 e_1^2}{c^3 m^2}\frac{1}{r^4}\frac{1}{k^4}\,T,$$

und weil

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\,r^3}{e\,e_1}}$$

ist

$$E = \frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{c^3 k^4}\sqrt{\frac{e^3 e_1}{m^3 r^5}}\,.$$

1) Es mag von diesem Standpunkt aus zweifelhaft erscheinen, ob auch die durch Lichtstrahlung erzeugte Wärme immer die Strahlungsenergie mißt oder ob auch hier Atomenergie mitwirkt, eine Auffassung, zu der man sich erst im äußersten Notfall bekennen wird.

Nehmen wir $r = 10^{-7}$ cm, so ist

$$T = 1{,}4 \,.\, 10^{-14} \quad \text{und} \quad v = 4{,}37 \,.\, 10^{7} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \,.$$

Aber schon bei dieser Geschwindigkeit beträgt die Ausstrahlung $1{,}5 \,.\, 10^{-20}$ Erg, also nahezu $1 \,.\, 10^{6}$ Erg in der Sekunde. Andererseits ist die Bewegungsenergie nur

$$\frac{m}{2} v^2 = 5{,}78 \,.\, 10^{-13} \text{ Erg.}$$

Würzburg, Phys. Institut, November 1905.

(Eingegangen 27. November 1905.)

6. Über Energie und spezifische Wärme in der Nähe der kritischen Temperatur; von Max Reinganum.

Es ist vielleicht von Interesse, die Resultate, welche sich für die Änderung der spezifischen Wärme mit dem Volumen nach den kalorimetrischen Versuchen von Hrn. Dieterici ergeben[1], mit denjenigen zu vergleichen, die sich thermodynamisch aus den vorliegenden Isothermenbestimmungen ableiten lassen.

Indem ich diesen Vergleich durchführe, benutze ich eine früher angewandte Darstellung der inneren Energie[2], durch welche die Änderung des Energieinhalts einer Flüssigkeit oder eines Gases mit Volumen und Temperatur übersichtlich dargestellt werden kann. Ich erlaube mir, auf diese Weise einen Auszug aus meiner Dissertation zu geben.

Wir definieren eine Größe a von der Bedeutung

$$a = \left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p\right) v^2, \tag{1}$$

wo T die absolute Temperatur, p den Druck und v das Volumen bezeichnet und a selbst noch Funktion zweier Variabeln, etwa des Volumens und der Temperatur sein kann.

Die Bezeichnung ist mit Rücksicht auf die von van der Waalssche Theorie gewählt. Legen wir nämlich für eine Flüssigkeit die Gleichung von van der Waals zugrunde

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{R\,T}{v - b} \tag{2}$$

mit konstanten Koeffizienten a, b und R, so müßte, wenn man den in (1) rechts stehenden Ausdruck bildet, dieser gleich der Konstanten a der Gleichung von van der Waals sein.

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 12. p. 154—185. 1903.

2) M. Reinganum, Theorie und Aufstellung einer Zustandsgleichung, Dissert. Göttingen 1899, p. 29—47.

Wenn wir daher (1) empirisch für möglichst viele Punkte der experimentell bekannten Isothermennetze bilden, erhalten wir in der Veränderlichkeit von a ein Maß für die Abweichungen von der van der Waalsschen Formel, und zwar in bezug auf die kalorischen Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen.

Die Konstante a hängt in folgender Weise mit der Energie zusammen. Bezeichnet U den Energieinhalt, und gehen wir von der Formel der Thermodynamik aus:

$$\frac{\partial U}{\partial v} = T \frac{\partial p}{\partial T} - p, \tag{3}$$

so ist wegen (1)

$$a = -\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{1}{v}\right)}. \tag{4}$$

Der Differentialquotient des Energieinhalts nach der Dichte sollte also nach der van der Waalsschen Theorie konstant sein, er ergibt sich aber, wie gezeigt werden soll, in der Nähe der kritischen Temperatur als merklich abhängig von v und T.

Differenziert man (3) nach der Temperatur, so folgt mit Rücksicht darauf, daß

$$\frac{\partial^2 U}{\partial v \, \partial T} = \frac{\partial c_v}{\partial v}$$

ist, wenn c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen bezeichnet, erstens die Formel der Thermodynamik

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = T \frac{\partial^2 p}{\partial T^2}, \tag{5}$$

und zweitens wegen (1) und (4)

$$\frac{\partial a}{\partial T} = T \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} v^2 = -\frac{\partial c_v}{\partial \left(\frac{1}{v}\right)}. \tag{6}$$

Die Einführung der Größe a, die über verhältnismäßig große Gebiete konstant ist, kommt also rein praktisch genommen darauf hinaus, daß man Differentialquotienten von U und c_v nach der Dichte statt solcher nach dem Volumen einführt.

Integration von (4) ergibt den Energieinhalt für das Volumen v und die Temperatur T zu:

$$U = \int_{\frac{1}{v}}^{0} a \, . \, d\left(\frac{1}{v}\right) + \int_{0}^{T} c_{\infty} \, . \, dT + C, \quad (7)$$ [1]

wo c_{∞} die spezifische Wärme bei konstantem Volumen in sehr großer Verdünnung und C eine Konstante bedeutet.

Ist a als Funktion des Volumens und der Temperatur bekannt und ferner die spezifische Wärme bei großer Verdünnung gemessen, so kann durch Differentiation von (7) nach der Temperatur auf die spezifische Wärme c_v für irgend einen Punkt der Isothermen geschlossen werden.

Im folgenden teile ich einen Teil der Resultate meiner früheren Berechnungen über die Veränderung von a mit dem Volumen mit, soweit sich diese Rechnungen auf die Nähe der kritischen Temperatur beziehen, und ergänze dieselben in bezug auf die Abhängigkeit von a von der Temperatur. Schließlich sei eine Beziehung zwischen a und $\partial a / \partial T$ mitgeteilt.

I. Die Abhängigkeit von a vom Volumen.

Den Berechnungen liegt das Material von Ramsay und Young, Amagat und Young zugrunde. Die Maßeinheiten der betreffenden Arbeiten sind beibehalten.

1. Äthyläther.[2]

v	$\left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p\right) v^2 . 10^{-3}$	v	$\left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p\right) v^2 . 10^{-3}$
300	5320	5,0	3047
250	6563	4,0	2656
200	6420	3,7	2534
150	6075	3,3	2414
100	5720	3,0	2366
50	5193	2,5	2487
30	4871	2,2	2590
20	4554	2,0	2691
10	3908		

1) Über diese Gleichung siehe G. Bakker (Zeitschr. f. phys. Chem. 18. p. 519. 1895) und W. Nernst (Theoretische Chemie, 4. Aufl., p. 241 bis 242. Stuttgart 1900).

2) W. Ramsay u. S. Young, Phil. Trans. 1887. p. 56.

Das Volumen ist in Kubikzentimeter pro Gramm, der Druck in Millimeter Quecksilber gemessen. Da die Autoren den Druck als lineare Funktion der Temperatur darstellen, so wird a übrigens unabhängig von der Temperatur, so daß über $\partial a / \partial T$ aus den Tabellen der Verfasser nichts ausgesagt werden kann. a ist wie durchgängig für große Volumina ziemlich konstant. Die Schwankungen fallen hier in die Grenze der Versuchsfehler. Das Mittel von a für die fünf größten Volumina ist 6021.10^3. *Mit kleiner werdendem Volumen nimmt a bis zu einem Minimumwert in der Nähe des Volumens 3,0 ccm ab, um bei noch kleineren Volumina wieder zu steigen.*

2. Kohlensäure nach Amagat.[1]

v	$\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right) v^2$
0,02385	0,01342
0,01636	0,01263
0,01300	0,01240
0,01000	0,01185
0,00768	0,01081
0,00578	0,00956
0,00428	0,00814
0,00316	0,00776
0,00250	0,00789
0,00200	0,00911
0,00187	0,00925

3. Äthylen nach Amagat.

v	$\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right) v^2$
0,16666	0,01325
0,011250	0,01301
0,008333	0,01066
0,006428	0,01018
0,005000	0,00919
0,004166	0,00888
0,003500	0,00939
0,003000	0,01057
0,002857	0,00995

Bei Kohlensäure und Isopentan ist das Volumen in Bruchteilen des Volumens bei 0° und Atmosphärendruck, der Druck in Atmosphären gemessen. Die Temperatur ist etwa 10° über der kritischen. Den Grenzwert von a erhält man graphisch, indem man a gegen $1/v$ aufträgt. Für kleine $1/v$ ist a eine nahezu gerade, gegen die Abszissenachse geneigte Linie. Die Grenzwerte ergeben sich auf diese Weise als Durchschnitt der Linie durch die Ordinatenachse zu 0,01440 für Kohlensäure und 0,01543 für Äthylen. *Auch bei diesen Substanzen zeigt sich ein Minimum,* welches nahe bei den Volumina 0,00316 und 0,004166 liegt.

1) Die klassische Untersuchung von Amagat ist zusammengestellt Ann. de phys. et chim. (6) **29**. p. 68—136 und p. 505—574. 1893.

4. Isopentan.[1])

v	$\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right)v^2 . 10^{-8}$	v	$\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right)v^2 . 10^{-8}$
∞	5100	5	3170
100	5000	4	2752
50	4900	3,6	2618
20	4600	3,2	2646
16	4467	3,0	2582
12	4257	2,8	2711
10	4128	2,7	2800
9	4077	2,6	2893
8	3950	2,5	3042
7	3772	2,4	3160
6	3533		

Die Einheiten sind dieselben wie bei Äthyläther. Die Temperatur ist 5 bis 10° über der kritischen. Die a-Werte sind bei den größeren Volumina graphisch ausgeglichen. *Es findet sich ebenfalls ein Minimum von a vor, daß ungefähr beim Volumen 3,2 ccm liegt.*

Bildet man das Verhältnis des Minimalwertes von a zu den Grenzwerten bei großen Volumina für die vier Stoffe, *so ergibt sich im Mittel nahe 0,50. a nimmt also mit wachsender Dichte bis auf die Hälfte seines Wertes bei großer Verdünnung ab, um dann wieder zu steigen.*[2])

Alle vier Substanzen gehorchen untereinander (namentlich gut Kohlensäure und Isopentan) dem Gesetz der korrespondierenden Zustände. Es ist daher zu erwarten, daß das Volumen, für das a ein Minimum hat, zum kritischen Volumen in konstantem Verhältnis steht. Dies ist in der Tat angenähert der Fall. Die kritischen Volumina der vier Substanzen sind in der oben benutzten Reihenfolge 3,801; 0,00426; ca. 0,00569 und 4,266. Nimmt man als Volumina, für die a seinen kleinsten Wert hat, 3,0; 0,00316; 0,004166 und 3,2, *so ist der Mittelwert derselben nahe das 0,75 fache des kritischen Volumens.*[3])

1) S. Young, Proc. of the Phys. Soc. of London p. 602. 1894—95; übersetzt: Zeitschr. f. phys. Chem. 29. p. 193—241. 1899. Letztere Arbeit ist im folgenden zitiert.

2) Es ist nicht sehr wahrscheinlich, daß a für sehr kleine Volumina wieder bis zu dem Wert bei großen Volumina ansteigt. Es wird vielmehr entweder einem kleineren Grenzwert zustreben, oder ein Maximum erreichen und dann wieder sinken. Einen Anhaltspunkt geben die Messungen von Amagat an Äthyläther, sowie an Gasen bei hohen Drucken.

3) Vgl. auch Dissertation p. 44.

Daß ein ähnlich wie durch (1) definiertes a starke Funktion des Volumens ist, wurde schon mehrfach bemerkt.[1] Dabei wurde jedoch stets der Druck als lineare Funktion der Temperatur angenommen und daher a unabhängig von der Temperatur gesetzt.

II. Abhängigkeit von a von der Temperatur und thermodynamische Berechnung der spezifischen Wärme c_v.

Die Veränderung von a mit der Temperatur ist nach (6) durch den zweiten Differentialquotienten des Druckes nach der Temperatur gegeben.

Aus allen zuverlässigeren Beobachtungen an normalen Stoffen geht hervor, daß für große Volumina $\partial p / \partial T$ mit *wachsender Temperatur abnimmt.*[2] Diese Verhältnisse ändern sich jedoch in der Nähe des kritischen Volumens.

Einen Überblick über die Veränderung von $\partial p / \partial T$ mit der Temperatur ergeben die Zusammenstellungen von Amagat über $\partial p / \partial T$ für Kohlensäure und Äthylen p. 131 der zitierten Arbeit.

Es zeigt sich zunächst, daß bei großen Volumina $\partial p / \partial T$ mit steigender Temperatur abnimmt, also $\partial^2 p / \partial T^2$ negativ ist. Das kleinste Volumen, bis zu dem dies deutlich der Fall ist, liegt in der Nähe des kritischen und beträgt 0,00578 bei Kohlensäure und 0,008333 bei Äthylen. In der Nähe dieses Volumens ist $\partial^2 p / \partial T^2$ Null, *unterhalb desselben positiv*; doch erreicht der Wert nur ein Maximum. Denn bei den kleinsten Volumina 0,00200 und 0,00187 bei Kohlensäure, 0,00300 und 0,00286 bei Äthylen sind Änderungen von $\partial p / \partial T$ mit der Temperatur in bestimmtem Sinn nicht zu konstatieren.

Bei Temperaturen viel höher als die kritische (100 bis

---

1) Vgl. z. B. Rose-Innes, Phil. Mag. **44.** p. 76. 1897.

2) Hierauf dürfte auch einer der Vorzüge der Clausiusschen Gleichung

$$p = \frac{R T}{v - \alpha} - \frac{c}{T (v + \beta)^2}$$

als *Interpolations*gleichung bestehen, daß sie für $\partial^2 p / \partial T^2$ einen negativen Wert ergibt, während diese Größe nach der Gleichung von van der Waals Null ist. Auch ergibt die Clausiussche Gleichung für

$$a = \left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p\right) v^2$$

mit größer werdender Dichte abnehmende Werte. Sie kann jedoch keinesfalls mehr in der Nähe des kritischen Volumens Gültigkeit haben, da a in Wirklichkeit nur bis zu einem Minimum abnimmt und sich das Vorzeichen von $\partial^2 p / \partial T^2$ umkehrt. Beides ergibt sich nicht aus der Clausiusschen Gleichung.

240° C.) scheint dagegen $\partial^2 p / \partial T^2$ bis zu kleineren Volumina negativ zu sein. Doch ist es schwer zu entscheiden, wie weit hier Beobachtungsfehler in Frage kommen.

Im ganzen könnten nämlich unsere Schlüsse sehr unsicher sein, da $\partial^2 p / \partial T^2$ nur auf Grund äußerst genauer Versuche festgestellt werden kann, und da diese Größe nach den Beobachtungen von Amagat im einzelnen tatsächlich sehr großen Schwankungen unterliegt.

Daß aber die Tabellen von Amagat im ganzen das richtige Bild geben, geht daraus hervor, daß sich derselbe Gang von $\partial^2 p / \partial T^2$ aus den Resultaten von Young über Isopentan ergibt, und zwar hier mit großer Regelmäßigkeit und Sicherheit. Auf diesen Gang hat auch Hr. Young selbst aufmerksam gemacht. Einen Überblick gibt die Tabelle der $\partial p / \partial T$-Werte p. 229—231 der zitierten Arbeit.

Die Resultate von Young lassen sich nun zur Prüfung der thermodynamischen Beziehung (5) verwenden, da die kalorimetrischen Bestimmungen von Hrn. Dieterici über c_v vorliegen. Allerdings wird man bei der Unsicherheit der Isothermenmethode einerseits und der kalorimetrischen Bestimmungen in der Nähe des kritischen Punktes andererseits keine ganz quantitative Übereinstimmung erwarten können.

Um den Vergleich mit den Daten von Hrn. Dieterici durchzuführen, wurde auf die Zusammenstellung der p-Werte bei Young p. 226—227 zurückgegangen und $\partial^2 p / \partial T^2$ durch Differenzenbildung mit Benutzung von möglichst gleichmäßigen Temperaturintervallen bestimmt.

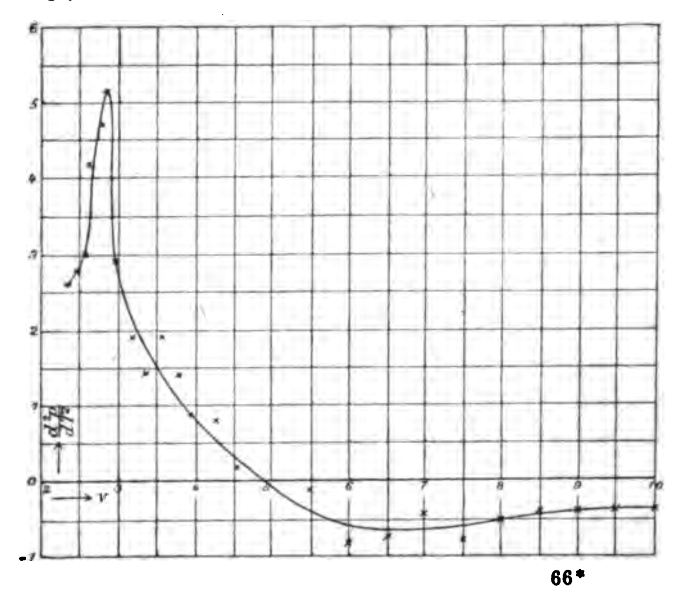
Die Berechnung wurde nur vom Volumen 2,4 bis 10 ccm durchgeführt, da für größere Volumina die Bestimmung von $\partial^2 p / \partial T^2$ sehr unsicher wird.[1]) Auch läßt sich für größere Volumina der Vergleich mit den kalorimetrischen Daten nicht mehr durchführen, da sich die Bestimmungen von Hrn. Dieterici auf die Sättigungskurve beziehen und die Temperaturdifferenzen gegenüber unseren Werten, die sich auf eine 0 bis 10° über der kritischen gelegene Isotherme beziehen, zu groß würden.

1) Für große Volumina läßt sich $\partial^2 p / \partial T^2$ aus der im folgenden aufgestellten Beziehung (8) schätzen, ferner auch aus dem Temperaturverlauf der mit A bezeichneten Größe meiner Arbeit: Beitrag zur Prüfung einer Zustandsgleichung schwach komprimierter Gase (Ann. d. Phys. **6**. p. 549. 1901).

In der folgenden Tabelle sind die Volumina, die angewandten Temperaturdifferenzen und die hieraus interpolierten Werte von $\partial^2 p / \partial T^2$ zusammengestellt. Größere Unsicherheit haben die Werte bei 3,2 und 3,0 ccm. Bei anders gewählten Temperaturdifferenzen fallen dieselben erheblich verschieden aus.

v	Temperatur in ° C.	$\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}$	v	Temperatur in ° C.	$\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}$
10	220—200—180	−0,365	4,6	210—200—190	+0,20
9,5	" " "	−0,375	4,3	" " "	+0,80
9,0	" " "	−0,400	4,0	" " "	0,90
8,5	" " "	−0,400	3,8	" " "	1,40
8,0	" " "	−0,475	3,6	" " "	1,90
7,5	210—200—190	−0,80	3,4	220—210, 200—190	1,45
7,0	" " "	−0,40	3,2	" "	1,90
6,5	" " "	−0,70	3,0	185—195—205	2,90
6,0	" " "	−0,80	2,9	185—190—195	5,20
5,5	" " "	−0,10	2,8	180—190—200	4,70
5,0	" " "	−0,10	2,7	" " "	4,10
			2,6	" " "	3,00
			2,5	170—185—200	2,76
			2,4	170—180—190	2,60

Die Werte von $\partial^2 p / \partial T^2$, die eine genügend kontinuierliche Reihe bilden, sind in der folgenden Figur zu einer Kurve vereinigt, in der v die Abszissenachse bildet.



Zur Integration der Gleichung (5) wurde für $v = 2,4$ bis 5 ccm die Temperatur konstant zu 463°, von 5 bis 10 ccm zu 473° abs. angenommen. (Die kritische Temperatur beträgt 460,8° abs.) Die Integration wurde graphisch vorgenommen. Die Kurve der Figur wurde durch Parallelen zur Ordinate bei 2,4; 2,6; 3,0; 3,5; 4,26; 5,0; 6,5; 8,0; 10,0 ccm in Stücke zerlegt und der Inhalt der Teilflächen mittels Polarplanimeters bestimmt. Sämtliche Messungen mit dem Polarplanimeter wurden mehrfach ausgeführt.

Da man

$$c_{v_2} - c_{v_1} = T \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} d v$$

in Millimeter Quecksilber × Kubikzentimeter erhält, so ist mit 3,191 . 10^{-5} zu multiplizieren, um die Differenz der spezifischen Wärmen für die einzelnen Punkte in Grammkalorien zu erhalten.[1])

Die folgende Zusammenstellung enthält das berechnete c_v erstens, wenn der Wert dieser Größe für $v = 2,4$ ccm gleich Null gesetzt wird, zweitens wenn derselbe für dieses Volumen in Übereinstimmung mit Hrn. Dieterici gewählt wird. In der letzten Kolumne sind die (interpolierten) experimentellen Daten von Hrn. Dieterici enthalten. Die nach Gleichung (6) aus den Isothermen erhaltenen Werte von $\partial a / \partial T$ sind in der Tabelle p. 1018 unter beobachtet enthalten.

v	$c_v - c_{v=2,4}$	c_v ber.	c_v beob.
2.4	0	0.598	0,598
3,0	0,034	0,632	0,662
3,5	0,049	0,647	0,691
4,26	0,059	0,657	0,710
5,0	0,064	0,662	0.701
6,5	0,056	0,654	0,676
8,0	0,043	0,641	0,659
10,0	0,032	0,630	0,634

1) Hierbei ist die Literatmosphäre zu 24,25 g-Kal. gesetzt. Vgl. W. Nernst, Theoretische Chemie, 4. Aufl., p. 13. Stuttgart 1903.

Es ergibt sich also zwischen $v = 2{,}4$ und 10 ccm sowohl nach der Isothermen- wie nach der kalorimetrischen Methode ein Maximum für c_v.

Die Größe des Maximums ist beträchtlich verschieden. Es kann dies sowohl in Fehlern der Isothermenbestimmungen wie in der kalorimetrischen Methode begründet sein, da letztere die spezifische Wärme in der Nähe des kritischen Punktes keinesfalls genauer als auf 6—7 Proz. zu bestimmen gestattet.

Bemerkenswert ist, daß für $v = 10$ ccm Berechnung und Beobachtung wieder sehr gut miteinander übereinstimmen, was für die Isothermenmethode spricht, da bei ihr die Unsicherheiten in der Nähe des kritischen Volumens fortfallen.

Übrigens kann eine Differenz zwischen Berechnung und Beobachtung auch daher rühren, daß sich die spezifischen Wärmen nach Hrn. Dieterici auf die Temperaturen der Sättigungskurve, die hier erhaltenen auf konstante Temperatur etwas über der kritischen beziehen. Doch sind die Temperaturdifferenzen für die benutzten Volumina nicht zu groß.

Die Übereinstimmung in der Größenordnung kann jedenfalls als schöne Bestätigung für die Zuverlässigkeit der Youngschen Messungen angesehen werden.

III. Empirische Beziehung zwischen a und $\partial a / \partial T$.

Wie aus der zweiten und dritten Kolumne der folgenden Tabelle hervorgeht, ist $\partial a / \partial T$ beob. am stärksten negativ für die größten Werte von a, am stärksten positiv nahe beim Minimum von a. *Man kann hieraus schließen, daß bei höherer Temperatur als der kritischen a in dem betrachteten Gebiet immer unabhängiger vom Volumen wird, d. h. die Annahme von van der Waals immer besser erfüllt wird.*[1])

Es zeigt sich, daß angenähert die Beziehung erfüllt ist:

$$a + k \frac{\partial a}{\partial T} = \text{Konst.}, \tag{8}$$

worin k 48,7 und Konst. $3286 \,.\, 10^3$ beträgt.

---

1) Bei den Gasen zeigt sich a in der Tat bis zu kleinen Volumina viel besser konstant.

v	$a \cdot 10^3$ beob.	$\frac{\partial a}{\partial T}$ beob.	$a \cdot 10^3$ ber.	$\frac{\partial a}{\partial T}$ ber.
2,4	3160	4500	3193	1910
2,5	3042	8400	3046	4930
2,6	2893	9390	2921	7490
2,8	2711	17050	2729	11700
3,0	2582	16900	2611	13860
3,2	2646	10170	2569	14730
3,6	2518	9185	2647	13120
4,0	2752	6810	2805	9880
5	3170	120	3223	1294
6	3533	− 7660	3534	− 5090
7	3772	−13920	3765	−10060
8	3950	−14400	3942	−13470
9	4077	−15310	4081	−16320
10	4128	−17300	4192	−18600

Bedeutend genauer würde diese Beziehung gelten, wenn das Maximum von $\partial a / \partial T$ genau auf das Minimum von a als Funktion des Volumens fallen würde. Dies ist jedenfalls möglich, da durch Unsicherheiten des Experimentes oder der Berechnung die beiden betrachteten Punkte etwas gegeneinander verschoben sein können. Wir entfernen uns daher von den Beobachtungen jedenfalls wenig, wenn wir annehmen, daß die Gleichung (8) in dem betrachteten Gebiete genau erfüllt ist. Legen wir dieselbe zugrunde, so erhalten wir, wenn die beiden Konstanten unabhängig von der Temperatur gesetzt werden, als allgemeinstes Integral der Gleichung (8):

$$(9) \qquad a = f(v)\, e^{-\frac{T}{k}} + \text{Konst.},$$

wo $f(v)$ als Volumfunktion so zu bestimmen ist, daß den Beobachtungen genügt wird. Unter der Annahme, daß die a-Werte, gegen $1/v$ aufgetragen, auf einer Hyperbel liegen, deren Scheitelpunkt der Minimumwert von a bildet, bestimmte ich $f(v)$ zu:

$$(10) \qquad f(v) = 5{,}544 \cdot 10^{10} \sqrt{1 - \frac{6{,}164}{v} + \frac{9{,}943}{v^2}} - 2{,}356 \cdot 10^{10},$$

wo das positive Zeichen der Wurzel zu nehmen ist.

Aus (9) und (10) ergeben sich die in der Tabelle unter berechnet stehenden Werte von a und $\partial a / \partial T$. In diesen Zahlen ist also die Gültigkeit der Beziehung (8) enthalten. Es ist wohl von Interesse, daß man die noch fast gar nicht untersuchten Größen a und $\partial a / \partial T$ wenigstens angenähert durch eine Formel verknüpfen kann.

Für U ergibt sich durch Integration der Ausdruck:

$$(11)\quad \begin{cases} U = -\dfrac{3,286\,.\,10^6}{v} \\ + \dfrac{2,356\,.\,10^{10}\, e^{-\frac{T}{k}}}{v}\left[1 - 2,353\left(\dfrac{1-0,3100\,v}{2\,v}\sqrt{1-\dfrac{6,164}{v}+\dfrac{9,948}{v^2}}\right.\right. \\ \left.\left. + 0,007\,080 \ln\left(\dfrac{3,153}{v} - 0,9775 + \sqrt{1-\dfrac{6,164}{v}+\dfrac{9,943}{v^2}}\right)\right)\right] \\ + \displaystyle\int_0^T c_\infty\, d\,T + C. \end{cases}$$

Es lassen sich jedoch auch einfachere Ausdrücke für $f(v)$ finden, die ungefähr dasselbe leisten.[1])

Differenziert man (7) bez. (11) nach der Temperatur, so muß man die spezifische Wärme c_v für ein beliebiges Volumen erhalten, falls c_∞ bekannt ist. Über die spezifischen Wärmen verdünnter Dämpfe namentlich in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur wären Beobachtungen sehr zu wünschen.

Die Kenntnis von U machte ich zum Ausgangspunkt beim Versuch, eine Zustandsgleichung zu begründen. Ich möchte jedoch hierauf nicht eingehen, sondern ich wollte nur diejenigen kalorimetrischen Eigenschaften zusammenstellen, die sich einerseits aus dem vorliegenden Isothermenmaterial, andererseits aus den Versuchen von Hrn. Dieterici ergeben, ohne gastheoretische Schlüsse in dieser Arbeit ziehen zu wollen.

---

1) So kann man setzen:

$$f(v) = 2,996\,.\,10^{10}\left(1 - \frac{5,1}{v} + \frac{210}{v^6}\right)$$

und hieraus

$$U = -\frac{3,286\,.\,10^6}{v} - \frac{2,996\,.\,10^{10}}{v}\left[1 - \frac{2,55}{v} + \frac{30}{v^6}\right] e^{-\frac{T}{48,7}} + \int_0^T c_\infty\, d\,t + C$$

ein Ausdruck, der jedoch für kleinere Volumina als die hier betrachteten bald zu große Werte annehmen würde. Vgl. ferner eine Darstellung von U durch einen anderen Exponentialausdruck Diss. p. 99 u. 107, wo für jeden Körper nur drei unabhängige Konstanten eingeführt sind.

(Eingegangen 22. Oktober 1905.)

7. *Über eine an dünnen halbleitenden Schichten beobachtete Erscheinung;*
von H. Greinacher.

Zweite Mitteilung.

---

1. Neulich ist über eine Erscheinung berichtet worden, die unter besonderen Umständen an Gaszellen beobachtet werden kann.[1]) Der Grundversuch war folgender: Es wurden zwei schmale Metallplättchen, wovon das eine mit Radiotellur belegt war, in eine Glasröhre eingeschmolzen, so daß sie sich in ca. 2 mm Distanz gegenüberstanden. In eine Erweiterung des Gefäßes wurde etwas P_2O_5 gebracht. Nachdem darauf die Röhre abgeschmolzen und sodann $^1/_2$ bis $1^1/_2$ Stunden auf ca. 140—170° erhitzt worden war, ließ sich zunächst in Übereinstimmung mit früheren Versuchen[2]) nachweisen, daß die elektromotorische Kraft der Gaszelle durch die Entfernung der Feuchtigkeit verschwunden war. Wenn man nun an die Metallstreifen z. B. 110 Volt anlegte, so daß während einiger Zeit ein polarisierender Strom durch die Zelle ging, zeigten die Metalle nachher ganz erhebliche Potentialdifferenzen, bis zu 60 Volt. Eine Reihe von Versuchen ließ erkennen, daß diese Erscheinung ihre Ursache sehr wahrscheinlich in einer äußerst dünnen Schicht von P_2O_5 hatte, die durch das Erhitzen an die Metalle hin sublimiert war.

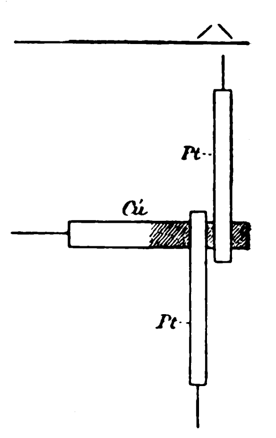
Um dies nachzuweisen, war insbesondere folgender Versuch unternommen worden: In eine Glasröhre wurden in der früheren Anordnung die Elektroden eingeschmolzen. Die Erweiterung aber, die zur Aufnahme des P_2O_5 dienen sollte, wurde erst am Ende eines kurzen, engeren Verbindungsrohres angeschmolzen. Nach Einbringen des P_2O_5 und Abschmelzen erhitzte man die Röhre zunächst in der früheren Weise, worauf

1) H. Greinacher u. K. Herrmann, Ann. d. Phys. **17.** p. 922. 1905.

2) H. Greinacher, Ann. d. Phys. **16.** p. 708. 1905.

sich nach Abkühlung die „Aufladeerscheinung“ nachweisen ließ. Nun wurde der die Zelle enthaltende Glasteil allein erhitzt, um das P_2O_5 wieder von den Metallen wegzusublimieren. Damit sollte dann auch die Möglichkeit einer Aufladung verschwinden. Die seinerzeit in dieser Richtung ausgeführten Versuche hatten jedoch keine entscheidenden Resultate geliefert, und schien es daher von Interesse, die Versuche nochmals zu wiederholen.

2. Die Ausführung war folgende: In eine Glasröhre wurden die Elektroden, ein mit Radiotellur belegter Kupferstreifen (Cu) und zwei Platinbleche eingeschmolzen. Die Anordnung derselben wurde wie bei den früher beschriebenen „Sondenversuchen“ gewählt (vgl. Figur). Man hatte so die Möglichkeit, die beiden Platinstreifen als Elektroden zu benutzen, während das Radiotellurpräparat nur zur Ionisierung des zwischenbefindlichen Gases diente. Diese Anordnung sollte insbesondere ermöglichen, festzustellen, ob der Versuch eventuell nur mit Edelmetallen gelingt (l. c.). Der die Elektroden enthaltende Teil der Glasröhre war durch ein ca. 10 cm langes, engeres Röhrenstück von der mit P_2O_5 beschickten Erweiterung getrennt. Das Erhitzen der Röhre geschah in einem chemischen Verbrennungsofen. Nachdem man eventuell wiederholt erhitzt hatte, wurde festgestellt, in welchem Maße die Platinbleche sich aufladen ließen. Um sodann die hinsublimierte P_2O_5-Schicht wieder wegzubringen, wurde der die Zelle enthaltende Teil der Glasröhre im Verbrennungsofen allein erhitzt, indem man das mit P_2O_5 gefüllte Ende herausragen ließ. In welcher Weise die Aufladung sich danach verändert zeigte, ist aus den unten angeführten Zahlen zu ersehen.



Bemerkt sei, daß, wie früher, die Potentialdifferenzen und Stromstärken mit einem Dolezalekschen Elektrometer nach seinerzeit beschriebenen Nullmethoden (l. c.) gemessen wurden. Die Empfindlichkeit des Instrumentes (Siliciumbronzedrahtaufhängung) war bei einer Ladebatterie von 200 Wasser-

elementen und einem Skalenabstand von 6,5 m ca. 360 mm pro Volt. Zum „Aufladen“ wurde eine Zink–Kohle–Salmiak-Batterie von 40 Elementen benutzt, die zuerst 50 Volt und später noch 40 Volt aufwies.

Eine der ausgeführten Versuchsreihen möge hier etwas ausführlicher folgen. Es ergab sich nach Abschmelzen der Röhre

$$Pt_1 / Pt_2 = - 0{,}03 \text{ Volt.}$$

Nachdem die Röhre 1 Stunde auf ca. 190° erhitzt und diese Operation bei etwas höherer Temperatur wiederholt worden war (220—240°), wurde versucht, die Zelle (Pt_1, Pt_2) aufzuladen. Es zeigte sich, daß die Spannung nach 24 Stunden bloß — 0,60 Volt betrug. Nun wurde die Glasröhre nochmals 1 Stunde auf 230—250° erhitzt, nachdem einige Körnchen P_2O_5 in den Glasteil, in welchen die Metallstreifen hineinragten, geschüttelt worden waren. Nach Abkühlen zeigten die Streifen zunächst eine Spannung

$$Pt_1 / Pt_2 = + 0{,}10 \text{ Volt.}$$

Sodann wurde 16 Stunden aufgeladen (Pt_2: Anode, Stromstärke $0{,}8 . 10^{-10}$ Amp.), worauf sich nun eine Spannung von

$$Pt_1 / Pt_2 = - 7{,}1 \text{ Volt}$$

ergab. Selbst nach 35 Min. betrug sie noch —4,9 Volt. Die Bildung einer dünnen P_2O_5-Schicht war offenbar durch das Hinüberschütteln von etwas P_2O_5 begünstigt worden, worauf dann eine beträchtliche Aufladung entstehen konnte. Daß diese hier wie im folgenden nicht dieselbe Größe wie bei den früher mitgeteilten Versuchen erreichen konnte, liegt zum Teil wohl an der geringeren angelegten Potentialdifferenz (40 bis 50 Volt, statt wie früher 110 Volt).

Nun folgte das Abdestillieren des P_2O_5 von den Metallen während ca. 1 Stunde, wobei im Verbrennungsofen 330—350° gemessen wurden. Nach Abkühlen war

$$Pt_1 / Pt_2 = + 0{,}04 \text{ Volt.}$$

Nach $16^1/_2$ stündigem Aufladen (Pt_2 : Anode, $0{,}5 . 10^{-10}$ Amp.) betrug die Spannung

$$Pt_1 / Pt_2 = - 0{,}52 \text{ Volt.}$$

Die Aufladeerscheinung war also merklich verschwunden. Dasselbe ergab sich auch, als man die Streifen (Pt_1, Cu') aufzuladen versuchte. Nach 24 Stunden (Cu': Anode, $0{,}8 \,.\, 10^{-10}$ Amp.) war

$$Pt_1 / Cu' = - 0{,}52 \text{ Volt.}$$

Nachdem die ganze Röhre von neuem erhitzt worden war (1 Stunde 220—240°), konnten auch wieder beträchtliche Aufladespannungen erzielt werden. Es ergab sich nach $17\,^1/_4$ Stunden (Pt_2: Anode, $0{,}6 \,.\, 10^{-10}$ Amp.) eine Endspannung von

$$Pt_1 / Pt_2 = - 8{,}9 \text{ Volt.}$$

Auch die Kombination (Cu', Pt_2) ließ sich wieder aufladen; nach $16\,^1/_2$ Stunden ($0{,}7 \,.\, 10^{-10}$ Amp.) bis auf

$$Pt_2 / Cu' = - 9{,}4 \text{ Volt.}$$

Daß die Aufladung an beiden Metallen in gleichem Grade erfolgt war, wurde mit Hilfe der Elektrode Pt_1 nachgewiesen. Es ergab sich, daß die Spannungen Pt_2 / Pt_1 und Pt_1 / Cu' ziemlich gleich waren.

In der früheren Weise wurde nun das P_2O_5 von den Metallen wieder entfernt (Temperatur im Verbrennungsofen 340—350°). Damit verschwand dann ebenfalls die Aufladeerscheinung. Denn Pt_1 / Pt_2 zeigte nach 16 Stunden ($0{,}4 \,.\, 10^{-10}$ Amp.) nur

$$Pt_1 / Pt_2 = 0{,}50 \text{ Volt.}$$

Ebenso ließ sich auch (Cu', Pt_2) nicht mehr aufladen. Hier betrug die Spannung nach 47 Stunden (Cu': Anode) kaum

$$Pt_2 / Cu' = - 0{,}16 \text{ Volt.}$$

Während der ganzen Versuchsreihe hatten die Platinstreifen ihr Aussehen nicht verändert, insbesondere konnte von hinsublimiertem P_2O_5 nichts bemerkt werden; der Cu'-Streifen wurde jedoch durch das Erhitzen schwarz und schien außerdem nach dem Gesamterhitzen der Röhre mit feinen Bläschen überzogen. Der Versuch gelang jedoch sowohl mit Pt als mit Cu', so daß die früheren Versuche dieser Art wahrscheinlich nicht infolge Verwendung oxydabler Metalle ohne entscheidende Ergebnisse geblieben sind. Auch scheint wohl dafür eine etwaige Verschiedenheit des käuflichen P_2O_5 (das

früher benutzte P_2O_5 war von C. A. F. Kahlbaum, das neuere von Dr. Bender und Dr. Hobein bezogen) von nennenswerter Bedeutung nicht zu sein. Vielmehr war bei den neueren Versuchen das Verbindungsstück länger wie früher gewählt worden. Die Metalle waren dann vor dem Hinsublimieren des P_2O_5 schon gut getrocknet, weshalb das Wegsublimieren der Schicht besser gelang.

Nach den mitgeteilten Versuchen scheint es nun unzweifelhaft, daß die Aufladung an das Vorhandensein einer dünnen P_2O_5-Schicht gebunden ist, und daß also eine vollkommene Analogie besteht zwischen dieser und der an dünnen Schellackschichten beobachteten Erscheinung (l. c.).

3. Es ist bereits in der letzten Arbeit der Vermutung Ausdruck gegeben worden, daß die Aufladeerscheinung eine Folge des durch die halbleitende Schicht gehenden Stromes sei. Man könnte aber auch versuchen, die Versuche dadurch zu erklären, daß man die dünnen P_2O_5-Schichten als Dielektrika zweier Kondensatoren mit den Metallen bez. der ionisierten Luft als Belegungen auffaßt. Wird an die Metallstreifen eine Potentialdifferenz angelegt, so laden sich die Kondensatoren auf, jedoch nur langsam, da die Leitfähigkeit der Luft eine begrenzte ist. Aus dem gleichen Grunde erfolgt nach Kurzschließen der Zelle die Entladung nur allmählich. Es macht daher der Ladungs- bez. Entladungsstrom den Eindruck eines Leitungsstromes. Die in den Kondensatoren aufgespeicherte Elektrizitätsmenge kann beträchtlich sein, da die Kapazitäten infolge der geringen Dicke der Isolatorschichten erheblich sein können. Es wäre auch zu verstehen, daß, wie seinerzeit bemerkt wurde (l. c.), die Stromstärke vor und nach dem Erhitzen mit P_2O_5 nicht merklich verschieden ist. Die Stromstärke sowohl vorher als nachher ist durch die Elektrizitätsmenge, welche die ionisierte Luft durchfließt, gegeben. Da nun an den der Luft zugewendeten Seiten der P_2O_5-Schichten zu Beginn der Aufladung diejenige Potentialdifferenz wirkt, welche an die Metalle angelegt wird, so ist der Elektrizitätstransport durch die ionisierte Luft ebenso groß, wie ohne Isolatorschicht.

Man kann also mit Hilfe der Kondensatorvorstellung die beobachteten Erscheinungen zu erklären versuchen, und zwingen

die Versuchsergebnisse zunächst nicht zur Annahme, daß die Aufladung die Folge eines durch die schlecht leitende Schicht gehenden Stromes ist. Die im folgenden mitgeteilten Versuche sind nun dazu ausgeführt, zur Entscheidung dieser Frage beizutragen.

4. Da nach der Kondensatoranschauung die Aufladung deshalb nur allmählich verschwindet, weil die Leitfähigkeit der Luft zwischen den Metallen eine beschränkte ist, so mußte man eine augenblickliche Entladung erwarten, falls man die beiden Seiten der Schellackschicht *metallisch* miteinander verband. Der Versuch wurde so ausgeführt, daß man zunächst auf einem Stück Weißblech alkoholische Schellacklösung verdunsten ließ. Der dünnen Schellackschicht stellte man nun ein Radiotellurpräparat von 3,6 cm² Oberfläche gegenüber, worauf in der früheren Weise aufgeladen wurde (Cu′ : Anode; $0{,}5 \cdot 10^{-9}$ Amp.). Nachdem die Endspannung von 11,5 Volt erreicht war, wurde sodann versucht, den Kondensator dadurch zu entladen, daß man das mit Schellack belegte Blech erdete und die Schellackschicht mit geerdetem Stanniol abwischte. Es ergab sich, daß die Spannung dadurch nicht verschwand, daß vielmehr die Aufladespannung in merklich derselben Weise abnimmt, ob man mit geerdetem Stanniol abwischt oder die Zelle nach dem Aufladen sich selbst überläßt.

Danach schien es möglich zu sein, auch eine Aufladung zu erzielen, wenn man direkt an die dünne Schicht zwei Belegungen nach Art eines dünnschichtigen Kondensators anlegte. Ein Stück Weißblech wurde auf die angegebene Weise mit einer Schellackschicht überzogen. Durch Wägung wurde festgestellt, daß die mittlere Dicke der Schicht, wenn man das spezifische Gewicht des gegossenen Schellacks, das zu 1,14 bestimmt wurde, nimmt, 0,0060 cm war. Auf den Schellacküberzug wurde nun ein Stanniolstreifen mit einem heißen Blech aufgebügelt. Wurde jetzt an die beiden Belegungen die Spannungsbatterie angelegt, so zeigte sich zunächst, daß der Aufladestrom so stark war, daß er elektrometrisch bei Verwendung von 1 Mikrof. nicht mehr zu messen war ($> 10^{-7}$ Amp.). Während vor dem Aufladen die Spannung Sn/Sn* (Sn* = Weißblech) beinahe Null war, ergab sich nach 19stündigem Stromdurchgang Sn/Sn* = — 0,88 Volt. Wenn hier diese Spannung

einer Aufladung im früheren Sinne zugeschrieben werden durfte, so war sie jedenfalls sehr klein. Die Endspannung wuchs zwar mit der Zeit stetig. Zwei Tage nach Herstellung des Kondensators war sie 1,46 Volt, nach drei Tagen 1,74, nach vier Tagen 1,90, bis sie nach sieben auf den von da an konstant bleibenden Wert 2,1 Volt gestiegen war. Während sich zwar die Aufladespannung nur als gering herausstellte, war die aus der Schellackzelle zu entnehmende Elektrizitätsmenge sehr bedeutend; denn beim Anlegen an ein Galvanometer ergab sich ein Entladungsstrom von 4,8 . 10^{-8} Amp.

Da nun aber die Aufladespannung die Größenordnung von Polarisationsspannungen in galvanischen Elementen nicht überschritt, so konnte die Erscheinung möglicherweise einer Polarisation an den Belegungen zugeschrieben werden. Um darüber etwas zu erfahren, wurde der Versuch unternommen, eine Zelle mit Quecksilberbelegungen zunächst aufzuladen, nach Messung der Aufladespannung die Belegungen auszuwechseln und wieder zu messen. Die zu diesem Versuch nötige dünne Schellackschicht wurde auf folgende Weise hergestellt. Auf einem Stanniolblatt wurde Schellacklösung verdunstet, worauf die unbelegte Stanniolseite bis auf eine kleine Kreisfläche von 1,1 cm Durchmesser mit Paraffin belegt wurde. Indem man das noch freibleibende Stanniol mit Salpetersäure auflöste, erhielt man eine dünne Schellackschicht, deren mittlere Dicke durch Wägung zu 0,003 cm festgestellt wurde. Die Belegungen wurden nun dadurch gebildet, daß man Quecksilber in die Paraffinöffnung goß und das ganze wiederum auf Quecksilber legte, das die Ausbohrung eines Paraffinklötzchens bis oben ausfüllte. An die Belegungen wurde dann die Batterie zum Aufladen angelegt.

Nachdem der Strom (0,6 . 10^{-8} Amp.) 19 Stunden durchgegangen war, wurde die Abnahme der Aufladung verfolgt. Es zeigte sich, daß ihr Verlauf sich nicht änderte, falls man die Quecksilberbelegungen erneuerte. Die im folgenden mitgeteilte Messungsreihe möge dies zeigen. Die mit * bezeichneten Messungen wurden nach Erneuerung der Belegungen ausgeführt. Die Zeichen + und − beziehen sich auf das Vorzeichen der am Elektrometer gemessenen Seite.

Zeit	Spannung
0 Min.	−5,0 Volt
1,3 „	+4,2 „
2,5 „	+3,2 „
5,3 „	−2,1* „
7,1 „	−1,7* „
9,8 „	−1,4 „
11,8 „	+1,2 „

Um das Quecksilber beim Erneuern vollständig zu entfernen, wurden etwa noch anhaftende Tröpfchen mit einem Pinsel entfernt. Eine Beeinflussung durch eventuell dadurch entstandene Reibungselektrizität war nicht zu befürchten, da, wie festgestellt wurde, eine Schellackschicht, die keine Spannung zeigte, auch nach Abwischen mit dem Pinsel eine solche nicht aufwies. Um von der Berührung des Quecksilbers mit dem Paraffin unabhängig zu sein, wurde bei einigen Versuchen als obere Belegung ein Messingzylinderchen aufgesetzt, an dessen amalgamierter Grundfläche von 0,9 cm Durchmesser ein Quecksilbertropfen hing. Dadurch wurde allerdings eine kleine Potentialdifferenz eingeführt, da bereits eine geringe Beimengung von Messing durch Amalgamierung eine für sogenannte Kontaktpotentialdifferenzen erhebliche elektromotorische Kraft hervorrufen kann.[1]) Aber sowohl hier als bei den übrigen Versuchen, bei welchen die Belegungen aus verschiedenem Metall waren, konnte bei den verhältnismäßig hohen Aufladespannungen von etwaigen elektromotorischen Kräften abgesehen werden. Denn, wie der oben mitgeteilte Versuch zeigt, sind die bei Verwendung von Quecksilberbelegungen erreichten Spannungen beträchtlich. Bei einigen Versuchen wurden bis 10 Volt gemessen. Werte von derselben Größe lieferten auch Zellen, die aus mit Schellack belegtem Weißblech und einem Tropfen Quecksilber, der durch einen Kupferdrahtring zusammengehalten wurde, gebildet waren.

Nur die mit Stanniolbelegungen gebildeten Zellen hatten keine über Polarisationsspannungen reichende Potentialdifferenzen gezeigt. Nun war es kaum anzunehmen, daß der Kontakt des Stanniols mit der Schellackfläche schlechter war, wie bei Verwendung von Quecksilber. Vielmehr stellte sich heraus,

1) C. Christiansen, Wied. Ann. 56. p. 644. 1895.

daß das unterschiedliche Verhalten mit der relativ großen Leitfähigkeit des unter dem Stanniol befindlichen Schellacks zusammenhing. Da das Lösungsmittel (Alkohol + Wasser) beim Anlegen der Stanniolbelegung (ca. 24 Std. nach Aufbringen der Lösung auf das Blech) noch nicht genügend verdunstet war, besaß die Schellackschicht noch zu große Leitfähigkeit, als daß eine größere elektrische Spannung sich darin hätte aufrecht erhalten können. Da nun durch Anbringen des Stanniols die weitere Verdunstung fast ganz zurückgehalten wurde, stieg auch die Aufladung nicht über den kleinen Wert 2 Volt. Als aber die Stanniolbelegung für elf Tage weggenommen worden war, ergab sich nach Wiederanlegen die erheblich größere Endspannung von 5,6 Volt. Dabei war auch die Leitfähigkeit bedeutend verringert. Während der Aufladestrom früher elektrometrisch nicht mehr zu messen war, ergab er sich hier (Stanniolfläche 12,1 cm^2) zu $0{,}9 \cdot 10^{-8}$ Amp. Eine Wiederholung des Versuchs führte zu demselben Ergebnis.

Es geht daraus hervor, daß die Aufladung von der Leitfähigkeit der Schicht abhängt. Eine nähere Bestimmung dieser Abhängigkeit ist nicht ausgeführt worden, doch dürfte der zu erwartende Verlauf etwa folgender sein: Bei verhältnismäßig großer Leitfähigkeit wird keine merkliche Aufladung erfolgen, und wird man, wenn nicht galvanische Polarisation auftritt, nach Durchgang eines Stromes keine Spannung nachweisen können. Nimmt die Leitfähigkeit nun stetig ab, so wird die Aufladespannung zunächst größer werden. Sie wird aber nach Erreichung eines Maximums wieder abnehmen, da bei unendlich großem Widerstand kein Strom fließt, und in diesem Fall auch keine Aufladung stattfindet. Eine Stanniolzelle, für welche eine dünne *gegossene* Schellackschicht verwendet wurde, zeigte, da kein Strom durchging, in der Tat auch keine Spannung.

Für große Leitfähigkeiten wurde, wie früher (l. c.), die Zunahme der Aufladespannung mit der Dauer des Stromes und die Abnahme derselben nach Kurzschließen verfolgt. Es ergaben sich in gleicher Weise Exponentialkurven, deren Verlauf aber im Vergleich mit geringeren Leitfähigkeiten steiler war. Große Leitfähigkeit und geringe Endspannung zeigten sich auch, wenn als Zwischenschicht ein Kollodiumhäutchen und als Belegungen Quecksilber genommen wurden. Die

Stromstärke war selbst bei einer Belegung von nur 0,4 cm^2 für die elektrometrische Messung zu groß und die Endspannung betrug kaum 1,3 Volt. Ließ man hingegen den Spitzenstrom einer Elektrisiermaschine durch das Kollodiumhäutchen gehen, so konnte man auch hier größere Spannungen erhalten; diese nahmen jedoch ziemlich rasch ab.

Es wurde auch folgender Versuch ausgeführt: Zwei Radiotellurpräparate wurden einander in einem Abstand von einigen Millimetern gegenübergestellt und mit den Quadranten des unempfindlich geschalteten Elektrometers verbunden. Dasselbe zeigte dann keinen Ausschlag, auch wenn eine dünne Schellackschicht dazwischen gelegt wurde. Ließ man nun durch letztere kurze Zeit Spitzenstrom durchgehen, so gab das Elektrometer beim Zwischenbringen der Schicht zwischen die Präparate einen Ausschlag, dessen Vorzeichen sich umkehrte, wenn das Schellackblättchen umgekehrt dazwischen gelegt wurde. Der Ausschlag verschwand erst allmählich wieder. Es wurde auch versucht, eine Aufladung zu erzielen, indem man direkt an die beiden Cu'-Streifen, zwischen denen sich die Schellackschicht befand, eine Spannung anlegte. Es ließ sich jedoch keine nennenswerte Aufladung nachweisen.

5. Was nun die Anschauung über den Vorgang der Aufladung betrifft, so sprechen die mitgeteilten Versuche dafür, daß dieselbe eine Wirkung des durch die Schicht fließenden Stromes ist. Ob derselbe elektrolytischer Natur ist, bleibt dabei noch dahingestellt. Da aber jedenfalls der Vorgang an eine gewisse, wenn auch sehr geringe Leitfähigkeit gebunden ist, so besteht mit einer galvanischen Zelle die größere Ähnlichkeit als mit einem Kondensator. Man könnte vielleicht dementsprechend eine Anordnung, welche eine Aufladung zeigt, mit „Halbzelle“ bezeichnen. Die Wirkung einer solchen „Halbzelle“ kann man nun so auffassen, daß die von der einen Elektrode wegfließende Elektrizität zum Teil in der Zwischenschicht angehäuft wird. Man kann aber auch annehmen, daß sämtliche Elektrizität von der einen Elektrode zur anderen gelangt, und durch den Strom nur die anfänglich in der Zwischenschicht überall gleich verteilten Elektrizitäten zum Teil mitgeführt und dadurch getrennt werden. Es würde hier zu weit führen, auf Grund der mitgeteilten Versuche eine ge-

nauere Erklärung des Vorganges versuchen zu wollen, und dürften erst weitere Untersuchungen zur Klärung dieser Frage führen.

Vorliegende Arbeit ist am Physik. Institut der Universität Zürich ausgeführt, und benutze ich die Gelegenheit, Hrn. Prof. Kleiner für das freundliche Entgegenkommen, mit dem er mir Platz und Apparate zur Verfügung gestellt hat, meinen wärmsten Dank auszusprechen. Ebenso sei es mir gestattet, Hrn. Prof. Marckwald für die freundliche Überlassung der Radiotellurpräparate herzlichst zu danken.

Genf, November 1905.

(Eingegangen 24. November 1905.)

---

8. *Experimentelle Untersuchungen über lamellare Doppelbrechung;* *von Johannes Friedel.*

(Auszug aus der Leipziger Inaugural-Dissertation des Verfassers.)

Einleitung.

Um die optischen Anomalien gewisser Mischkristalle zu erklären, hatte Biot[1]) die Annahme gemacht, daß dieselben aus einzelnen, einfach brechenden Lamellen aufgebaut seien und infolge dieser Struktur auf einen schief einfallenden Lichtstrahl in ähnlicher Weise wirken wie ein Glasplattensatz, bei dem die Luftschichten zwischen den Platten sehr dünn sind. Diese Theorie wurde fortgeführt und erweitert von Mitscherlich, Wertheim, Frankenheim u. a. Frankenheim[2]) nahm an, daß die Lamellen nicht durch eine Luftschicht getrennt seien, sondern daß sie selbst verschiedene Brechbarkeit besitzen. Später ist die Biotsche Thorie allgemein aufgegeben worden, da sie die Gesamtheit der Erscheinungen nicht zu umfassen vermochte; man führte mit Erfolg die optischen Eigenschaften der Mischkristalle auf innere Spannungen zurück, welche beim Kristallisationsprozeß entstehen sollten (Brauns[3]), Lehmann.[4]))

Unabhängig von den Untersuchungen und Theorien der Kristallographen ist die Frage nach den optischen Eigenschaften eines aus zwei Substanzen bestehenden Lamellarkörpers von Hrn. Prof. Wiener aufgegriffen worden.[5]) Auf theoretischem Wege gelangte er zu dem Resultat, daß ein solcher Körper sich wie ein einachsiger Kristall verhalten

1) J. B. Biot, Compt. rend. 12. p. 1121. 1841; Mém. de l'Acad. des sciences 18. p. 541. 1842.

2) L. Frankenheim, Pogg. Ann. 111. p. 31 f. 1860.

3) R. Brauns, Die optischen Anomalien der Kristalle. Leipzig 1891.

4) O. Lehmann, Molekularphysik. Leipzig 1888.

5) O. Wiener, Leipz. Ber. 54. p. 282. 1902; Physik. Zeitschr. 5. p. 332. 1904.

müsse, dessen optische Achse senkrecht zur Schichtung steht, wobei vorauszusetzen ist, daß die Brechungsexponenten der beiden Substanzen verschiedene Werte haben, und die Dicken der einzelnen, unter sich parallelen Lamellen klein gegen die Lichtwellenlänge sind. Ehe man aus der Wienerschen Theorie irgendwelche Folgerungen ziehen will, ist es natürlich wünschenswert, ihre qualitative und quantitative Richtigkeit an einem künstlich hergestellten Körper unter wohl definierten Verhältnissen zu prüfen.

Die lamellare Doppelbrechung ist ein spezieller Fall der durch anisotrope Anordnung isotroper Elemente erzeugten Doppelbrechung. Qualitative Untersuchungen in dieser Richtung sind bereits von Braun ausgeführt. Braun zeigte, daß ein aus Backsteinen aufgebautes Gitter für elektrische Wellen doppelbrechend ist.[1]) Mehrfachen Bedenken unterliegen analoge Versuche Brauns[2]) auf optischem Gebiete.[3]) Schließlich sind von Braun[4]) Versuche veröffentlicht worden, welche für den Tabaschir qualitativ den Nachweis einer lamellaren Doppelbrechung erbringen.

Schon längere Zeit vor Erscheinen der Braunschen Arbeiten hatte ich mit Untersuchungen zur Prüfung der Wienerschen Theorie begonnen, die aber umfangreicher Vorversuche wegen erst vor kurzem zum Ziele führten. Die Schwierigkeiten lagen in der Art und Weise, wie die Schichtkörper zu gewinnen waren. Am geeignetsten ist die Anwendung der Kathodenzerstäubung, welche gestattet, gleichmäßige Schichten in beliebig kleiner Dicke herzustellen. Die langwierigste Aufgabe meiner Untersuchung bestand nun darin, zwei Substanzen zu finden, deren Brechungsindizes genügend verschieden sind, um der Theorie zufolge einen Körper mit meßbarer Doppelbrechung zu bilden. Da unter den durch Kathodenzerstäubung herstellbaren, durchsichtigen Stoffen, die bisher untersucht sind, keine zwei waren, die dieser Bedingung genügten, so mußten der Untersuchung zunächst zahlreiche Ver-

1) F. Braun, Physik. Zeitschr. **5**. p. 199. 1904.
2) F. Braun, Ann. d. Phys. **16**. p. 278. 1905.
3) J. Friedel, Leipz. Ber. **57**. p. 320. 1905.
4) F. Braun, Ann. d. Phys. **16**. p. 364. 1905.

suche vorausgehen, um Substanzen mit geeigneten Brechungsexponenten zu gewinnen.

Der zur Kathodenzerstäubung dienende Apparat.

Die Kathodenzerstäubung wurde in bekannter Weise ausgeführt, nur mit der Modifikation, daß ein großer Rezipient von ca. 12 Liter Inhalt verwendet wurde. Dies geschah sowohl aus unten zu erörternden technischen Gründen, wie auch aus der Erwägung, bei Darstellung von Oxydspiegeln stets ein genügendes Quantum Sauerstoff zur Verfügung zu haben, und bei Darstellung von reinen Metallspiegeln die Wirkung der den Gefäßwänden anhaftenden Feuchtigkeit und atmosphärischen Luft möglichst zu vermindern.

Der Rezipient war auf eine 2 cm starke Glasplatte aufgeschliffen. Die Spiegelglasplatte, auf welche die Lamellen niedergeschlagen wurden, lag fest in der Mitte, die Kathoden waren so angebracht, daß man sie durch Drehungen von außen abwechselnd über die Glasplatte bewegen konnte. Außerdem waren noch zwei Glimmerplatten, ebenfalls von außen drehbar, im Rezipienten angebracht, durch welche bestimmte Teile der Glasplatte gegen die Zerstäubungsprodukte abgeschirmt werden konnten. Durch diese Vorrichtung wurde erreicht, daß man in der Mitte der Glasplatte einen Lamellarkörper, an den Seiten jedoch zwei Gebiete erhielt, von denen das eine nur mit Silber, das andere nur mit Kupfer bedeckt war. Mit Hilfe dieses Verfahrens war es möglich, 1. die relativen Dicken des geschichteten Mediums zu berechnen, 2. zu erkennen, daß die einzelnen Substanzen an sich keine Doppelbrechung besaßen.[1])

Das Evakuieren geschah zuerst mit einer Kahlbaumquecksilberpumpe, dann mit einer von Hrn. Prof. Des Coudres freundlichst zur Verfügung gestellten Gerykpumpe, schließlich mit einer Teleskopvakuumpumpe (von Max Kohl, Chemnitz), welche in ca. $^1/_2$ Stunde eine genügende Verdünnung (ca. 1 bis 0,1 mm) erzeugte. Zur Messung des Druckes diente eine Barometerprobe, teilweise auch ein Mac Leodsches Manometer. In

1) Wenn bisweilen metallische Spiegel Doppelbrechung besitzen, so wird diese jedoch, wie A. Kundt (Wied. Ann. 27. p. 69. 1869) zeigte, durch chemische Umwandlung aufgehoben.

den meisten Fällen genügte es, die Größe des Druckes nach der Farbe und Ausdehnung des Glimmlichtes zu beurteilen.

Als Kathoden dienten hauptsächlich kreisförmige Metallplatten von 0,3—0,5 mm Dicke und 4 cm Durchmesser. Diese wurden an Kupferösen, in welche der Zuführungsdraht an der Einschmelzstelle endete, aufgehängt. Die Aufhängestelle war durch ein übergeschobenes Glasröhrchen vor dem Zerstäuben geschützt. Nach der Vorschrift von Boas[1]) waren die Elektroden auf der oberen Seite durch Glimmerplatten abgeblendet. Teilweise verwendete ich auch drahtförmige Kathoden in der Weise, wie sie von Hrn. Gräser[2]) beschrieben sind.

Bei Anwendung von Platten benutzte ich ein Induktorium von ca. 10 cm maximaler Funkenlänge, die Stromquelle des Primärstroms hatte eine Spannung von 10 bez. 20 Volt. Zur Zerstäubung von drahtförmigen Elektroden diente ein kleineres Induktorium von ca. 3 cm Funkenlänge, bei welchem eine Stromquelle von 8—10 Volt angewendet wurde. Alle Versuche geschahen mit Deprezunterbrecher.

Die Bestandteile des Schichtkörpers.

Nach mannigfachen Versuchen, über die in der Dissertation genauer berichtet ist, benutzte ich als Bestandteile des Schichtkörpers Jodsilber und Kupferjodür. Es wurde auf die Glasplatte abwechselnd Kupfer und Silber zerstäubt und dann der ganze Spiegel jodiert.

Beide Substanzen haben den Vorzug, äußerst gering zu absorbieren, sofern man sorgfältig das Auftreten einer Trübung vermeidet.[3])

Die Brechungsexponenten für Jodsilber entnahm ich einer von Hrn. Dr. Scholl gezeichneten Dispersionskurve, die auf Grund der Wernickeschen Werte[4]) gewonnen war.

Die optischen Eigenschaften des Kupferjodürs sind bisher nicht untersucht, ich mußte darum selbst Dispersionsmessungen anstellen. Diese wurden in bekannter Weise ausgeführt. Das

1) H. Boas, D. R. P. 82247.

2) P. Gräser, Beiträge zur Kenntnis der optischen Eigenschaften der Oxyde einiger Edelmetalle. Inaug.-Dissertation, Leipzig 1903.

3) H. Scholl, Wied. Ann. **68**. p. 169. 1899.

4) W. Wernicke, Pogg. Ann. **159**. p. 217. 1876.

bereits von Hrn. Gräser[1]) beschriebene Spektrometer war mit einem Rutherfordprisma versehen. Die Beleuchtung der Spiegel geschah durch eine Nernstlampe (ohne Heizspirale) vermittelst eines total reflektierenden Prismas. Zur Dickenmessung diente in allen Fällen die Wienersche Methode.[2])

Die im folgenden angegebenen Brechungsindizes sind die Mittel aus den an verschiedenen Spiegeln gemessenen Werten. Zum Vergleich habe ich die entsprechenden Zahlen des Silberjodids beigefügt.

λ	CuJ	AgJ	λ	CuJ	AgJ
660	1,935	2,145	550	2,00	2,205
650	1,94	2,15	540	2,005	2,215
640	1,945	2,155	530	2,015	2,225
630	1,95	2,16	520	2,02	2,24
620	1,955	2,165	510	2,03	2,255
610	1,96	2,17	500	2,04	2,27
600	1,965	2,175	490	2,055	2,285
590	1,97	2,18	480	2,07	2,30
580	1,975	2,185	470	2,09	2,33
570	1,98	2,19	460	2,11	2,365
560	1,99	2,20	450	2,135	2,42

Der Gang der Untersuchungen.

Auf dem zu messenden Spiegel wurde zunächst ein 2—3 mm breiter Streifen weggewischt. Senkrecht zu diesem wurden mit der Teilmaschine mehrere Marken eingeritzt. Die Untersuchungen selbst begannen mit den Dickenmessungen nach der Wienerschen Methode. Es wurde zunächst die Stelle maximaler Dicke M aufgesucht und gemessen. Darauf folgten die Dickenbestimmungen in den seitlichen Gebieten und zwar stets an solchen Stellen, die zu M äquidistant waren. Bezeichnet man die Dicken zweier derartig entsprechender Stellen mit d_1 und d_2, so ergeben sich daraus die relativen Dicken des Spiegels:

$$\delta_1 = \frac{d_1}{d_1 + d_2}, \quad \delta_2 = \frac{d_2}{d_1 + d_2}.$$

1) P. Gräser, l. c. p. 12.

2) O. Wiener, Wied. Ann. **31.** p. 635. 1887.

Jetzt war es möglich, die von der Theorie geforderten Werte der Hauptbrechungsexponenten durch die Wienerschen Formeln[1]) zu berechnen:

$$n_0^2 = \delta_1 n_1^2 + \delta_2 n_2^2 , \tag{1}$$

$$\frac{1}{n_a^2} = \frac{\delta_1}{n_1^2} + \frac{\delta_2}{n_2^2} . \tag{2}$$

Der Brechungsexponent des ordentlichen Strahles n_0 wurde experimentell bestimmt vermittelst der im reflektierten, spektral zerlegten Lichte auftretenden Interferenzen, genau in derselben Weise, die zur Bestimmung der Brechungsindizes einfacher Spiegel dient. Für die Stelle *M* sowie für eine benachbarte, deren Dicke ebenfalls gemessen war, wurden die im Gesichtsfeld befindlichen Interferenzen bestimmt, und daraus die Brechungsexponenten berechnet. Auf Grund dieser Werte wurde eine Kurve gezeichnet; dieser wurden die Brechungsexponenten für die Wellenlängen von 10 zu 10 $\mu\mu$ entnommen. Für diese Wellenlängen waren gleichzeitig die theoretischen Werte nach Formel (1) bestimmt worden, so daß eine unmittelbare Vergleichung möglich war.

Bei den geringen Unterschieden der Brechungsexponenten bilden diese Messungen noch keine genügende Bestätigung der Theorie. Diese liefert erst die Messung der Doppelbrechung und die daraus folgende Berechnung von n_a. Da die Phasendifferenz sich als Funktion von n_0 und n_a ausdrücken läßt, kann man unter Benutzung der für n_0 beobachteten Werte unmittelbar den Betrag von n_a finden.

Man läßt zu diesem Zwecke homogenes Licht den Spiegel durchsetzen und bestimmt den Gangunterschied der austretenden Strahlen durch die im nächsten Abschnitt zu beschreibende Methode. Zwischen dem so gefundenen Gangunterschied Δ und den Hauptbrechungsexponenten vermittelt die Formel für „Kristallplatten senkrecht zur Achse bei schief einfallendem Licht".

Es sei d die Dicke, i der Einfallswinkel, n' der Brechungsexponent des einschließenden Mediums, so gilt

$$\Delta = \frac{d}{\lambda} \cdot \left\{ \sqrt{n_0^2 - n'^2 \sin^2 i} - \frac{n_0}{n_a} \cdot \sqrt{n_a^2 - n'^2 \sin^2 i} \right\} .$$

1) O. Wiener, Physik. Zeitschr. 5. p. 332. 1904.

Man ist jetzt berechtigt, beide Wurzeln zu entwickeln; da n_0^2 und n_a^2 in allen Fällen größer als 4, $n'^2 \sin^2 i$ stets weit kleiner als 0,5 ist, genügt es, die Reihe je auf die drei ersten Glieder zu beschränken.

Dann hat man:

$$\Delta = \frac{d}{\lambda}\, n'^2 \sin^2 i \cdot \frac{n_0^2 - n_a^2}{2\, n_0\, n_a^2} \cdot \left[1 + n'^2 \sin^2 i \cdot \frac{n_0^2 + n_a^2}{4\, n_0^2\, n_a^2}\right].$$

Zur Abkürzung ist im folgenden

$$\frac{n_0^2 - n_a^2}{2\, n_0\, n_a^2} = N,$$

$$1 + n'^2 \sin^2 i \cdot \frac{n_0^2 + n_a^2}{4\, n_0^2\, n_a^2} = \eta$$

gesetzt. Die Ableitung der Formel geschieht aus den Grundlagen der Kristalloptik, worauf hier verwiesen werden muß.

Aus dem experimentell gefundenen Wert für Δ wurde dann rückwärts N und n_a berechnet, wobei für n_0 der beobachtete Wert, und für den Faktor η zunächst 1 gesetzt wurde. Aus N berechnet man sodann n_a, und vermittelst dieses Wertes fand man nun einen genaueren Wert für η. Unter Zugrundelegung dieses Wertes für η wurde die Rechnung nochmals durchgeführt, wodurch dann n_a mit genügender Genauigkeit gewonnen wurde.

Es war somit unmittelbarer Vergleich der berechneten und beobachteten Werte von n_a möglich.

Das Verfahren zur Messung der Doppelbrechung.

Die Messung der Gangunterschiede geschah vermittelst einer optischen Bank. Parallel gemachtes Bogenlicht traf nach Passieren eines Wassertroges, zweier Lichtfilter sowie des Polarisators auf den zu messenden Spiegel, der auf einem Tischchen angebracht war. Die Untersuchung des elliptisch polarisierten Strahles geschah durch einen Kompensator und Analysator.

Als Lichtfilter dienten drei verschiedene Kombinationen:

Für rotes Licht: Kupferoxydulglas, mittlere Wellenlänge gleich 657 $\mu\mu$.

Für grünes Licht: Zettnowsche[1]) Lösung in einer Schicht von 1 cm Dicke und grünes Glas (436^{III}), mittlere Wellenlänge gleich 556 $\mu\mu$.

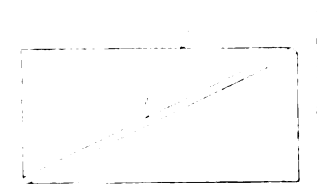
Für blaues Licht: Ammoniakalische Kupferlösung in einem Trog von 1 cm Dicke und zwei Blauviolettgläser, mittlere Wellenlänge gleich 460 $\mu\mu$.

Die mittleren Wellenlängen hatte ich mit dem Spektrometer, das zu den Dispersionsmessungen benutzt wurde, bestimmt.

Das zweite Filter bestand aus einem Jodsilberspiegel von 330 $\mu\mu$ Dicke zur Abschwächung der chemisch wirkenden Strahlen. Der Polarisator war mit zwei Fadenkreuzen und zwei Blenden von 5 mm Durchmesser versehen. Seine Schwingungsebene war um 45° gegen die Horizontale geneigt. Er konnte vermittelst einer Schlittenvorrichtung senkrecht zur optischen Bank verschoben werden.

Das Tischchen konnte sowohl um seine Achse gedreht, als auch senkrecht zur Bank bewegt werden. Die Größe der Drehungen und Verschiebungen wurden vermittelst Skala und Nonius abgelesen.

Mit Ausnahme der Stelle, an welcher die Messung vorgenommen werden sollte, wurde der zu untersuchende Spiegel mit schwarzem Papier bedeckt. Zwecks Ablenkung der mehrfach reflektierten Strahlen war derselbe zwischen zwei identische Prismen mit Kanadabalsam gekittet (vgl. Figur). Die bei schiefer Inzidenz hierdurch bewirkte Parallelverschiebung des Lichtstrahles wurde dadurch ausgeglichen, daß der Polarisator soweit seitlich verschoben wurde, bis die Fadenkreuze desselben wieder mit dem des analysierenden Nikols zur Deckung kamen.



Zur Bestimmung der Gangunterschiede diente ein Glimmerkompensator. Derselbe bestand aus einem drehbar angeordneten Glimmerplättchen von geringem Gangunterschied. An-

1) Nach der Angabe in Kaiserlings Praktikum der wissenschaftl. Photographie p. 18.

fangs benutzte ich ein Plättchen, für welches Hr. Kaempf $\delta = 0{,}086\ \lambda$ gefunden hatte.[1]) Später wurde ein zweites von Steeg & Reuter bezogen, dessen relative Beschleunigung ich zu $0{,}033\ \lambda$ bestimmte.

Der Analysator war ebenfalls mit Fadenkreuz und Blenden versehen.

Der Einfallswinkel wurde auf folgende Weise gefunden: Zunächst wurde die Stellung des Tischchens ermittelt, für welche die Prismenfläche senkrecht zur Strahlenrichtung war. Dies geschah vermittelst des am Analysator befindlichen Fadenkreuzes in analoger Weise wie beim Gaussschen Okular. Sodann wurde um einen bestimmten Winkel e gedreht. Bezeichnet φ den Keilwinkel (vgl. Figur), n' den Brechungsindex der Prismen, so findet man den Einfallswinkel i des im Glas auf die Schicht fallenden Strahles durch die Formel:

$$\sin i = \frac{1}{n'} \cdot [\sin e \cos \varphi + \sqrt{n'^2 - \sin^2 e} \, . \sin \varphi] \, .$$

Die Gangunterschiede wurden auf folgende Weise gemessen:

Kompensator und Analysator waren auf Dunkelheit eingestellt, dann wurde der Spiegel dazwischen gebracht und beide wurden so gedreht, bis das Gesichtsfeld wieder dunkel war. Aus den Drehwinkeln findet man die Phasendifferenz durch die folgenden Formeln:

(I) $$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \delta \, . \sin 2\gamma \, ,$$
oder
(II) $$\sin \varepsilon = \sin \delta \, . \sin 2\alpha \, .$$

Hier ist ε die gesuchte Phasendifferenz, γ der Winkel, um den der Kompensator aus der Ruhelage zu drehen ist, α der Winkel, um den der Analysator gegen den Kompensator verdreht wird, δ der Gangunterschied der beiden Komponenten im Glimmerplättchen.

Bezüglich der Ableitung dieser Formeln muß auf die Dissertation verwiesen werden.

Diese Formeln sind bei meiner Versuchsanordnung nur so lange gültig, als ordentlicher und außerordentlicher Strahl gleich stark absorbiert werden.

1) F. Kaempf, Ann. d. Phys. **16.** p. 318. 1905.

Da $\alpha > \gamma$ ist, wurde in den meisten Fällen Formel (II) bevorzugt, doch wurde zur Kontrolle auch mit der anderen Formel gerechnet. Die Genauigkeit der Messungen ist beschränkt durch die geringe Größe der zu messenden Winkel und durch die Unvollkommenheit der Lichtfilter.

Resultate.

Ich beschreibe im folgenden drei der von mir hergestellten Spiegel und die mit ihnen vorgenommenen Untersuchungen. Bei Herstellung der Spiegel eintretende Mißerfolge waren meistens durch eine dieser Ursachen bedingt:

1. Zerbrechen des eingeschliffenen Glasrohres infolge Mangel an Fett.

2. Zerspringen der verwendeten Spiegelglasplatte.

3. Abbröckeln des Metalles infolge zu hohen Entladungspotentiales, oder zu geringen Kathodenabstandes.

4. Zu hohes Vakuum, welches zur Folge hatte, daß der dunkle Kathodenraum bis zur Glasplatte sich erstreckte; dann entstanden Spiegel, welche in der Mitte geringere Dicke als am Rande besaßen.

5. Trübung beim Jodieren, trotz der erwähnten Vorsichtsmaßregeln, dadurch hervorgerufen, daß schon der Metallspiegel sich in einem Zustand der Auflockerung befand, was man aus diffuser Reflexion und geschwächtem Metallglanz erkennen konnte.

Aus diesen Gründen ist es erklärlich, warum von vielen hergestellten Spiegeln nur wenige zu Messungszwecken tauglich waren.

Spiegel VIII.

Das oben beschriebene Verfahren wurde derart angewendet, daß 100 mal mit den Kathoden gewechselt wurde, so daß man schließlich einen Lamellarkörper, bestehend aus 50 Silber- und 50 Kupferschichten erhielt. Jede Kathode wurde stets die gleiche Zeit lang, nämlich 1 Min. zerstäubt. Hierdurch erreichte man, daß alle Silberschichten unter sich, wie auch alle Kupferschichten unter sich von gleicher Dicke waren. Da aber unter sonst gleichen Versuchsbedingungen Silber in 3 bis



4 mal größeren Mengen zerstäubt als Kupfer[1]), so war es natürlich, daß die relativen Dicken sehr verschieden waren, wie die Messungen auch bestätigten.

Nach erfolgtem Jodieren zeigte der Spiegel eine gelbliche Farbe. Das Wegwischen des Streifens zur Dickenmessung mußte sehr vorsichtig und langsam geschehen, da sonst leicht größere Mengen der Substanz abbröckelten, und die Grenze unscharf wurde.

Da wegen zu großer Dicke Interferenzen nicht auftraten, mußte sich die Prüfung der Theorie auf den Vergleich der Phasendifferenzen beschränken. Die Dickenmessung an der Stelle maximaler Erhebung gab folgende Resultate:

a	λ	d
9	647,6	2914
10	588,4	2942
11	527,2	2900
	Mittel	2919 $\mu\mu$

In der Tabelle bezeichnet a den Unterschied der Ordnungszahlen für die Koinzidenz.

Die Dickenbestimmungen an je zwei zum Maximum äquidistanten Stellen der Gebiete b und c ergaben:

	AgJ	CuJ	δ_1	δ_2
1.	1004,0	386,1	0,732	0,268
2.	747,8	285,5	0,724	0,276
			Mittel: 0,728	0,272

Hieraus berechnet sich die mittlere Dicke einer Jodsilberschicht zu 42,50 $\mu\mu$, einer Kupferjodürschicht zu 15,88 $\mu\mu$.

Nach der Fizeauschen Methode[2]) kann man hieraus rückwärts die Dicke der ursprünglichen Metallschicht berechnen.

---

1) L. Holborn u. B. Austin, Wissensch. Abhandl. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt 4. p. 104, 105, 113. 1904; G. Granquist, Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1898. p. 709.

2) H. Fizeau, Compt. rend. 52. p. 274. 1861

Zwischen der Dicke d des Jodsilbers und derjenigen D des Metalles besteht die Relation:

$$D = \frac{d}{4,1} = 10,4\ \mu\mu.$$

Analog für Kupfer:

$$D = \frac{d}{4,8} = 3,3\ \mu\mu.\text{[1]}$$

Hieraus geht hervor, daß bei meinen Versuchen, im Gegensatz zu Angaben des Hrn. Houllevigue[2]), Silber- und Kupferlamellen von weit unter 50 $\mu\mu$ Dicke durch Joddämpfe umgewandelt worden sind.

Die Doppelbrechung wurde für je einen Einfallswinkel geprüft. Es war

$$e = -\ 57,87^0,$$

woraus sich

$$i = 22,06^0,$$
$$\text{bez.} = 21,93^0,$$
$$\text{bez.} = 21,81^0$$

berechnet, wobei für die aufgekitteten Prismen

$$\varphi = 11,80^0 \text{ und } n_r = 1,520,$$
$$n_{gr} = 1,525,$$
$$n_h = 1,530$$

gefunden war.

Da die Beobachtungen in kürzerer Zeit erfolgen mußten, beschränkte ich mich auf die Ablesung am Kompensator, d. h. auf Anwendung der Formel (I). Die Resultate finden sich in folgenden Tabellen.

Berechnete Phasendifferenzen.

λ	n_1	n_2	n_a	n_d	Δ
675	2,145	1,935	2,090	2,081	0,0031
556	2,200	1,995	2,146	2,138	0,0031
460	2,365	2.110	2.298	2,287	0,0048

1) Das spezifische Gewicht des Kupferjodürs ist gleich 5,6 gesetzt, als das Mittel der von Spring (Trav. chim. d. Pays-Bas **20.** p. 80. 1901) angegebenen Werte. Die Dichte des Jodsilbers ist 5,6.

2) L. Houllevigue, Boltzmann-Festschrift p. 62. 1904.

Beobachtete Phasendifferenzen.

λ	γ	ε	Δ	Abweich.
657	0,916°	1,102°	0,0031	0 %
556	0,950	1,143	0,0032	3
460	1,549	1,862	0,0052	8

Die Werte γ sind die Mittel aus 6—7 Einstellungen. Die Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie ist genügend, wenn man berücksichtigt, daß die möglichen Beobachtungsfehler über 10 Proz. betragen.

Spiegel X.

Um einen Lamellarkörper von geringerer Dicke zu gewinnen, wechselte ich nur 70 mal mit den Elektroden, so daß je 35 Schichten Silber und Kupfer niedergeschlagen wurden. Damit ferner möglichst große Doppelbrechung erzielt würde, war ich bestrebt, die Silberjodidschichten von der gleichen Dicke wie die Kupferjodürschichten herzustellen, da für $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2}$ die Doppelbrechung ihr Maximum besitzt.

Der jodierte Spiegel besaß sehr geringe Absorption, die Farbe war bräunlich gelb; die Newtonschen Farben waren nur von der Glasseite zu sehen.

Die Dickenbestimmung geschah an der Stelle maximaler Erhebung sowohl an der oberen wie der unteren Grenzlinie des weggewischten Streifens.

Die Resultate sind:

Oberhalb des Streifens: 2137 $\mu\mu$,
Unterhalb des Streifens: 2163 $\mu\mu$.

Für die relativen Dicken ermittelte ich folgende Werte:

$\delta_1 = 0{,}496$ für Jodsilber,
$\delta_2 = 0{,}504$ für Kupferjodür.

Für die an der oberen Grenzlinie gemessene Stelle ergibt sich hieraus:

Die mittlere Dicke einer Jodsilberschicht $= 30{,}29\ \mu\mu$,
„ „ „ „ Kupferjodürschicht $= 30{,}77\ \mu\mu$.

Die Bestimmung der Interferenzen erfolgte an den Stellen mit der Dicke 2137 und 2163 $\mu\mu$.

Auf Grund dieser Beobachtungen wurde eine Dispersionskurve gezeichnet; derselben sind die nachfolgenden Brechungsexponenten entnommen, zum Vergleich mit den berechneten.

λ	n_0 (beob.)	n_0 (ber.)	Differenz
650	2,047	2,047	0,000
640	2,051	2,051	0,000
630	2,056	2,057	−0,001
620	2,061	2,062	−0,001
610	2,065	2,067	−0,002
600	2,070	2,072	−0,002
590	2,075	2,077	−0,002
580	2,080	2,082	−0,002
570	2,087	2,087	0,000
560	2,094	2,097	−0,003
550	2,101	2,104	−0,003
540	2,109	2,112	−0,003
530	2,118	2,122	−0,004
520	2,129	2,132	−0,003
510	2,145	2,142	0,003
500	2,157	2,157	0,000
490	2,174	2,172	0,002
480	2,192	2,187	0,005
470	2,214	2,212	0,002
460	2,236	2,240	−0,004
450	2,275	2,281	−0,006

Die Übereinstimmung dieser Werte ist befriedigend; doch berechtigen sie noch nicht auf die Richtigkeit der Theorie zu schließen, maßgebend ist vielmehr erst die Bestimmung der Gangunterschiede.

Die Doppelbrechung wurde an der Stelle $d = 2137$ gemessen und zwar bei jeder der drei Wellenlängen stets für je zwei verschiedene Einfallswinkel; es war:

$$1. \quad e = 22{,}16^0, \quad 2. \quad e = 17{,}66^0.$$

Ursprüngliche Absicht war, bei möglichst schiefer Inzidenz zu beobachten. Dies ließ sich aber nicht ermöglichen, da man bei größeren Einfallswinkeln als den verwendeten ein zu dunkles Gesichtsfeld erhielt.

Es waren die gleichen Prismen wie bei Spiegel VIII aufgekittet. Dann folgt:

$$1. \quad i = 26{,}17^0 \text{ bez.} = 26{,}12^0 \text{ bez.} = 26{,}07^0,$$
$$2. \quad i = 23{,}31^0 \text{ bez.} = 23{,}27^0 \text{ bez.} = 23{,}24^0.$$

Die Einstellungen wurden sowohl am Kompensator wie am Analysator abgelesen, doch wurde der Auswertung, ab-

gesehen von einigen Kontrollrechnungen, stets die Formel (II) zugrunde gelegt. Die Absorption darf wegen ihres geringen Betrages bei der Rechnung vernachlässigt werden.

In der folgenden Tabelle sind die Zeilen, welche die berechneten Werte enthalten, von links nach rechts, und die, welche die Beobachtungen darstellen, von rechts nach links zu lesen. Die Unterschiede zwischen Theorie und Experiment sind bei den Gangunterschieden in Prozenten, bei den Brechungsexponenten in Einheiten der dritten Dezimale angegeben.

λ	i		n_1	n_2	n_a	n_0	Δ	s	α
657	26,17°	ber.	2,145	1,935	2,031	2,042	0,0040		
		beob.			2,034	2,044	0,0038	1,358°	1,317°
		Diff.			−0,003		5 %		
	23,31	ber.	2,145	1,935	2,031	2,042	0,0032		
		beob.			2,034	2,044	0,0029	1,040	1,009
		Diff.			−0,003		10 %		
556	26,12	ber.	2,200	1,995	2,089	2,099	0,0042		
		beob.			2,088	2,097	0,0039	1,392	1,350
		Diff.			0.001		8 %		
	23,27	ber.	2,200	1,995	2,089	2,099	0,0034		
		beob.			2,087	2,097	0,0034	1,223	1,186
		Diff.			0,002		0 %		
460	26,07	ber.	2,365	2,110	2,226	2,240	0,0064		
		beob.			2,223	2,236	0,0059	2,139	2,076
		Diff.			0,003		8 %		
	23,24	ber.	2,365	2,110	2,226	2,240	0,0051		
		beob.			2,222	2,236	0,0048	1,722	1,671
		Diff.			0,003		6 %		

Die angegebenen Werte α sind die Mittel aus 6—8 Einstellungen.

Die Abweichungen der obigen Werte liegen innerhalb der Beobachtungsfehler, welche durchschnittlich 9—10 Proz. betragen.

Spiegel XIII.

Es wurde jedes Metall 1 Min. zerstäubt unter 80maligem Wechsel, sonst in gleicher Weise wie bei den vorigen Exemplaren. Die Silberelektrode besaß diesmal größeren Abstand

von der Unterlage, infolgedessen bestand der Spiegel zum größeren Teile aus Kupferjodür.

Die Dickenbestimmung ergab an der Grenzlinie:

Oberhalb des weggewischten Streifens den Wert 2211,
Unterhalb „ „ „ „ „ 2179.

Die relativen Dicken bestimmte ich zu:

$\delta_1 = 0{,}314$ für Jodsilber,
$\delta_2 = 0{,}686$ „ Kupferjodür.

Für die Stelle $d = 2211$ ergibt sich somit:

17,35 $\mu\mu$ als mittlere Dicke einer Jodsilberschicht,
37,93 $\mu\mu$ „ „ „ „ Kupferjodürschicht.

Die Dispersionskurve wurde auf Grund von Interferenzbeobachtungen bei den Dicken 2179 $\mu\mu$ und 2211 $\mu\mu$ aufgestellt und daraus wurden folgende Werte interpoliert und mit den berechneten verglichen:

λ	n_0 (beob.)	n_0 (ber.)	Differenz
650	2,010	2,008	0,002
640	2,014	2,013	0,001
630	2,019	2,018	0,001
620	2,023	2,023	0,000
610	2,027	2,028	−0,001
600	2,032	2,033	−0,001
590	2,037	2,038	−0,001
580	2,043	2,043	0.000
570	2,049	2,048	0,001
560	2,056	2,058	−0,002
550	2,063	2,067	−0,004
540	2,071	2,073	−0.002
530	2,081	2,083	−0,002
520	2,092	2,093	−0,001
510	2,102	2,103	−0,001
500	2,113	2,115	−0,002
490	2,128	2,130	−0,002
480	2,149	2,145	0,004
470	2,173	2,168	0.005
460	2,196	2,193	0,003
450	2,225	2,228	−0,003

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist hinreichend.

Die Gangunterschiede wurden an der Stelle $d = 2211$ bestimmt und zwar für die Winkel:

$$1.\ e = 10{,}40^0, \quad 2.\ e = 5{,}40^0.$$

Die verwendeten Prismen waren von der Firma Zeiss geliefert. Sie besaßen den brechenden Winkel $\varphi = 21{,}88^0$ und die Brechungsindizes:

$$n_r = 1{,}519,$$
$$n_{gr} = 1{,}521,$$
$$n_b = 1{,}528.$$

Hieraus berechnen sich die Einfallswinkel zu

$$1.\ i = 28{,}70^0 \text{ bez. } 28{,}67^0 \text{ bez. } 28{,}66^0$$

und

$$2.\ i = 25{,}43^0 \text{ bez. } 25{,}42^0 \text{ bez. } 25{,}41^0.$$

Die Einstellungen wurden am Kompensator und am Analysator abgelesen, die Phasendifferenz wurde nach Formel (I) und (II) berechnet und der Mittelwert genommen. Als Kompensator diente das letztere der erwähnten Glimmerplättchen.

λ	i		n_1	n_2	n_a	n_0	Δ	e	α	γ
657	28,70°	ber.	2,145	1,935	1,994	2,003	0,0044			
		beob.			1,998	2,007	0,0041	1,474°	3,616°	3,534°
		Diff.			−0,004		7 %			
	25,43	ber.	2,145	1,935	1,994	2,003	0,0035			
		beob.			1,998	2,007	0,0034	1,208	2,934	2,917
		Diff.			−0,004		3 %			
556	28,67	ber.	2,200	1,995	2,053	2,062	0,0048			
		beob.			2,050	2,059	0,0048	1,709	4,284	4,016
		Diff.			0,003		0 %			
	25,42	ber.	2,200	1,995	2,053	2,062	0,0038			
		beob.			2,050	2,059	0,0039	1,388	3,449	3,283
		Diff.			0,003		3 %			
460	28,66	ber.	2,365	2,110	2,181	2,193	0,0070	2,513	6,033	6,216
		beob.			2,183	2,196	0,0070			
		Diff.			−0,002		0 %			
	25,41	ber.	2,365	2,110	2,181	2,193	0,0055	2,052	5,065	4,916
		beob.			2,183	2,196	0,0057			
		Diff.			−0,002		4 %			

Auch für diesen Spiegel besteht gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie; die Abweichungen betragen durchschnittlich 3—4 Proz., liegen also innerhalb der Beobachtungsfehler, welche hier ca. 6 Proz. betragen.

Schluß.

Das hauptsächlichste Ergebnis meiner Versuche ist dahin zusammenzufassen, daß die qualitative und quantitative Richtigkeit der Wienerschen Theorie für durchsichtige Medien erwiesen ist, wenigstens insoweit, als die Dicken der einzelnen Lamellen zwischen 15,9 und 42,5 $\mu\mu$ liegen.

Diese Untersuchung wurde in den Jahren 1903—1905 im physikalischen Institut der Universität Leipzig auf Anregung des Hrn. Prof. Dr. Wiener ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, ihm sowie Hrn. Privatdozent Dr. Scholl für die fortgesetzte liebenswürdige Unterstützung und Förderung der Arbeit meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Leipzig, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 17. November 1905.)

9. *Über Telephonplatten mit hohen Eigentönen; von Max Wien.*

Hr. Wiersch hat kürzlich[1]) darauf hingewiesen, daß man beim Telephonieren eine deutlichere Sprache erzielen könne, wenn man Platten verwendet, deren Eigentöne wesentlich höher liegen, wie bisher üblich, so daß sie etwa in den Bereich der Schwingungszahlen der Zischlaute der menschlichen Sprache fallen.

Bei Gelegenheit einer physiologischen Untersuchung[2]) habe ich vor einiger Zeit kleine Telephone mit Platten von 1 cm und 0,5 cm Durchmesser bei 0,2 und 0,08 mm Dicke verwandt, deren tiefster Eigenton 12000 bez. 20000 Schwingungen in der Sekunde besaß.

Von denselben Überlegungen ausgehend wie Hr. Wiersch bat ich Hrn. Prof. Dolezalek, welcher damals gerade mit der Untersuchung der Telephonie durch Pupinkabel beschäftigt war, diese Telephone auf ihre Sprachübertragung hin zu prüfen. Das Resultat der Versuche war, daß die Telephone allerdings eine sehr deutliche Übertragung ermöglichen, sie jedoch wegen der sehr geringen Intensität praktisch nicht gut verwendbar sein würden, da nur bei großer Stille und für ein geübtes Ohr die Sprache vernehmbar war.

Über den Grad dieser Verminderung der Tonintensität kann man sich in folgender Art ein Bild machen: Bei fest an das Ohr gedrücktem Telephon ist die Tonintensität für alle Töne bei gleicher Amplitude der Platte dieselbe und dem Quadrat der Amplitude proportional. Ist demnach n die Schwingungszahl des zu übertragenden Tones, p die des tiefsten Eigentones der Platte, so ist die Intensität prop. $1/(n^2 - p^2)^2$, wobei die Dämpfung vernachlässigt, und nur der tiefste Eigenton berücksichtigt ist.

1) E. Wiersch, Ann. d. Phys. 17. p. 999. 1905.
2) M. Wien, Pflügers Arch. 97. p. 1. 1903.

Solange n^2 klein neben p^2 ist, d. h. praktisch für alle *tieferen Töne* bis in die Nähe des ersten Eigentones ist die Tonintensität prop. $1/p^4$. Der tiefste Eigenton der gebräuchlichen Platten liegt etwa bei 700 Schwingungen pro Sekunde, danach ist die Intensität prop. $1/700^4$. Herr Wiersch will Platten anwenden, deren tiefster Eigenton mindestens die zirka zehnfache Schwingungszahl, also 7000 besitzt, dann ist die Intensität prop. $1/7000^4$, also für tiefe Töne unter sonst gleichen Umständen 10000mal kleiner als bei den gebräuchlichen Telephonen. Nimmt man den Eigenton noch eine Oktave höher, so sinkt die Intensität auf 1/160000!

In den Bereich der *mittleren Schwingungszahlen von 500 bis 5000* fallen die tiefsten und ausgeprägtesten Eigentöne der gebräuchlichen Platten. Die Reproduktion der Töne ist daher in diesem Gebiet ungleichmäßig stark, je nachdem die Töne in der Nähe einer Eigenschwingung liegen oder weiter entfernt sind. Im großen ganzen jedoch ist die Tonwiedergabe sehr laut. Die Eigenschwingungen stören besonders bei den Vokalklängen, deren charakteristische Töne meist in diesen Tonbereich fallen, da wegen der längeren Dauer der Vokalklänge die Resonanz sich voll ausbilden kann, während bei den schnell gedämpften charakterischen Tönen der Konsonanten dies weniger zu befürchten ist. Das Wierschsche Telephon überträgt alle diese Töne noch gleichmäßig schwach, und zwar dürfte die Verringerung der Intensität gegenüber dem gebräuchlichen Telephon im Durchschnitt mindestens dieselbe sein, wie die obige bei den tiefen Tönen.

Erst bei den *ganz hohen Tönen* kommen die Eigentöne des Wierschschen Telephons zur Geltung; jedoch werden nicht etwa alle Töne dieses Gebietes gleichmäßig verstärkt, sondern vor allem die Umgebung der Eigenschwingungen. Also, wenn wir den Grundton der Platte zu 7000 annehmen, außer dem Tonbereich um 7000 noch derjenige um die zweite Eigenperiode die über eine Oktave höher liegen würde. Die weiteren Eigentöne dürften schon über die Gehörgrenze hinaus fallen. Immerhin wird das ganze Gebiet der höchsten Töne hier stark hervorgehoben werden, während bei den bisherigen Telephonen die höheren Eigentöne nur wenig ausgebildet, und deshalb die ganz hohen Töne relativ sehr schwach durch sie übertragen werden.

Die Folge davon ist, daß sie oft durch die stärkeren, tiefen Töne und die störenden, vielfach gellend hervortretenden Eigentöne der Platte unterdrückt werden, und die Zischlaute und einige andere Konsonanten, deren charakteristische Töne sehr hoch liegen, schlecht zu verstehen sind.

Unzweifelhaft sind für eine *deutliche* Sprachübertragung bei dem Wierschschen Telephon alle Vorbedingungen erfüllt: gleichmäßige Intensität aller tieferen und mittleren Töne ohne störende Eigentöne, und relative Verstärkung der wichtigen höchsten Töne. Auf der anderen Seite steht die prinzipielle Schwierigkeit der *außerordentlichen Schwächung der tiefen und mittleren Töne*, auf denen schließlich doch die Mehrzahl unserer Sprachlaute beruht. Es steht zu befürchten, daß diese Schwächung auch nicht annähernd durch technische Vervollkommnung wiederausgeglichen werden kann. Im praktischen Gebrauch wird daher wohl meist die lautere Übertragung der üblichen Telephone vorgezogen werden, wenn auch einzelne Konsonanten schlecht ausgebildet sind und erraten werden müssen; die Anwendung der Telephone mit hohen Eigentönen dürfte auf besondere Fälle beschränkt bleiben, in denen eine ganz reine Übertragung erwünscht ist, und die äußeren Umstände eine besonders starke Übertragung der Telephonströme ermöglichen.

Übrigens kann man eine ähnliche Verschiebung der Tonintensität nach den hohen Tönen hin bei jedem Telephon in einfachster Weise bewirken, indem man das Telephon nicht fest an das Ohr hält, sondern in einige Entfernung von dem Ohr bringt. Die Tonintensität — Energie pro Flächeneinheit —, welche von einer schwingenden Platte vom Radius R, deren Mitte die Amplitude a macht, an einen Punkt in der Entfernung ϱ gelangt, ist

$$= 6{,}6 \,.\, 10^{-7} \frac{R^4}{\varrho^2} \,.\, a^2 \,.\, N^4 \,.\, \text{Erg.}^{1)},$$

steigt also porportional der vierten Potenz der Schwingungs-

1) M. Wien, l. c. p. 46. Die Formel ist eigentlich für eine Platte abgeleitet, die sich in einer sonst starren Ebene befindet, durch die der Raum in zwei Hälften geteilt wird. Die Proportionalität der Intensität mit N^4, worauf es hier allein ankommt, dürfte von dieser Bedingung unabhängig sein.

zahl N[1]), während, wie oben erwähnt, bei fest an das Ohr gedrücktem Telephon für die gleiche Amplitude a die Intensität für alle Schwingungszahlen die gleiche ist. Wenn man das Telephon vom Ohre entfernt, so tritt eine Schwächung aller Töne ein, dieselbe ist aber sehr viel größer für die tiefen Töne wie für die hohen. Man kann diese Erscheinung am besten verfolgen, wenn man das Telephon mit der sekundären Spule eines kleinen Induktoriums verbindet, in dessen primärer Spule ein schwacher Strom etwa 100mal in der Sekunde unterbrochen wird. Bei fest an das Ohr gehaltenem Telephon hört man stark den Grundton und die ersten Obertöne, dann schwächer eine große Zahl höherer Obertöne und schließlich das eigentümliche Surren des Telephons, das bei der Einstellung nach der Kohlrauschschen Methode der Messung von Flüssigkeitswiderständen eine Rolle spielt. Dasselbe rührt von den schnell gedämpften ganz hohen Schwingungen her, welche in dem Moment der Unterbrechung entstehen. Hält man das Telephon nur noch lose an das Ohr, so merkt man eine starke Schwächung der tiefen Töne; entfernt man es weiter und weiter, so verschwinden allmählich alle musikalischen Töne, und es bleibt nur jenes Surren übrig, das ziemlich weit hörbar ist, und aus einigen Zentimetern Entfernung charakteristischerweise nicht viel schwächer erscheint, als bei direkt an das Ohr gehaltenem Telephon.

Bei der Sprache erkennt man bei genügend lauter Übertragung ebenfalls leicht die Änderung der Klangfarbe, wenn man das Telephon vom Ohr entfernt. Auch scheint die Sprache deutlicher zu werden, wenigstens verstehe ich — genügende Intensität und Abwesenheit stärkerer Nebengeräusche vorausgesetzt — leichter, wenn ich das Telephon einige Zentimeter vom Ohr fern halte, und erkenne auch besser die Stimme des Sprechenden. Die Verbesserung ist jedoch nicht so groß, wie jene, welche durch die Verwendung von Platten mit hohen Eigentönen hervorgerufen wird, weil die störende Wirkung der tieferen Eigentöne der Platte zwar vermindert wird, aber nicht ganz fortfällt, wie bei diesen.

1) In dieser Bevorzugung der hohen Töne scheint mir auch eine prinzipielle Schwierigkeit bei der Reproduktion der Sprache und Musik durch Phonograph und Grammophon zu liegen.

Im Vorstehenden ist gezeigt, daß durch Verwendung von Platten mit hohen Eigentönen oder durch Entfernung des Telephons vom Ohr und auch bei dem Phonographen die relative Intensität der Töne verschiedener Höhe durchaus verändert wird, so daß das Intensitätsverhältnis der ganz hohen Töne zu den tiefen auf das 100000fache und darüber gesteigert werden kann. Es ist sehr auffallend, daß die Sprache und ihre Deutlichkeit dadurch nicht in noch viel höherem Grade beeinflußt wird, als es geschieht. Dem unbefangenen Beobachter wird der Einfluß auf die Klangfarbe auffallen, im ganzen aber die Sprache durchaus nicht etwa von Grund aus verändert erscheinen. Dieselbe Erfahrung macht man, wenn man die Telephonströme auf elektrischem Wege beeinflußt, indem man Kondensatoren oder Selbstinduktionsspulen in den Stromkreis einschaltet und dadurch die Übertragung der Töne verschiedener Höhe verändert.[1]) Das menschliche Ohr erweist sich mithin hier, wie auch sonst, als recht unempfindlich für Intensitätsunterschiede.

Es erscheint mir hiernach ausgeschlossen, daß das Charakteristische der menschlichen Sprache im wesentlichen im Verhältnis der Intensitäten der Töne, aus denen die verschiedenen Laute bestehen, zu suchen ist, und eine Untersuchung der Sprache, die sich auf die Messung der Amplituden der die Sprache bildenden Töne durch harmonische Analyse beschränkt, ist durchaus unzureichend. Viel hervorragenderen Anteil an der Deutlichkeit der Sprache müssen ganz andere Dinge haben — wie z. B. der Grad der Dämpfung der einzelnen Töne oder das Auftreten und Verschwinden gewisser Töne in bestimmten Zeitintervallen — und für dieses, im wesentlichen noch unbekannte, eigentliche Charakteristische der Sprache muß das Ohr eine erstaunliche Empfindlichkeit besitzen, so daß die Sprache verständlich bleibt, wenn auch die relative Intensität der einzelnen Töne total verändert wird.

Danzig, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule, 22. Nov. 1905.

1) M. Wien, Ann. d. Phys. 4. p. 450. 1901.

(Eingegangen 24. November 1905.)

10. *Die wahre Bedeutung der Flügel am Reibzeug der Elektrisiermaschine und ihr Ersatz;* *von W. Holtz.*

Die Reibzeugflügel sind eine Erfindung des Engländers Nooth. Beccaria[1]) hatte auf die Lichtlinie hingewiesen, dort wo der rotierende Isolator das Reibzeug verlasse, und sie aus der vom Glase nach dem Kissen zurückströmenden Elektrizität erklärt. Hierauf setzte Nooth[2]), um solches zu verhüten, dem Reibzeug Stücke von Seidenzeug oder Wachstaffet an und fand, daß die Maschine so in der Tat kräftiger wirke. Um die Ursache dieser verstärkten Wirkung weiter aufzuklären, änderte Nicholson[3]) die Flügel in verschiedener Weise ab und meinte, daß sie namentlich um deshalb besser wirken, weil sie, wie das Reibzeug, negativ elektrisch seien. Später erklärte man ihre günstige Wirkung mehr daraus, daß so eine Zerstreuung der Elektrizität in die Luft vermieden würde. 1879 kam Helmholtz[4]), ohne vorgenannte Arbeiten zu erwähnen, in einem Aufsatz über elektrische Grenzschichten auch auf die Flügel des Reibzeuges zu sprechen, deren Zweck sei, daß sie, mit jenem gleichnamig elektrisch, die Spannung seiner Endkante an das Ende eines Isolators verschöben. Gleichwohl wird noch heute in physikalischen Lehrbüchern ihr Zweck so gedeutet, daß sie eine Zerstreuung der Elektrizität verhüten sollen.

Daß letzteres unrichtig ist, sieht man zunächst daran, daß die Länge sehr wenig zur Verstärkung der Wirkung tut, daß nämlich, wenn sie auch nur 3 cm das Reibzeug überragen, der Effekt fast derselbe ist, als wenn sie bis an die Einsauger gehn, und ganz derselbe, wenn nur dafür gesorgt wird, daß die kurzen Flügel dem Glase so gut anliegen, als es die längeren tun. Hieraus folgt, daß sie nur dadurch wirken können, daß

1) Beccaria, Phil. Trans. **56**. p. 117. 1766.
2) Nooth, ebenda **63**. p. 333. 1773.
3) Nicholson, ebenda **79**. p. 265. 1789.
4) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. **7**. p. 337. 1879.

sie dem Zurückströmen der Elektrizität nach dem Reibzeuge hinderlich sind. Und dieser Effekt erklärt sich am besten so: Die amalgamierte Fläche ist ein Stück Leiter und an den Kanten eines solchen ist die Dichte besonders groß. Die übrigen Kanten kommen nicht weiter in Betracht, wohl aber jene, wo der geriebene Isolator das Kissen verläßt. Schließt sich an letztere ein Stück Wachstaffet oder Seide, so wird dieses, wenngleich isolierend, doch nach und nach mit negativ elektrisch werden und so die Dichte an jener Kante verkleinern, weil sie nun nicht mehr am Ende, sondern in der Mitte einer elektrischen Fläche liegt. Das geschieht freilich gleichfalls und noch besser, wenn statt Wachstaffet oder Seide ein Stück Papier genommen wird, da die Endkante des letzteren wegen der schlechten Leitungsfähigkeit des Materiales nicht weiter gefährlich ist. Die Wirkung ist in der Tat die gleiche, wie ich gelegentlich schon hervorhob[1]), zumal wenn man Seidenpapier nimmt, und wenn man dies bisher wenig nachmachte, so mag man wohl wegen der Vergänglichkeit des Papiers davon Abstand genommen haben. Bei Wachstaffet oder Seide könnte die negative Elektrizität auch aus der Luft herbeigezogen sich an die Außenseite der Zeuge setzen. Sie würde dann ähnlich wirken, wie wenn sie an der Innenseite säße und sich hier durch Leitung verbreitet hätte.

Kommt es aber nur darauf an, die Scheibe vor der schädlichen Wirkung der fraglichen Endkante zu schützen, so kann dies auch noch auf andere Weise geschehen, nämlich dadurch, daß man die leitende Fläche umbiegt, was freilich mit einer Amalgamfläche nicht gut tunlich ist. Um dies zu prüfen, nahm ich zwei dünne Kupferbleche, deren eines Ende zylindrisch umgebogen war, und hielt sie mit den Händen im Sinne wie die Figur zeigt, an die Glasscheibe, während ein anderer diese rotieren ließ. Ich erzeugte so 3 cm lange Funken, während es überhaupt keine Funken gab, wenn ich die Bleche umgedreht hielt. Dann nahm ich statt der Kupferbleche gleichgeformte Kartonstücke. Hier war der Unterschied beim Wechsel der

1) W. Holtz, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. 6. p. 302.

Lage natürlich weniger groß, weil auch die anliegende Kante, eben weil sie die Kante eines Halbleiters war, noch eine leidliche Wirkung gab. In der günstigen Lage erhielt ich 4 cm lange Funken, aber nicht viele, da der Karton für die Elektrizitätserzeugung nicht leitend genug war. Ich legte nun auf beide unechtes Silberpapier, aber so, daß dieses oben und unten kürzer war und auch nicht bis zur Biegung reichte. Dann kniffte ich das gerade Ende um und heftete dieses mit Leim der Hinterkante der hölzneren Reibzeuge an. Ich erhielt so zwischen kleinen 6 cm voneinander entfernten Kugeln einen konstanten Büschelstrom und bei vergrößertem Kontuktor 10 cm lange Funken mit einer Scheibe von nur 30 cm Durchmesser, also eine Wirkung, wie ich sie kräftiger gar nicht erwarten konnte. Und doch war die Zerstreuung der Elektrizität hier durch nichts verhütet, und die Scheibe drehte sich sehr leicht, weil kein Fett und keine anklebenden Flügel ihre Bewegung hemmten. Noch stärker war die Wirkung, als ich je ein Quecksilbertröpfchen mit dem Finger auf dem Silberpapier verrieb. Aber dies vergrößerte die Reibung. Auch empfehle ich es um deswillen nicht, weil man dann, wenn die Maschine längere Zeit nicht gebraucht ist, das Silberpapier wieder erneuern muß.

Die fragliche Rundung spielt auch sonst noch eine Rolle. Streiche ich mit der unteren Kante meiner rechten Hand über eine Ebonitplatte, so wird diese stark elektrisch, weil die rundliche Form das Zurückströmen der Elektrizität erschwert. Lasse ich gepulverte Körper, auch Metallfeilicht auf einem schräg gestellten Blechstreifen niedergleiten, so zeigen sie sich, isoliert aufgefangen, stärker elektrisch, wenn das untere Ende rund umgebogen ist. Bei einer Reihe von Kupfermünzen, welche so auf einem schrägen Zinkstreifen in eine isolierte Metallschale gleiten, erhalte ich am Elektroskop einen kleinen Ausschlag, nicht jedoch, wenn der Streifen unten gerade gelassen ist.

(Eingegangen 25. November 1905.)

11. *Die Trichterventilröhre beim Wechsel von Druck und Funkenart; von W. Holtz.*

Ich habe der Trichterröhre, seit sie zuerst bekannt wurde [1]), im Verlaufe der Zeit verschiedene Formen gegeben, deren einfachste die nebenstehende Figur zeigt. Sie ist zugleich die empfehlenswerteste, da kompliziertere Formen nur wenig besser wirken. Ich selber gab über die Röhre nur zwei kurze Mitteilungen.[2]) In der ersten sprach ich mich über die bevorzugte Stromrichtung nicht aus. In der zweiten sagte ich, daß verzögerte Flaschenentladungen denjenigen Trichter bevorzugen, dessen Basis der positiven Elektrode zugewandt sei. Poggendorff[3]) stellte über die Röhren eine längere Untersuchung an, in welcher er nur solche mit mehreren Scheidewänden und einseitig gerichteten Trichtern benutzte, von denen er eventuell zwei entgegengerichtete nebeneinander legte. Er fand aber, daß die verschiedensten Entladungen allemal eher hindurchgingen, wenn die Trichterspitze der positiven Elektrode zugewandt sei. Alle Röhren waren so weit evakuiert, wie ich empfohlen hatte, nämlich so, daß sie die Schichtung zeigten. Als ich kürzlich sah, daß Poggendorffs und meine Angaben sich widersprachen, dachte ich, daß meine Röhre ehedem vielleicht Luft gesogen habe, und daß sich die Röhren bei verschiedenen Drucken vielleicht anders verhalten könnten. Dies veranlaßte mich die nachfolgenden Versuche anzustellen.

Ich ließ mir von Geisslers Nachfolger Hrn. Müller in Bonn drei sonst gleiche Röhren nach Art obenstehender Figur machen, aber ungleich evakuiert, so daß die eine noch

1) Vgl. Poggendorffs Referat in den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom Juli 1867.

2) W. Holtz, Pogg. Ann. 155. p. 643. 1875 und Wied. Ann. 10. p. 336. 1880.

3) J. C. Poggendorff, Pogg. Ann. 134. p. 1. 1868.

ein zusammenhängendes Band, die zweite Schichtung, die dritte die Hittorf-Crookesschen Lichterscheinungen gab. Ich nenne sie der Reihe nach *A*, *B* und *C*; sie waren 25 cm lang, 5 cm weit und übrigens mit Luft gefüllt. Es war nur ein kleiner Induktionsapparat, den ich gebrauchte, und er wirkte nur durch ein Leclanchéelement. So ist es am günstigsten, weil bei größeren Apparaten oder größerer Triebkraft der Schließungsstrom mit passiert, wobei dann natürlich beide Trichter leuchten. Bei der Influenzmaschine wandte ich entweder verzögerte Flaschenentladungen, oder den bloßen Konduktorenstrom und diesen konstant oder mit eingeschalteter Luftstrecke an.

Beim Induktionsapparat zeigte die Röhre *A* deutlich, daß der Strom eher den Trichter passierte, dessen Basis der positiven Elektrode zugerichtet war. Nur sporadisch leuchtete der andere mit, aber viel schwächer. Am deutlichsten trat der Unterschied bei wiederholtem Gebrauche des Kommutators vor Augen. Die Röhre *B* dagegen verhielt sich, wie Poggendorff angab; der Strom ging nur durch jenen Trichter, dessen Spitze der positiven Elektrode zugerichtet war. Hierbei zeigte sich nur in der positiven Kammer Schichtung, in beiden aber ein dunkler Raum, der in der positiven zwischen dem aus dem Trichter tretenden Büschel und den vor dem Drahte schwebenden Schichten lag. Die Röhre *C* verhielt sich der Hauptsache nach ähnlich; die Entladungen gingen vorzugsweise durch den Trichter, dessen Spitze nach der positiven Elektrode sah, und und nur sporadisch leuchtete der andere mit. Der Büschel der Trichterspitze war übrigens länger und nicht rötlich, sondern mehr grau. In der negativen Kammer erschien nur grünes Phosphoreszenzlicht, in der positiven außer dem Büschel noch ein der Drahtspitze anhaftender Nebelfleck.

Bei verzögerten Flaschenentladungen, wobei ich schwach angefeuchtete Schnüre gebrauchte, waren die Erscheinungen den eben erwähnten so ähnlich, daß ich darüber nicht weiter sprechen will.

Bei konstantem Strom und der Röhre *A* sah man nur vier helle Stellen, die beiden Trichterspitzen, einen leuchtenden Überzug der positiven Drahtspitze und ein der negativen anhaftendes unruhiges Flämmchen von rötlichem Licht. Bei Ein-

schaltung einer Luftstrecke veränderte sich das Bild. Die Röhre füllte sich mit nebelhaftem rötlichgrauem Licht, der negative Draht erhielt einen blauen Überzug und die ihn umgebende Glaswand fing zu phosphoreszieren an. Immer jedoch blieb derjenige Trichter der hellere, dessen Basis nach der positiven Seite lag. Bei konstantem Strom und der Röhre *B* funktionierte nur derjenige Trichter, dessen Spitze nach der positiven Seite lag. Aus ihr floß ein rötlicher Büschel, während in der Röhre sonst ein rötlichgrauer Nebel verbreitet war, der die negative Kammer ganz füllte, während er in der positiven vor dem Büschel eine dunklere Stelle übrig ließ. Bei Einschaltung einer Luftstrecke trat das grüne Phosphoreszenzlicht jetzt deutlicher auf. Bei konstantem Strome und der Röhre *C* funktionierte derselbe Trichter, aber zeitweilig auch der andere etwas mit. Der verlängerte Büschel war lichtschwächer, desgleichen der verschwommene Nebel, der sonst in der Röhre lag. Bei Einschaltung einer Luftstrecke trat das Phosphoreszenzlicht besonders deutlich hervor. Das Phosphoreszenzlicht trat also immer erst bei einer Luftstrecke und eher (d. h. schon bei geringerer Evakuierung) bei Konduktoren- als bei verzögerten Flaschen- und Induktionsfunken auf.

Die Hauptfrage aber entschied sich nach den mitgeteilten Versuchen so: Bei einer Evakuierung, welche noch keine Schichtung erzeugt, gehen Entladungen eher durch jenen Trichter, dessen Basis nach der positiven Seite sieht. Bei stärkerer Verdünnung ist es umgekehrt. Dies Resultat gewinnt dadurch an Interesse, daß auch in gewöhnlicher Luft ein isolierender Trichter eher Funken hindurchläßt, wenn seine Basis nach der positiven Seite sieht.[1])

Frägt man nach der Ursache, so ist man geneigt, diese mit der Frage zu verschmelzen, an welcher Elektrode die Entladung beginnt. Man pflegt ja anzunehmen, daß jeder Entladung eine Polarisierung der zwischengelagerten Moleküle voraufgeht, und der Ausgleich dann von Molekül zu Molekül fortschreitet. Andererseits ist wahrscheinlich, daß bei jeder Entladung Materie, sei es gewöhnliche, sei es elektrische im

1) W. Holtz, Über das Trichterventil in der Luft, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 8. p. 158. 1877.

Sinne des Fortschrittes verschoben wird. Wird aber Stoff verschoben, so leuchtet es ein, daß die Bewegung eher durch einen Trichter hindurchgeht, wenn sie von der Basis nach der Spitze gerichtet ist. Man müßte also annehmen, daß in der Luft und in schwächer evakuierten Röhren die Entladung immer am positiven Pole beginnt, bei stärker evakuierten aber am negativen. Dagegen spricht freilich, daß solche Röhren in der Mitte stets freie positive Elektrizität zeigen und um so mehr, je stärker die Verdünnung ist. Auch spricht etwas dagegen, daß die eigentliche Kathodenstrahlung nicht schon bei der Schichtung, sondern erst bei stärkerer Verdünnung beginnt.

Für die Anfertigung der Ventilröhren bemerke ich noch, daß die Trichterspitzen besser enger als weiter und womöglich nicht weiter als 1 mm sind. Vor allem aber ist es wichtig, daß beide gleich weit sind, weil sonst die Entladung eher immer durch die weitere geht.

(Eingegangen 25. November 1905.)

12. *Die Bestimmung der galvanischen Polarisation während des Schlusses des Stromes; von Richard Thöldte.*

Die galvanische Polarisation[1]) ist frühzeitig, schon vor dem Ohmschen Gesetz beobachtet worden, und in verschiedener Weise bald als besonderer Übergangswiderstand, bald dadurch, daß man die Zersetzungszelle als Kondensator betrachtete, gedeutet worden. Doch erst die neuen Theorien der Dissoziation der Elektrolyten von Arrhenius und der elektromotorischen Kräfte von Nernst haben die Grundlagen für eine klarere Auffassung geschaffen.

Die mir bekannten bisher veröffentlichten Methoden gestatten eine Bestimmung der Polarisation mittels der Wippe, oder bei Schluß des Stromes nur in Verbindung mit dem Widerstande der Zelle, daher erscheint es nicht uninteressant, ein Verfahren mitzuteilen, durch welches die Polarisation bei geschlossenem Strome ohne Zellenwiderstand bestimmt werden kann, und dessen anderweitige Veröffentlichung mir nicht bekannt geworden ist.[2])

Methode zur Bestimmung der Polarisation.

Läßt man einen elektrischen Strom mit der elektromotorischen Kraft E und der Intensität J durch ein Galvanometer und durch ein Differentialgalvanometer gehen (Fig. 1), so bestimmt der Ausschlag des Galvanometers die Größe und Richtung des Stromes, während die Nadel des Differential-

1) Die Literatur über Polarisation ist in Wiedemanns Galvanismus und Wüllners Experimentalphysik sowie in den Beiblättern zu den Annalen an den betreffenden Stellen nachzusehen. Außerdem ist zu nennen F. Streintz, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **104.** 1895, der mir nicht zugänglich gewesen ist.

2) A. Oberbeck, Wied. Ann. **19.** p. 213 u. 625. 1883 u. **63.** p. 29. 1897; O. Wiedeburg, Wied. Ann. **51.** p. 302. 1894; M. Wien, Wied. Ann. **58.** p. 37. 1896.

galvanometers in Ruhe bleibt. Für einen solchen geschlossenen Stromkreis gelten die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} J = J_1 + J_2, \quad J_1 = J_2, \quad W_1 = W_2, \\ J\left(W + \frac{W_1}{2}\right) = E. \end{cases}$$

Bringt man nunmehr in dem einen Zweige des Differentialgalvanometers eine Zersetzungszelle an, deren elektromotorische Kraft e ist und dem Hauptstrome entgegengesetzt geht, so wird das Gleichgewicht gestört, die Nadel des Differentialgalvanometers wird abgelenkt, zugleich aber auch die elektromotorische Kraft E geschwächt, was durch das Galvanometer angezeigt wird. Um nun die Intensität des Hauptstromes wieder auf die frühere Stärke zu bringen, muß der Widerstand W um W_0 verringert werden. Dadurch, daß im Hauptstrome bald Widerstand ein-, bald ausgeschaltet wird, kann derselbe konstant erhalten werden. Um weiter die Nadel des Differentialgalvanometers auf den Nullpunkt zurückzuführen, muß im anderen Zweige desselben der Widerstand W_4 eingeschaltet werden.

Bezeichnen wir nunmehr den Widerstand der Zelle selbst mit W_3, so gelten für den verzweigten Stromkreis nach den Kirchhoffschen Gesetzen die Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} L\frac{dJ}{dt} + JW + L_2\frac{dJ_2}{dt} + J_2 W_2 = E, \\ L\frac{dJ}{dt} + J(W - W_0) + L_2\frac{dJ_2}{dt} + J_2(W_2 + W_3) = E - e, \\ L\frac{dJ}{dt} + J(W - W_0) + L_2\frac{dJ_2}{dt} + J_2(W_2 + W_4) = E. \end{cases}$$

woraus sich ergibt

$$(3) \qquad \frac{J}{2}(W_4 - W_3) = e.$$

In dieser Gleichung kann $J/2$ bestimmt und der Widerstand W_4 gemessen werden. Unbekannt ist nur noch der Widerstand in der Zelle selbst W_3. Um denselben zu eliminieren, verdoppeln wir die Zelle; dann wird die Nadel des Differentialgalvanometers abermals abgelenkt und kann durch neu eingeschaltenen Widerstand W_5 auf den Nullpunkt zurückgeführt

werden. Durch die Verdoppelung der Zelle verwandelt sich die Gleichung (3) in

$$(4) \qquad \frac{J}{2}(2\,W_4 - W_5 - W_3) = 2\,e\,.$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (3) und (4) erhält man:

$$(5) \qquad \frac{J}{2}(W_4 - W_5) = e\,.$$

In dieser Gleichung sind alle Größen bekannt; J ist die konstant zu erhaltende Intensität des Hauptstromes, W_4 der Widerstand, der bei der einfachen Zelle eingeschaltet und W_5 derjenige, der nach der Verdoppelung angebracht wurde. Dieses Verfahren hat noch den Vorteil, daß man nach jedem einzelnen Versuche eine zweite Messung der Polarisation anstellen und den hieraus resultierenden Wert mit dem zuerst gewonnenen vergleichen kann. Wenn nämlich der Stromkreis geschlossen, die Polarisation in der Zelle also eingetreten ist, auch durch eingeschalteten Widerstand des Differentialgalvanometers wieder auf den Nullpunkt zurückgeführt ist, so wird in dem Augenblicke, in welchem man den Strom unterbricht, die Nadel des Differentialgalvanometers durch die Polarisation, welche andauert, wiederum abgelenkt. Aus der Größe dieser Ablenkung kann man einen Schluß auf die Größe der Polarisation ziehen. Indessen hat diese Probe doch nur einen Wert, wenn die Polarisation nicht allzu groß ist. Ich habe sie nur mit Erfolg bei Zinkelektroden in Zinkvitriol und Kupferelektroden in Kupfervitriol anwenden können. Bei meinen Versuchen mit Platinelektroden in verdünnter Schwefelsäure war die Polarisation so stark, daß das Spiegelgalvanometer meines Differentialgalvanometers stets über die Skala hinausschlug.

Vorrichtungen zur Beobachtung und Messung der Polarisation.

Als Galvanometer wurde eine mit Kupferdraht umwickelte Rolle benutzt, die in angemessener Entfernung hinter einem Spiegelmagnet, der sich in einer messingenen Kapsel als Dämpfer befand, aufgestellt war; 80 cm vor dieser Magnetkugel befand sich ein Fernrohr mit Skala. Als Zersetzungs-

zelle wurde ein 45 cm langer, 29 cm breiter und 54 cm hoher Glastrog benutzt. An dem einen Ende desselben wurde die eine Elektrode festgeklemmt, während die andere beliebig hin und her geschoben werden konnte. Zur Regulierung der elektromotorischen Kraft *e* durch die Zelle wurde ein Rheostat von 130 Windungen Neusilber benutzt. Um endlich den Strom durch das Galvanometer konstant zu erhalten, war in den Stromkreis ein Platindraht eingeschaltet, auf dem ein Schieber hin und her bewegt werden konnte. Haben die Drähte die in nachstehender Fig. 1 gegebene Bezeichnungen, so hatte der positive Strom folgenden Lauf:

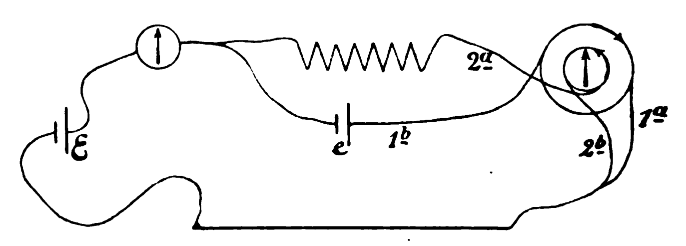


Fig. 1.

Er wurde zunächst aus einem Kommutator in die Rolle des Galvanometers geleitet. Aus diesen herausgetreten, teilte er sich, und zwar ging ein Arm in den Anfang des Rheostaten, der andere in den Anfang der Zersetzungszelle. In das Ende des Rheostaten mündete der Draht 2a des Differentialgalvanometers, in das Ende der Zersetzungszelle der Draht 1b desselben. Durch eine Schraube konnte der Draht 1b leicht und bequem vom Ende der Zersetzungszelle ab und in den Anfang derselben angeschraubt werden, so daß bei dieser letzteren Verbindung zwar ein Strom durch das Differentialgalvanometer, aber nicht durch die Zelle ging. Der Strom durchlief also in den Drähten 2a und 1b das Differentialgalvanometer, kam durch die Drähte 1a und 2b wieder aus demselben heraus, und wurde nun durch einen Kupferdraht, der mit diesen beiden Drähten durch eine Klemmschraube verbunden war, weiter in den Platindraht geleitet, durchlief diesen bis zu dem Schieber und ging von da zum Element bez. Kommutator zurück.

Als Einheit des Widerstandes, durch welchen die Polarisation e bestimmt wurde, habe ich eine Windung des von mir benutzten Rheostaten genommen. Als Einheit des galvanischen Stromes ist derjenige genommen, der in der Rolle 18 cm hinter dem Spiegelgalvanometer aufgestellt, in dem Fernrohr, welches 77 cm vor dem Spiegelmagnet aufgestellt war, eine Änderung der Skala von 500 mm auf 400 mm hervorbrachte; die Entfernung der Skala vom Magnet betrug 80 cm. Dann war der Ablenkungswinkel $\alpha = 3^0\,33'\,45''$. Diese Stromstärke bezeichne ich mit α und setzte dieselbe gleich 1.

Lenkte ich den Magneten von 500 bis 300 ab bez. bis 200 und 100, so ergeben sich die Ablenkungswinkel

$$\beta = 7^0\,1'\,15'', \quad \gamma = 10^0\,16'\,40'', \quad \delta = 13^0\,16'\,57'' \text{ und } \varepsilon = 16^0\,0'\,10''.$$

Ich habe diese Stromstärken bez. mit 2, 3, 4 und 5 bezeichnet.

Das Differentialgalvanometer mit Spiegelablesung war vor der Benutzung sehr genau in bezug auf die Richtigkeit untersucht worden.

Beobachtungen der Polarisation.

Um die Methode zu prüfen, wurde zunächst als Zersetzungszelle der Glastrog mit Kupferelektroden in Kupfervitriollösung, und in weiteren Versuchsreihen Zinkelektroden in Zinkvitriollösung in den Stromkreis geschaltet. Da hierbei der Hauptstrom am positiven Pole das Potential vergrößert, so daß an demselben neue Metallionen ebenso in der Flüssigkeit gelöst werden, als am anderen Pole, wo das Potential verkleinert wird, Ionen ihre Ladung abgeben, so kann in beiden Fällen keine Polarisation entstehen. Der Versuch zeigte bei Anwendung aller von mir benutzten Stromstärken, auch wenn die Elektroden verkleinert wurden, ebenso wie auch die auf p. 1063 angegebene Probe, daß in den Fällen, wo die Elektroden völlig rein waren, dieselben sich als unpolarisierbar erwiesen. Die bekannten Resultate wurden also durch die hier gegebene Methode vollauf bestätigt.

Nunmehr wurde chemisch reine Schwefelsäure mit Wasser im Verhältnis von 1 : 10 gemischt, und als Elektroden Platin verwendet.

Ich habe bei meinen Stromstärken mit Verkleinerung der Elektroden beim Eintauchen auf 50, 40, 30, 25, 20 und 15 mm folgende Werte gefunden.

Tabelle.

	50 mm	40 mm	30 mm	25 mm	20 mm	15 mm
α	91,11	102,36	111,83	117,91	119,23	119,44
β	98,92	113,27	124,85	130,83	132,73	132,73
γ	107,24	119,07	131,5	140,16	144,24	144,27
δ	115,98	135,41	150,25	156,04	156,04	156,04
ε	120,21	141,84	156,25	160,29	160,26	160,27

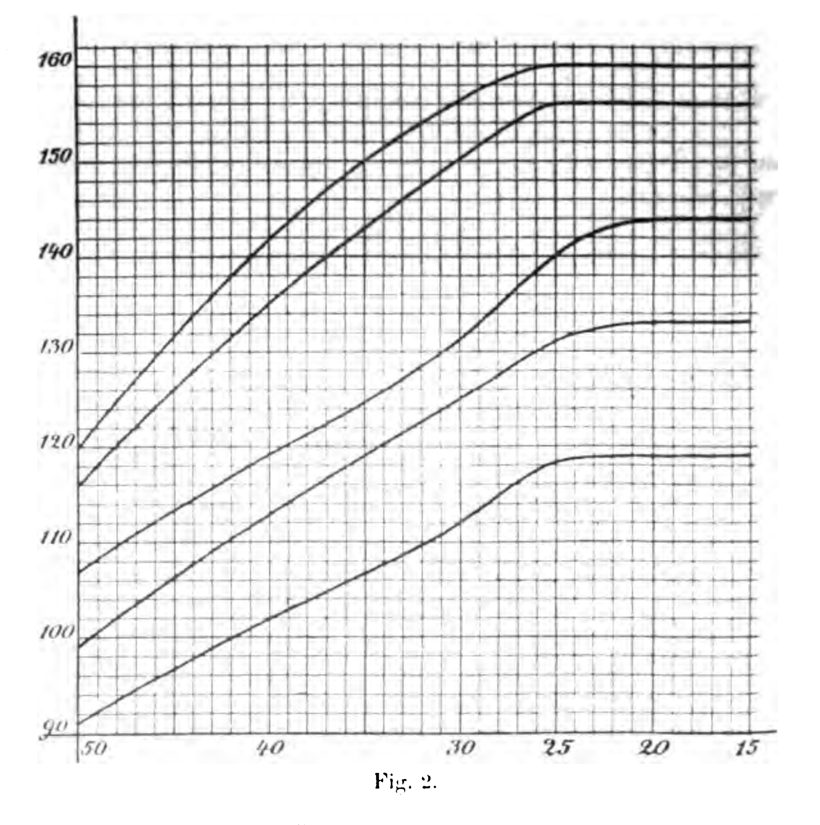


Fig. 2.

Um eine genaue Übersicht zu geben, sind in vorstehender Figur dieselben graphisch dargestellt, indem die verschiedenen

Größen der Elektroden zu Abszissen, die Stromstärken zu Ordinaten gemacht sind.

Die Kurven bestätigen die Abhängigkeit der Polarisation von der Stromstärke. Dieselbe wächst bei schwachen Strömen mit deren Verdoppelung annähernd um eine gleiche Größe, die sich jedoch bei größerer Stromintensität verkleinert und einem größten Werte zustrebt; desgleichen ist sie abhängig von der Größe der in die Flüssigkeit getauchten Elektroden, sie wächst mit Verkleinerung derselben bis zu einem gewissen Maximum, welches sie konstant beibehält.

Unter sich zeigen die Kurven gewisse Schwankungen, die sich durch den Umstand, daß die verwendeten Stromstärken nicht völlig den beigelegten Werten 1, 2, 3, 4, 5 entsprechen, nicht erklären lassen. Fast regelmäßig nimmt die Polarisation bei einem Eintauchen der Elektroden von 20 und 15 mm mit Vergrößerung der Stromintensität zu und ohne Schwankungen steigt sie auch bei Anwendung der größten von mir verwendeten Stromstärken δ und ε mit Verkleinerung der Elektroden. Aber gerade diese Versuche waren am schwierigsten auszuführen. Solange nämlich die Wasserzersetzung sich in der Weise bemerkbar macht, daß die Kathode mit *kleinen* Wasserstoffbläschen überzogen ist, so lange läßt sich auch ein Versuch bequem ausführen; denn zu einem solchen gehört, da mehrfache Widerstände eingeschaltet und reguliert werden müssen, immer eine gewisse Zeit. Wenn aber an der Kathode sich *starke große* Blasen bilden, so schwankt das Galvanometer so unregelmäßig hin und her, daß ein bestimmter Wert nicht angegeben werden kann; der ganze Versuch ist nicht zu gebrauchen. Die Ausführung muß in diesen Fällen so geschehen, daß man durch Probierversuche feststellt, wieviel Widerstand ungefähr eingeschaltet werden muß und dann in der *kürzesten Zeit* denselben genau zu regulieren versucht. In dieser Weise sind meine Versuche bei den Stromstärken δ und ε und bei Eintauchen der Elektroden von 25, 20 und 15 mm in die Flüssigkeit angestellt; daher die Regelmäßigkeit gegenüber den Schwankungen bei den anderen Intensitäten.

Das Maximum der Polarisation fällt also mit dem Umstande zusammen, daß sich große starke Blasen an den Elek-

troden bilden, sei es bei einer gewissen größeren Stromstärke, sei es bei einer gewissen Verkleinerung der Elektroden. Da die ursprünglich vorhandenen freien Ionen in der Zelle durch den Hauptstrom in Bewegung gesetzt sind, so müssen sich neue Ionen gebildet haben. Und zwar geschieht dies dadurch, daß den mit Wasserstoff überzogenen Platinelektroden, die ich kurz Wasserstoffelektroden nennen will, ebenso eine Lösungstension innewohnt, wie allen Metallen; und weil die Wasserstoffionen in der Flüssigkeit löslich sind, werden Wasserstoffionen nach der Anode, und ebenso natürlich auf der anderen Seite Sauerstoffionen nach der Kathode transportiert; es entsteht die Polarisation, die somit dem Hauptstrome entgegengesetzt gerichtet sein muß. Solange nun sich in der Flüssigkeit entgegengesetzt geladene Ionen anziehen und zu neutralen Teilen vereinigen, so lange wächst die Polarisation. Wenn aber die Neutralisation dieser Ionen an der einen Elektrode ebenso schnell erfolgt als ihre Loslösung von der anderen, so ist das Maximum der Polarisation eingetreten. Denn die Lösungstension sucht sich weniger geltend zu machen, je mehr Kationen in der Flüssigkeit vorhanden sind. Dies gibt sich bei den Versuchen durch eine sehr lebhafte fast wie wallende Bewegung der Flüssigkeit an den Elektroden zu erkennen. Die Gleichung der Polarisation $J/2 \times (W'_4 - W'_5) = e$ zeigt, daß diese dem Ohmschen Gesetz gehorcht. Bei verhältnismäßig größerer Stromstärke nimmt die Polarisation bei Zunahme der Intensität weniger schnell zu und schließlich hört die Zunahme vollständig auf, dafür nimmt die Differenz $W'_4 - W'_5$ immer ab. Bleibt die Intensität bei Verkleinerung der Elektroden konstant, so wächst die Differenz, solange die Polarisation wächst. Wir haben somit folgendes

Resultat:

Das Maximum der Polarisation von Platinelektroden in verdünnter Schwefelsäure (1 : 10), welches bei einer Stromstärke mit hinreichender Verkleinerung der Elektroden eintritt, ist ein Beweis dafür, daß keine Vereinigung von entgegengesetzt geladenen Ionen in der Flüssigkeit mehr stattfindet.

So werden durch die hier gegebene Methode nicht nur bekannte Resultate bestätigt, sondern dieselbe ist auch ge-

eignet, einen interessanten Einblick über den Verlauf der Polarisation zu geben.

Die Anfänge dieser Arbeit liegen weit zurück. Die Anregung zu ihr nach dem Verfahren verdanke ich meinem verstorbenen Lehrer Hrn. Geh.-Rat Hankel in Leipzig. Mit Freude und Dankbarkeit denke ich an die schöne Zeit zurück, wo ich die ersten Versuche im physikalischen Institute der Universität Leipzig ausführen durfte.

Dessau, im November 1905.

(Eingegangen 24. November 1905.)

13. *Bemerkung zur Abhandlung von Hrn. A. Denizot unter dem Titel: „Zur Theorie*[1]*) der relativen Bewegung und des Foucaultschen Pendelversuches“; von M. P. Rudzki.*

Am Ende seiner im Titel zitierten Abhandlung hat sich Hr. Denizot gegen meine Kritik seiner früheren Abhandlung im „Bull. Ac. des Sc. Cracovie“ gewendet. Darauf kann ich nur antworten, daß Hr. Denizot in seiner *neuen* Abhandlung leider wieder in den *alten* Fehler verfallen ist.

Zwar sind seine Gleichungen (38) auf p. 312 korrekt, wenn man daran festhält, daß X, Y, Z die Komponenten der Erdattraktion im Punkte x, y, z bedeuten, aber gleich auf der nächsten Seite (Gleichung 40) begeht Hr. Denizot seinen alten Fehler. Er setzt nämlich:

$$(40)\quad X - \omega^2 h \sin\varphi = 0\,, \qquad Y = 0\,, \qquad Z - \omega^2 h \cos\varphi - g = 0\,.$$

Diese Annahme ist aber unerlaubt, sobald man gleichzeitig, wie es Hr. Denizot tut, die kleinen Kräfte (36) (auf p. 312) nämlich

$$(36)\quad \begin{cases} X_f = \omega^2 (x \sin\varphi + z\cos\varphi)\sin\varphi\,, \qquad Y_f = \omega^2 y\,, \\ Z_f = \omega^2 (x\sin\varphi + z\cos\varphi)\cos\varphi \end{cases}$$

in den Gleichungen (38) beibehält. In der Tat, die

$$X - \omega^2 h \sin\varphi \quad \text{etc.} \ldots$$

sind nicht einmal von derselben Größenordnung wie die X_f etc...., sie sind numerisch bedeutend größer (siehe weiter) als diese letzten. Dabei bemerke ich, daß die Gleichungen (40) nur in einem Punkte, nämlich im Koordinatenanfang P, streng erfüllt sind, und zwar nur wenn man voraussetzt, daß die z-Achse mit

1) A. Denizot, Ann. d. Phys. **18.** p. 299—322. 1905.

der Vertikale in P zusammenfällt. Gleichzeitig verschwinden die Kräfte (36) in diesem Punkte von selbst.

Möge Hr. Denizot seine Gleichungen mit denen von Gauss in dessen aus dem Jahre 1803 [1]) herrührenden Abhandlung vergleichen. Dort, auf p. 501 oben wird er Ausdrücke finden, die zwar in einer anderen Form doch nichts anderes als seine

$$X - \omega^2 h \sin\varphi + X_f \text{ etc.} \dots$$

darstellen. — Gleich darauf vernachlässigt Gauss diese Ausdrücke, aber ganze, nicht Teile derselben, wie es Hr. Denizot tut.

Vor kurzer Zeit hat Hr. de Sparre [2]) denselben Gegenstand behandelt. Seine Bezeichnungen sind denjenigen von Hrn. Denizot ganz ähnlich, so daß der Vergleich sehr leicht ausgeführt werden kann. Hr. Denizot kann sich leicht überzeugen, daß de Sparre in seinen Gleichungen neben den X_f auch die $X - \omega^2 h \sin\varphi$ etc. . . . geschrieben hat. Er hat diese Kräfte (*approximativ*) berechnet, und zwar hat er folgende Ausdrücke [3]) dafür gefunden:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} -G\,\dfrac{x}{R}(1 - 3\sin^2\eta) - 3\,\omega^2 z \cos\alpha \cdot \sin\lambda \cdot \cos\eta\,, \\ -G\,\dfrac{y}{R} \\ +G \cdot \dfrac{z}{R}(2 - 3\sin^2\eta) - 3\,\omega^2 x \cos\alpha \sin\lambda \cos\eta\,. \end{cases}$$

Es bedeutet hier G die Erdattraktion, R den mittleren Erdradius, η den kleinen Winkel zwischen den Richtungen der Schwerkraft g und der Erdattraktion G, λ die geographische (bei Hrn. Denizot φ), α die geozentrische Breite. Bezüglich der weiteren Details verweise ich auf die Abhandlung von de Sparre, hier wiederhole ich nur, daß die Kräfte (A), bez. bei Hrn. Denizot die $X - \omega^2 h \sin\varphi$ etc. . . ., nicht vernachlässigt werden können, wenn die X_f etc. . . . beibehalten werden.

---

1) Fundamentalgleichungen . . . etc. . . . Gauss' gesammelte Werke. **5.** (Gött. 1867) p. 495—503.

2) M. de Sparre, Bulletin de la Soc. math. de France. **33.** p. 65 bis 72 u. 146—150. 1905.

3) l. c. p. 68 u. 70. Herr de Sparre bezeichnet die Kräfte (A) mit X', Y', Z'.

Bemerke man nur, daß der Faktor G/R in den Ausdrücken (A) ca. 290 mal größer ist als der Faktor $\omega^2 = (2\pi/86164)^2$ in den Ausdrücken (36).

Um dem Leser deutlich vor die Augen zu führen, wovon es sich eigentlich handelt, werde ich die folgende kurze Erklärung geben.

Denken wir uns, es sei im Punkte P (0, 0, 0) der Anfang (fest mit der Erde verbundener)-rechtwinkliger Koordinaten, wobei die z-Achse mit der Vertikale in P zusammenfällt. Bekanntlich ist diese Annahme gleichbedeutend damit, daß in P die Schwerkraft in der z-Richtung wirkt, während in den Richtungen x und y keine Kräfte wirken. Gehen wir jetzt zu einem anderen Punkte M (x, y, z) über. Im allgemeinen ist die Richtung, auch die Größe der Schwerkraft in M von der Richtung und Größe der Schwerkraft in P verschieden. Infolgedessen hat man in M kleine Komponenten der Schwerkraft in den Richtungen x und y, während die z- Komponente einen gewissen (positiven oder negativen) Zuwachs erfährt. Nennen wir diese Komponenten und diesen Zuwachs X_g, Y_g, Z_g. Jede von diesen Kräften ist eine Summe von zwei Kräften

$$X_g = X_f + X_a, \ldots \text{etc.} \ldots$$

X_f, Y_f, Z_f sind die Zuwächse der Zentrifugalkraft, X_a, Y_a, Z_a [mit $X - \omega^2 h \sin\varphi$ etc. . . . gleichbedeutend] sind die Zuwächse der Attraktion, dabei sind die X_a etc. . . . größer als die X_f etc. . . . Unterdes hat Hr. Denizot auf p. 313 seiner neuen Abhandlung, ebenso wie in der alten, die X_f . . . beibehalten und die X_a . . . etc. . . . gestrichen.

Ich füge noch hinzu, daß gewöhnlich, wenn es sich um eine Bewegung in einem kleinen Raume handelt, die kleinen Kräfte X_g (also X_f und X_a gleichzeitig) vernachlässigt werden. Dies ist äquivalent mit der Annahme, daß im betrachteten Raume die Größe und Richtung der Schwerkraft als konstant betrachtet werden können. Wenn man aber die X_g . . . in die Gleichungen aufnimmt, so hat man „*eo ipso*“ angenommen, daß die Richtung und Größe der Schwerkraft von Punkt zu Punkt variieren und die Niveauflächen krumme Flächen sind. Das trifft auch dann zu, wenn man, wie es Herr Denizot irrtümlich getan hat, nur die X_f in die Gleichungen aufnimmt.

Hr. Denizot hat diesen Umstand nicht eingesehen und trotzdem, ebenso wie in seiner älteren Abhandlung, die Schwerkraft als konstant, die Kraftlinien als parallele Geraden angesehen. Es rührt daher, daß Hr. Denizot sich eingebildet hat, daß die Kräfte X_f etc. ... nicht zur Schwerkraft gehören (vgl. p. 313 u. 314).

Auf verschiedene andere Mißverständnisse in Herrn Denizots neuer Abhandlung gehe ich nicht ein, gleichzeitig erkläre ich auf seine eventuelle Antwort nicht weiter reagieren zu wollen.

(Eingegangen 20. November 1905.)

---

14. *Über eine Interferenzerscheinung am Stufengitter; von E. Gehrcke.*

(Hierzu Taf. VIII, Figg. 2 u. 3.)

Das Michelsonsche Stufengitter besteht bekanntlich aus einem geschichteten Satz planparalleler Platten, bei welchem Lichtstrahlen von einer Reihe beugender Öffnungen (Stufen) miteinander interferieren; die Gangunterschiede dieser Strahlen sind sehr hoch und bilden eine arithmetische Progression. Die miteinander interferierenden Intensitätsverteilungen der einzelnen Öffnungen erzeugen Interferenzstreifen, deren jeder ein Spektrum von gewisser Ordnungszahl repräsentiert. In dieser Hinsicht ähnelt somit das Stufengitter vollkommen dem gewöhnlichen Beugungsgitter, und dementsprechend ist auch seine Theorie bis auf die Einführung des sprunghaft von Stufe zu Stufe sich ändernden Gangunterschiedes identisch mit der Theorie des gewöhnlichen Beugungsgitters.

In anderer Hinsicht indessen sind beide Apparate sehr verschieden voneinander. Während nämlich beim gewöhnlichen Beugungsgitter der Gangunterschied der interferierenden Strahlen für alles Licht, das von verschiedenen Punkten des (als ideale Linie vorausgesetzten) Kollimatorspaltes herstammt, als *konstant* angesehen werden kann, ist dies beim Stufengitter nicht der Fall. Hier hängt vielmehr der Gangunterschied vom *Neigungswinkel* der auf den Plattensatz auffallenden Strahlen ab; er ist um so kleiner, je näher das einfallende Licht mit der Plattennormale zusammenfällt. Dementsprechend beobachtet man, wie ich zuerst an einem von Hrn. Dr. Hauswaldt in Magdeburg freundlichst geliehenen Stufengitter wahrnahm, bei genügend langem Kollimatorspalt eigentümliche Interferenzstreifen, welche zu den sonst bekannten und berechneten Streifen hinzukommen. Diese neuen Streifen sind sehr verwaschen und wandern bei einer Drehung des Gitters um eine den Längsseiten der Stufen parallele Achse, und zwar zunächst (senkrecht zu dieser Achse) in *einer* Richtung, bis sie still-

stehen und, weitere Drehung im alten Sinne vorausgesetzt, wieder zurückwandern. Die Distanz der Streifen ist am größten in dem genannten Umkehrpunkt ihrer Bewegung; hier fällt die Richtung des einfallenden Lichtes mit der Plattennormale zusammen. Die Gestalt der Streifen ist gekrümmt, doch weicht sie von der Kreisform ab. Gleichzeitig mit dem Auftreten dieser eigenartigen Streifen geht eine Deformation der gewöhnlichen, dem Kollimatorspalt sonst parallel verlaufenden Beugungsstreifen vor sich: letztere erhalten ein schraubenlinienartiges Aussehen.

Es ist klar, daß man die genannten Interferenzstreifen auch mit einer einfacheren Anordnung als mit einem Michelsonschen Stufengitter erhalten muß. In Fig. 1 bedeutet S einen

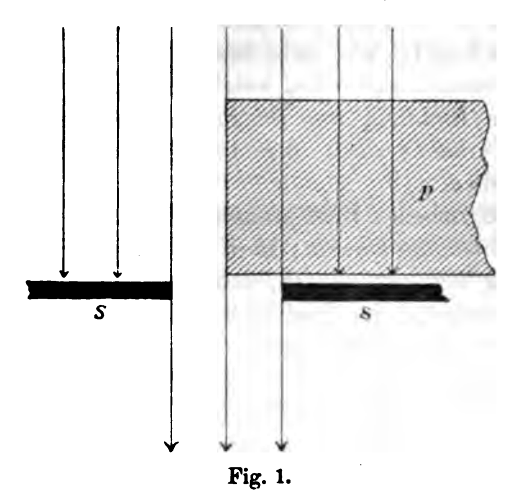


Fig. 1.

Schirm aus Messingblech, in den eine spaltförmige Öffnung von 2 mm Breite und 20 mm Länge eingeschnitten ist. Die Hälfte der Öffnung ist mit einem Stück Planparallelglas p von 5 mm Dicke zugedeckt. Sonach hat man im Prinzip ein Stufengitter vor sich, das aus zwei Stufen von je 1 mm Breite besteht. Beleuchtet man nun diese Anordnung mit parallelem, homogenem Licht in Richtung der Pfeile, so entsteht in einem auf ∞ akkommodierten Fernrohr, welches die durch die Öffnung des Schirmes S tretenden Strahlen vereinigt, die bekannte Interferenzerscheinung der Beugungsbilder zweier dicht neben-

einanderliegender Spalte. Ferner erblickt man im Fernrohr die obengenannten Interferenzstreifen.

In Figg. 2 u. 3, Taf. VIII ist die Erscheinung für die grüne Quecksilberlinie 546 $\mu\mu$, wie sie besonders lichtstark in einer Quecksilberlampe auftritt, photographiert. Die Brennweite des benutzten Fernrohres betrug 30 cm; die wiedergegebenen (negativen) Bilder sind Vergrößerungen der Originale im Verhältnis 1 : 11. In Fig. 2 war die Neigung des einfallenden Lichtes gegen die Normale der Platte *p* (vgl. Fig. 1) äußerst klein; man erblickt hier nur zwei querliegende, verwaschene dunkle Streifen, während die vertikalen, schraubenförmigen schwarzen Linien die bekannten Beugungsstreifen sind. In Fig. 3 dagegen betrug die Neigung des einfallenden Lichtes etwa 20° gegen die Plattennormale und gegen die Ebene der Zeichnung in Fig. 1. Man sieht demnach in Fig. 3 eine größere Anzahl (20) Interferenzstreifen, welche unter ca. 60° gegen die ursprüngliche Richtung der Beugungsstreifen geneigt liegen; gleichzeitig erkennt man die bedeutende Tordierung der Beugungsstreifen.

Die beschriebenen Interferenzen sind meines Wissens bisher nicht beobachtet worden; auch ihre Berechnung steht noch aus. Es mag bemerkt werden, daß die von Hrn. Laue[1]) behandelte Krümmung des Spaltbildes im Stufengitter hier nur von sekundärer Bedeutung ist.

1) M. Laue, Physik. Zeitschr. 6. p. 283—285. 1905.

(Eingegangen 24. November 1905.)

15. *Bemerkung zu der Abhandlung von Hrn. E. Madelung: „Über Magnetisierung durch schnell verlaufende Ströme und die Wirkungsweise des Rutherford-Marconischen Magnetdetektors“; von Max Wien.*

Im zehnten Heft des laufenden Jahrganges dieser Zeitschrift hat Hr. E. Madelung[1]) über Versuche berichtet, die er über die Magnetisierung durch schnell verlaufende Wechselströme angestellt hat, und gibt an, daß er dabei die Resultate einer früheren Arbeit von mir[2]) teils bestätigt, teils erweitert hätte.

Die prinzipielle Schwierigkeit aller derartiger Untersuchungen, nämlich die Berücksichtigung der Wirkung der Wirbelströme im Eisen, vermeidet Hr. Madelung von vornherein, seine Versuche ergeben daher im wesentlichen nur den *Einfluß der Wirbelströme auf die Hysteresisschleifen*, über dessen Zunahme mit der Frequenz sie ein übersichtliches Bild geben.

Im Gegensatz dazu hatte ich mir die Aufgabe gestellt, die Hysteresisschleifen in ihrer Abhängigkeit von der Frequenz *nach Berücksichtigung und Abtrennung der Wirkung der Wirbelströme* darzustellen.

Die Resultate der beiden Arbeiten lassen sich daher nicht vergleichen.

Da in den letzten Jahren mehrfach bei Untersuchungen über die Magnetisierung durch elektrische Schwingungen in diesen Dingen nicht scharf genug unterschieden wurde, hielt ich diesen Hinweis für angezeigt.

Danzig, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule, 22. Nov. 1905.

1) E. Madelung, Ann. d. Phys. **17.** p. 861. 1905.
2) M. Wien, Wied. Ann. **66.** p. 859. 1898.

(Eingegangen 24. November 1905.)

16. *Berichtigung zu der Arbeit: „Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht“; von W. v. Ignatowsky.*[1]

---

p. 506, Ausdruck (3):

statt $(\varkappa'^2 - \varkappa)$ muß sein $(\varkappa'^2 - \varkappa^2)$.

p. 511. Im Ausdruck (7) für E_z muß vor dem Zeichen $\sum$ der Faktor 2 stehen.

p. 512, Ausdruck (9):

statt $+\beta_n^2$ muß sein $-\beta_n^2$.

p. 517, Ausdruck (11):

statt $\frac{2 i \pi s}{\lambda}$ muß sein $\frac{2 i \pi r}{\lambda}$.

p. 518, Ausdruck (13):

statt $\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma r}$ muß sein $\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma i}$.

1) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. p. 495. 1905.

(Eingegangen 16. Dezember 1905.)

Namenregister zum Jahrgang 1905.

A.

Aschkinass, E., Die Wärmestrahlung der Metalle 17, 960. — Elektrische Leitungsfähigkeit und Reflexionsvermögen d. Kohle 18, 373.

B.

v. Baeyer, O., Absorption elektrischer Schwingungen von 70 cm Wellenlänge 17, 30.

Bakker, G., Zur Theorie der Kapillarschicht 17, 471. — Antwort an H. Hulshof 17, 584.

Becker, A., Messungen an Kathodenstrahlen 17, 381.

Behn, U., Über das Verhältnis der mittleren (Bunsenschen) Kalorie zur 15°-Kalorie (c_{0-100}/c_{15}) 16, 653. — Über die Übereinanderlagerung von Halbschatten; Bemerkung zur Arbeit des Hrn. J. Petri: Einige neue Erscheinungen etc. 17, 772.

Betz, W., Eine Methode zur Bestimmung der Dicke und optischen Konstanten durchsichtiger Metallschichten 18, 590.

Biernacki, V., Über durch galvanische Zerstäubung hergestellte Eisenspiegel 16, 943. — Über einen Halbschattenanalysator 17, 180.

Biske, F., Quarzkeilkolorimeter 16, 406.

Boltzmann, A., Bemerkungen zu Hrn. S. Valentiners Abhandlung: „Über den maximalen Wirkungsgrad umkehrbarer Kreisprozesse" 18, 642.

Bose, E., Über die verallgemeinerte Auffassung einer Formel der kinetischen Gastheorie 16, 155.

Braun, F., Der Hertzsche Gitterversuch im Gebiete der sichtbaren Strahlung 16, 1. — Über metallische Gitterpolarisation, insbesondere ihre Anwendung zur Deutung mikroskopischer Präparate 16, 238. — Einige Beobachtungen, die sich auf künstliche Doppelbrechung beziehen 16, 278. — Einrichtung, um im Vakuum Entfernungen ändern zu können 16, 416. — Der Mechanismus der elektrischen Zerstäubung; Schmelzen von Kohlenstoff; Zerlegung von Metallegierungen 17, 359. — Optische Doppelbrechung in isotropen, geschichteten Medien 17, 364.

Bronn, J., Über den Zustand der metallischen Lösungen 16, 166.

C.

Christiansen, C., Über den Zusammenhang zwischen Oberflächenspannung und Potentialdifferenz 16, 382.

D.

Denizot, A., Zur Theorie der relativen Bewegung u. des Foucaultschen Pendelversuches 18, 299.

Dieterici, C., Über die Flüssigkeitswärme des Wassers und das mechanische Wärmeäquivalent 16, 593. — Die Energieisothermen des Wassers bei hohen Temperaturen 16, 907.

Dorn, E., Heliumröhren als Indikatoren für elektr. Wellen 16, 784.

Drude, P., Rationelle Konstruktion von Teslatransformatoren 16, 116.

E.

Einstein, A., Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt 17, 132. — Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen 17, 549. — Zur Elektrodynamik bewegter Körper 17, 891. — Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? 18, 639.

Einthoven, W., Über eine neue Methode z. Dämpfung oszillierender Galvanometerausschläge 16, 20.

Elmén, G. W., Über elektr. Doppelbrechung in Schwefelkohlenstoff bei niedrigem Potential 16, 350.

Ewers, P., Die Spitzenentladung in ein- u. zweiatomigen Gasen 17, 781.

F.

Feustel, R., Über Kapillaritätskonstanten und ihre Bestimmung nach der Methode des Maximaldruckes kleiner Blasen **16**, 61.

Forch, C., Die Oberflächenspannung von anorganischen Salzlösungen **17**, 744. — Das Molekularvolum des gelösten Naphtalins **17**, 1012. — Berichtigung zu der Arbeit: Die Oberflächenspannung von anorganischen Salzlösungen **18**, 867.

Frank, A., Versuche zur Ermittelung des Luftwiderstandes, dessen Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und der Gestalt der Körper **16**, 464.

Fredenhagen, C., Entwurf einer allgemeinen Theorie elektrolytischer Lösungskonstanten und Spannungsreihen, sowie der Löslichkeit u. Dissoziation von Säuren und Basen **17**, 285. — Über eine Theorie des elektrischen und dielektrischen Verhaltens der Leiter zweiter Klasse **17**, 332.

Fricke, W., Über Brechungsexponenten absorbierender Flüssigkeiten im ultravioletten Spektrum **16**, 865.

Friedel, J., Experimentelle Untersuchungen über lamellare Doppelbrechung **18**, 1031.

Fritsch, C., Das Bogenspektrum des Mangans **16**, 793.

Fürstenau, R., Über einige Entladungserscheinungen in evakuierten Röhren **17**, 775.

G.

Gans, R., Zur Elektrodynamik in bewegten Medien. Erste Mitteilung **16**, 516. — Zweite Mitteilung **18**, 172.

Gans, R. u. **Weber**, R. H., Zur Frage: Was bleibt in einem permanenten Magneten konstant? **16**, 172.

Gehrcke, E., Über eine Interferenzerscheinung am Stufengitter **18**, 1074.

Gildemeister, M. u. **Strehl**, H., Über den Geschwindigkeits- und Energieverlust von Geschossen in Wasser **18**, 567.

Gildemeiscr, M. u. **Weiss**, O., Über einen zuverlässigen Platinschließkontakt **17**, 174.

Glage, G., F. E. Neumanns Methode zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit gut leitender Körper in Stab- und Ringform und ihre Durchführung an Eisen, Stahl, Kupfer, Silber, Blei, Zinn, Zink, Messing, Neusilber **18**, 904.

Goldhammer, D. A., Die Farbenempfindlichkeit des Auges und die photometrische Helligkeit der leuchtenden Körper **16**, 621.

Gorton, F. R., vgl. **Warburg**.

Greinacher, H., Über die Ursache des Voltaeffekts **16**, 708. — Über eine an dünnen halbleitenden Schichten beobachtete Erscheinung **18**, 1020.

Greinacher, H. u. **Herrmann**, K., Über eine an dünnen Isolatorschichten beobachtete Erscheinung **17**, 922.

Grünberg, V., Farbengleichung mit Zuhilfenahme der drei Grundempfindungen im Young-Helmholtzschen Farbensystem **17**, 165.

Gullstrand, A., Über Astigmatismus, Koma u. Aberration **18**, 941.

Gumlich, E., Versuche mit Heuslerschen Mangan—Aluminium-Kupfer-Legierungen **16**, 535.

H.

Hack, F., Das elektromagnetische Feld in der Umgebung eines gedämpft schwingenden linearen Oszillators **18**, 634.

Haentzschel, E., Über die Berechnung der Konstanten *a* und *b* der van der Waalsschen Gleichung aus den kritischen Werten **16**, 565.

Hahn, K., Die ladende Wirkung der Röntgenstrahlen **18**, 140.

Hartmann, B., Untersuchung über die Leistungsfahigkeit der Assmannschen Methode zur experimentellen Bestimmung des Verhältnisses $c_p/c_v = \varkappa$ der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen von Gasen **18**, 252.

Hasenöhrl, F., Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern. Berichtigung **16**, 589.

Hausrath, H., Eine allgemein verwendbare Differentialmethode zur Messung kleiner Widerstände 16, 134. — Die Messung kleiner Temperaturdifferenzen mit Thermoelementen und ein Kompensationsapparat mit konstantem kleinen Kompensationswiderstand bei konstant bleibendem Hilfsstrom 17, 735; vgl. Nernst.
Hensen, V., Über die Umwandlung periodischer Massenanhäufungen in akust. wirksame Bewegungen 16, 838.
Hermann, H., Messung der Wellenlängen roter Linien in einigen Bogenspektren 16, 684.
Hermann, L., Über die Effekte gewisser Kombinationen von Kapazitäten und Selbstinduktionen 17, 501. — Zusatz zu der Abhandlung: „Über die Effekte gewisser Kombinationen von Kapazitäten und Selbstinduktionen" 17, 779.
Herrmann, K., vgl. Greinacher.
Heydweiller, A., Über die dielektrische Festigkeit leitender Flüssigkeiten (nach Versuchen von P. Leppelmann mitgeteilt) 17, 346.
Himstedt, F., u. Meyer, G., Über die Bildung von Helium aus der Radiumemanation 17, 1005.
Henning, F., vgl. Holborn.
Holborn, L. u. Henning, F., Über die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes 18, 739.
Holtz, W., Der negative Büschel mit Stiel und Zweigen in freier Luft 17, 353. — Die wahre Bedeutung der Flügel am Reibzeug der Elektrisiermaschine und ihr Ersatz 18, 1054. — Die Trichterventilröhre beim Wechsel von Druck und Funkenart 18, 1057.
Holtz, A. L., Über Flüssigkeitsbewegungen, welche durch Rotation fester Körper verursacht werden 18, 387.
Hulshof, H., Erwiderung der Bemerkung von G. Bakker 16, 188.

J.

Jäger, G., Zur Theorie d. Maxwell-Boltzmannschen Gesetzes 16, 46.
Jensen, Chr. u. Sieveking, H., Die Verwendung von Mikrophonkontakten für telegraphische Relais und zum Nachweis schwacher Ströme 18, 695.
v. Ignatowsky, W., Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht 18, 495. — Berichtigung zu der Arbeit: „Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht" 18, 1078.
Julius, W. H., Bemerkungen über erschütterungsfreie Aufstellung 18, 206.

K.

Kaempf, F., Größe und Ursache der Doppelbrechung in Kundtschen Spiegeln und Erzeugung von Doppelbrechung in Metallspiegeln durch Zug 16, 308.
Kahlbaum, G. W. A., Notiz über die verzerrten Bilder, welche durch Radiumbromid auf der photographischen Platte hervorgerufen werden 17, 1009.
Kalähne, A., Elektrische Schwingungen in ringförmigen Metallröhren (Theoretisch) 18, 92. — Über die Strahlung des Chininsulfates 18, 450.
Kapzov, N., Über die Druckkräfte der Wellen, welche sich auf einer Flüssigkeitsoberfläche ausbreiten 17, 64.
King, A. S., Über Emissionsspektra v. Metallen im elektr. Ofen 16, 360.
Klüpfel, K., Untersuchung d. Überganges elektr. Ströme zwischen Flüssigkeiten und Gasen 16, 574.
Koch, J., Bestimmung d. Brechungsindizes d. Wasserstoffs, d. Kohlensäure und des Sauerstoffs im Ultrarot 17, 658.
Krigar-Menzel, O., vgl. Rubens.
Kučera, G., Eine Bemerkung zur Arbeit des Hrn. R. Feustel: „Über Kapillaritätskonstanten etc." 16, 789. — Über die von den sekund. β- und γ-Strahlen des Radiums in verschiedenen Gasen hervorgebrachte Ionisation 18, 974.
Kuenen, J. P., Über die Berechnung der Konstanten a und b der van der Waalsschen Gleichung aus den kritischen Werten 17, 189.

L.

Laemmel, R., Notizen über d. Atomwärme fester Elemente 16, 551.

Laue, M., Die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien 18, 528.
Lehmann, O., Flüssige Misch- und Schichtkristalle 16, 160. — Die Gleichgewichtsform fester und flüssiger Kristalle 17, 728. — Näherungsweise Bestimmung d. Doppelbrechung fester und flüssiger Kristalle 18, 796. — Drehung der Polarisationsebene und der Absorptionsrichtung bei flüssigen Kristallen 18, 808.
Leithäuser, G. E., Bemerkung zu der Arbeit des Hrn. Becker: „Messungen an Kathodenstrahlen" 18, 410.
Lenard, P., Über d. Lichtemissionen der Alkalimetalldämpfe und Salze, und über die Zentren dieser Emissionen 17, 197.
Lilienfeld, J. E., Über eine allgemeine u. hervorragend empfindliche Methode zur spektralen qualitativen Elementaranalyse v. Gasgemischen 16, 931.
Lohberg, P., Selbstgegenfritter (Autoantikohärer) 18, 850.
Lotze, A., Untersuchung eines von Breithaupt u. Sohn im Jahre 1903 gebauten Kathetometers 16, 584.

M.

Madelung, E., Über Magnetisierung durch schnellverlaufende Ströme u. die Wirkungsweise des Rutherford-Marconischen Magnetdetektors 17, 861.
Malmström, R., Versuch einer Theorie der elektrolytischen Dissoziation unter Berücksichtigung der elektrischen Energie 18, 413.
Matthies, W., Über die Glimmentladung in den Dämpfen der Quecksilberhaloidverbindungen $HgCl_2$, $HgBr_2$, HgJ_2 17, 675. — Über die Glimmentladung in d. Halogenen Chlor, Brom, Jod 18, 473.
Melander, G., Über eine violette und ultraviolette Strahlung der Metalle bei gewöhnlichen Temperaturen 17, 705.
Merckens, W., Über strahlenartige Einwirkungen auf die photograph. Bromsilbergelatine 16, 667.
Meyer, G., vgl. **Himstedt**.
Meyer-Wildermann, Über die wahren und scheinbaren Gefriertemperaturen und die Gefriermethoden. (Antwort an Hrn. Hausrath) 16, 410.

N.

Nell, P., Studien über die Diffusionsvorgänge wässeriger Lösungen in Gelatine 18, 323.
Nernst, W. u. **Hausrath**, H., Zur Bestimmung der Gefrierpunkte verdünnter Lösungen (Antwort an Hrn. Meyer-Wildermann 17, 1018.

O.

Olszewski, K., Ein Beitrag zur Bestimmung des krit. Punktes des Wasserstoffs 17, 986. — Weitere Versuche, das Helium zu verflüssigen 17, 994.
Otsuki, C., vgl. **Precht**.

P.

Panayeff, J. v., Über d. Beziehung des Schmelzpunktes zur Wärmeausdehnung der Metalle 18, 210.
Petri, J., Einige neue Erscheinungen, welche durch Radiumbromid auf der photographischen Platte veranlaßt werden 16, 951.
Pohl, R., Über das Leuchten bei Ionisation von Gasen. Zur Deutung der Versuche des Hrn. B. Walter 17, 375; vgl. **Walter**.
Pozděna, R. F., Versuche über Blondlots „Émission pesante" 17, 104.
Precht, J. u. **Otsuki**, C., Strahlungsähnliche Erscheinungen bei Wasserstoffsuperoxyd 16, 890.
Prytz, K., Mikroskopische Bestimmung der Lage einer spiegelnden Fläche. Optischer Kontakt 16, 735. — Poröse Körper als Durchwege für Gase. Poröser Kontakt 18, 617.

Q.

Quincke, G., Über Eisbildung u. Gletscherkorn 18, 1.

R.

Rausch von Traubenberg, H. Frhr., Über den Halleffekt des Wismuts bei hohen Temperaturen 17, 78.
Reiger, R., Lichtelektrische Zerstreuung an Isolatoren bei Atmo-

spärendruck 17, 935. — Über das Verhältnis ε/μ bei Kathodenstrahlen verschied. Ursprunges 17, 947.
Reinganum, M., Bemerkung zur Elektrooptik der Metalle 16, 958. — Berichtigung 17, 196. — Über Energie und spezifische Wärme in der Nähe der kritischen Temperatur 18, 1008.
Rempp, G., Die Dämpfung von Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke 17, 627.
Retschinsky, T., Über die Wiedervereinigung der Ionen in Luft 17, 518; vgl. Stark.
Riecke, E., Untersuchungen über Entladungserscheinungen in Geisslerschen Röhren 16, 282.
Rotarski, Th. u. Zemčužnyj, S. F., Pyrometrische Untersuchung einiger „flüssiger" Kristalle 17, 185.
Rubens, H., und Krigar-Menzel, O., Flammenröhre für akustische Beobachtungen 17, 149.
Rubens, H., Über das Emissionsspektrum d. Auerbrenners 18, 725.
Rudzki, M. P., Bemerkung zur Abhandlung von Hrn. Denizot unter dem Titel: „Zur Theorie der relativen Bewegung u. des Foucaultschen Pendelversuches" 18, 1070.

S.

Sachs, J. S., Untersuchungen über den Einfluß der Erde bei der drahtlosen Telegraphie 18, 348.
Schaefer, Cl., Über das ultrarote Absorptionsspektrum der Kohlensäure in seiner Abhängigkeit vom Druck 16, 93. — Über die selektiven Eigenschaften von Resonatorengittern 16, 106.
Schaefer, K. L., Über die Erzeugung physikalischer Kombinationstöne mittels des Stentortelephons 17, 572.
Schaposchnikoff, A., vgl. Stark.
Schmaltz, G., Über den Einfluß der Magnetisierung auf die thermische Leitfähigkeit des Nickels 16, 398. — Berichtigung 16, 792.
Schmauss, A., Über den Vorgang der Abscheidung eines Kolloides im elektrischen Strome 18, 628.
Schmidt, A., Werte der erdmagnetischen Elemente zu Potsdam für das Jahr 1904 17, 378.
Schmidt, G. C., Über Polarisationserscheinungen in Vakuumröhren 18, 869.
Schmidt, R., vgl. Valentiner.
Scholl, H., Photoelektrische Erscheinungen am feuchten Jodsilber I. Teil 16, 193; II. Teil 16, 417.
Schuhknecht, P., Untersuchungen über ultraviolette Fluoreszenz durch Röntgen- und Kathodenstrahlen 17, 717.
Schwalbe, G., Über die beim Benetzen pulverförmiger Körper, insbes. von Sand, mit Wasser auftretende Wärmetönung, sowie Untersuchungen über das Verhalten von Wasser unter 4° bei diesem Vorgange 16, 32.
Seitz, W., Die Wirkung eines unendlich langen Metallzylinders auf Hertzsche Wellen 16, 746.
Sieveking, S., vgl. Hensen.
Stark, J., Über zwei Linienspektra des Quecksilbers 16, 490.
Stark, J., Retschinsky, T. und Schaposchnikoff, A., Untersuchungen über den Lichtbogen 18, 213.
Stöckert, O., Einige Bemerkungen zur Arbeit des Hrn. W. Merckens: „Über strahlenart. Einwirkungen auf die photographische Bromsilbergelatine" 17, 192.
Strasser, B., Über die Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten von Solenoiden 17, 762.
Strehl, H., vgl. Gildemeister.
Streintz, F. und Strohschneider, O., Versuche über Metallstrahlung 18, 198.
Strohschneider, O., vgl. Streintz.
Szarvassi, A., Über elektromotorische Kräfte und die reversibelen Wärmetönungen des elektrischen Stromkreises 17, 248.

T.

Tammann, G., Über das Haften von heißem Holzkohlepulver an kalten Körpern 18, 856.
Thöldte, R., Der Einfluß der Ionisation auf die Leitungsfähigkeit des Kohärers 17, 694. — Die Bestimmung der galvanischen Polarisation während des Schlusses des Stromes 18, 1061.

Toepler, M., Beobachtungen im Grenzgebiete zwischen Spitzenstrom und Büschellichtbogen (Glimmstrom) 18, 757.

V.

Valentiner, S., u. Schmidt, R., Über eine neue Methode der Darstellung von Neon, Krypton und Xenon 18, 187.
Voege, W., Ein Beitrag zur Kenntnis der Funkenentladung in Gasen 18, 606.
Voigt, W., Theoretisches und Experimentelles zur Aufklärung des optischen Verhaltens aktiver Kristalle 18, 645.

W.

Walter, B, Über eine von den Strahlen des Radiotellurs in der atmosphärischen Luft erzeugte neue Strahlung 17, 367. — Über das Röntgensche Absorptionsgesetz und seine Erklärung 17, 561. — Über einen neuen Kitt für physikalische Apparate 18, 860. — Über das Nachleuchten der Luft bei Blitzschlägen 18, 863.
Walter, B., u. Pohl, R., Über das Eigenlicht des Radiumbromids 18, 406.
Warburg, E., Über die Ozonisierung des Sauerstoffs und der atmosphärischen Luft durch die Entladung aus metallischen Spitzen 17, 1. — Über die Reflexion der Kathodenstrahlen an dünnen Metallblättchen. Nach Versuchen von S. Williams mitgeteilt 17, 977. — Über die Wirkung der Bestrahlung, den Einfluß der Temperatur und das Verhalten der Hologene bei der Spitzenentladung: nach Versuchen von F. R. Gorton mitgeteilt 18, 128.
Weber, C. L., Zu der Mitteilung von v. Panayeff: Über die Beziehung des Schmelzpunktes zur Wärmeausdehnung der Metalle 18, 868.
Weber, R. H., Experimentaluntersuchungen zur Frage: Was bleibt in einem permanenten Magneten konstant? 16, 178. — Permeabilitätsmessung an Stahlkugeln 18, 395; vgl. Gans.
Weidert, Fr., Über den Einfluß der Belichtung auf die thermoelektrische Kraft des Selens 18, 811.
Weinberg, B., Über die innere Reibung des Eises 18, 81.
Weiss, O., vgl. Gildemeister.
v. Wesendonk, K., Zur Thermodynamik 16, 558.
Wien, M., Über Telephonplatten mit hohen Eigentönen 18, 1049. — Bemerkung zu der Abhandlung von Hrn. E. Madelung: „Über Magnetisierung durch schnell verlaufende Ströme u. die Wirkungsweise d. Rutherford-Marconischen „Magnetdetektors" 18, 1077.
Wien, W., Über die Energie der Kathodenstrahlen im Verhältnis zur Energie der Röntgen- und Sekundärstrahlen 18, 991.
Wiersch, E., Über die Deutlichkeit akust. Reproduktionen unter dem Einfluß der Eigentöne, sowie über Membranen zur möglichst deutl. Wiedergabe der Sprache 17, 999.
Williams, S., vgl. Warburg.
Winkelmann, A., Zu der Abhandlung des Hrn. G. N. St. Schmidt: „Über den Einfluß der Temperatur und des Druckes auf die Absorption und Diffusion des Wasserstoffs durch Palladium" 16, 773. — Über die Diffusion naszierenden Wasserstoffs durch Eisen 17, 589.
Wommelsdorf, H., Vereinfachtes Verfahren zur Herstellung vielpoliger Kondensatormaschinen, eine Methode zur Berechnung derselb., sowie eine Hochfrequenzkondensatormaschine 16, 334.
Wörmann, A., Die Neutralisationswärme starker Säuren und Basen und ihre Änderung mit Temperatur und Konzentration 18, 775.
Wulff, G., Zur Geometrie der Doppelbrechung 18, 579.

Z.

Zahn, H., Über die transversalen galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte in verschiedenen Metallen 16, 148.
Zemčužnyj, S. F., vgl. Rotarski.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

$CaCl_2$ $MgCl_2$ Na_2SO_4 $Al_2(SO_4)_3$

Fig. 224 *b*.
Eisblöcke aus heißem dest. Wasser mit Spuren von $CaCl_2$, $MgCl_2$, Na_2SO_4, $Al_2(SO_4)_3$ in nahezu äquivalenten Mengen im Messingtrog gefroren.



Fig. 226 *b*.
Seitenansicht von Eis aus Leitungswasser, langsam gefroren im Messingtrog.

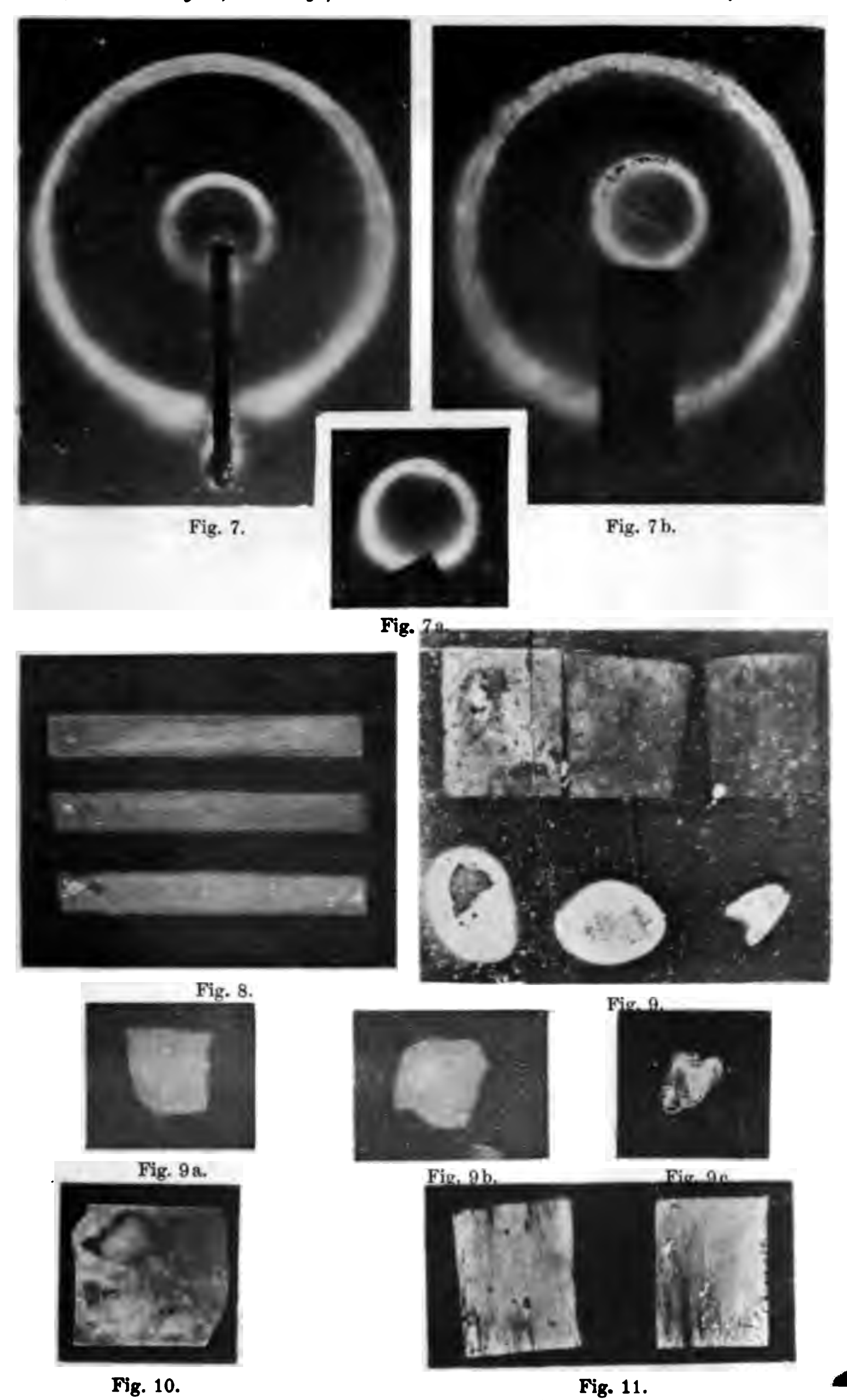


Fig. 7. Fig. 7a. Fig. 7b.

Fig. 8. Fig. 9.

Fig. 9a. Fig. 9b. Fig. 9c.

Fig. 10. Fig. 11.

F. Streintz und O. Strohschneider.



e

15,u

f

10,u

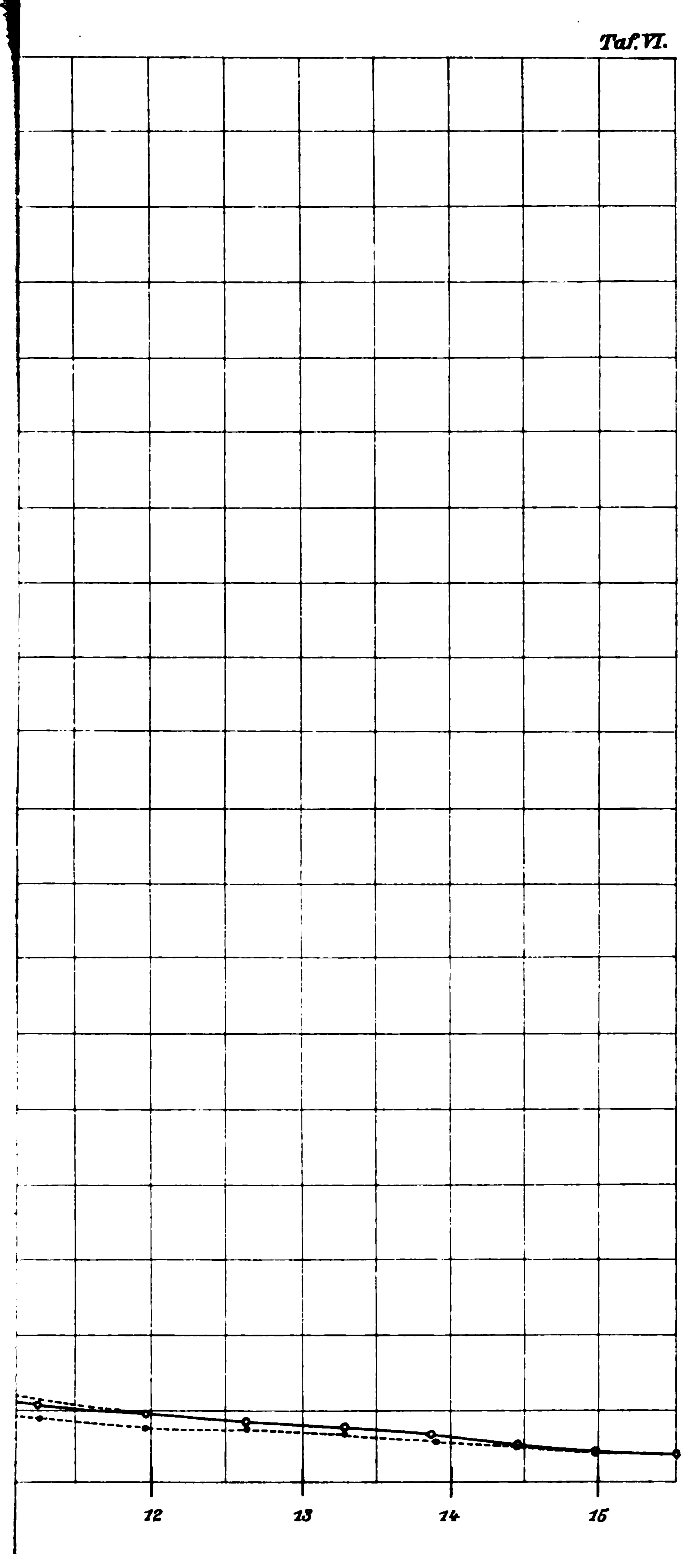
20,u

12

13

14

15


12
13
14
15



Taf. VI.

12

13

14

15



Fig. 1.



Fig. 2.

B. Walter.

A. Gullstrand.



Fig. 2.

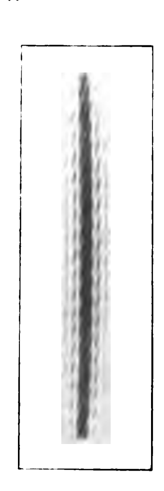


Fig. 3.

E. Gehrcke.



Interferenzspektroskop n. Lummer-Gehrcke, geliefert an die Physikal.-techn. Reichsanstalt.

Neue optische Spezialinstrumente

empfehlen

Franz Schmidt & Haensch, Berlin S. 42,

Prinzessinnenstraße 16.

Preislisten kostenlos.

STRASSER & ROHDE,

Glashütte i. S.

Werkstätten f. Präzisionsuhrmacherei und Feinmechanik. Gegründet 1875.

Weltausstellung Paris 1900 Goldene Medaille. Deutsche Städteausstellung Dresden 1903 I. Preis.

Spezialität: **Präzisionspendeluhren.**



Ausführung von **Uhrwerken u. Apparaten** für wissenschaftliche und technische Zwecke. Mikrometertaster $^1/_{100}$—$^1/_{500}$ mm direkt. Ables.

Verlag von **Joh. Ambr. Barth** in **Leipzig.**

MACK, Prof. Dr. **KARL, Physikalische Hypothesen und ihre Wandlungen.** Akademische Festrede, gehalten am 19. Nov. 1904 anläßlich der Feier des 86. Stiftungsfestes der K. W. Landwirtschaftl. Hochschule Hohenheim. Mit Anmerkungen und Literaturnachweisen. [40 S.] 1905.

Kart. Mk. 1.—



Grand Prix: Paris 1900, St. Louis 1904

Illustrirte Preislisten gratis.

Präcisions-Reisszeuge

Astronomische Uhren, Compensationspendel.

Clemens Riefler

Fabrik mathemat. Instrumente

Nesselwang u. München.

Gegründet 1841.

Dr. Steeg & Reuter,

Optisches Institut,

Homburg v. d. Höhe.

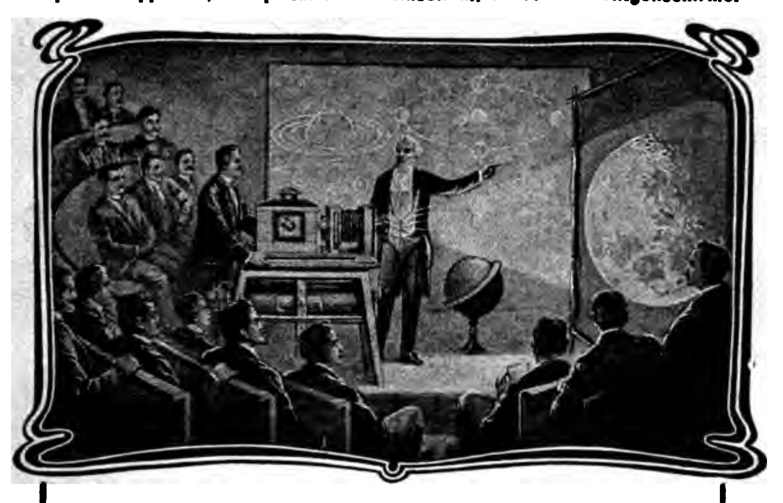
Specialität:

Apparate und Präparate zur Polarisation, Interferenz, Beugung, Fluorescenz, Phosphorescenz des Lichts.

Orientirte Schliffe von Mineralien und künstl. Krystallen.

Präparate aus Kalkspath, Quarz, Steinsalz, Gyps und Glimmer.

Spectral-Apparate, Glasprismen und Linsen aller Art. — Röntgenschirme.



Unger & Hoffmann, Aktien-Gesellschaft.

Gegründet 1878 **DRESDEN-A. 16** Gegründet 1878

Projektionsapparate

für wissenschaftliche Zwecke, für Schulen, Lehranstalten, öffentl. Vorträge.

Sämtl. Gebrauchsartikel für Projektion.

Alle Lichtquellen. Laterndiapositive in reichster Auswahl.

Preislisten und fachmännische Auskunft jederzeit zu Diensten.

E. DUCRETET

PARIS — 75, rue Claude-Bernard — PARIS.

Grands-Prix Expositions Universelles: Paris 1889 — Anvers 1894, Bruxelles 1897 — Paris 1900, St. Louis 1904 — Liège 1905

Cabinets de physique complets.

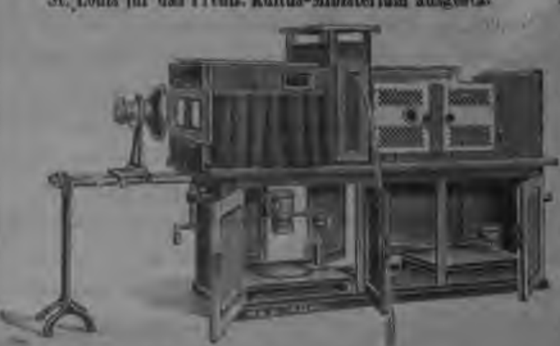
Appareils de Mesures électriques.

Télégraphie sans fil Popoff-Ducretet garantie pour les grandes distances. **Téléphone haut-parleur R. Gaillard**, type 1905, R. G. et E. D. Matériels complets Rayons X Röntgen, et courants de haute fréquence.

Photothéodolites de M. le Colonel Laussedat.

Catalogue Général, 5e édition, Physique générale, 3 frc.





MAX KOHL, Chemnitz i. S.



Arbeits-(Praktikanten-) Tische

in allen möglichen Ausführungen,

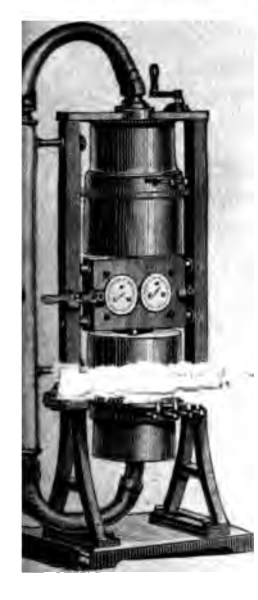
ganz den jeweiligen örtlichen Verhältnissen angepaßt.



Experimentier-Schalttafeln

ehranstalten und Laboratorien, als Wandtableau und in fahrbarer Tische ausgeführt, gestatten die Verwendung itromes städtischer Centralen bis 110, 160, 220 Volt und der 30 Amp. für alle im Experimentalunterricht vorkommende Arbeiten. Die Schalttafeln sind für kleine und grofse Stromstärken bei beliebigen Spannungen von 0,3 bis 110 resp. 220 Volt zu als wie eingestellt, treten au auf. — Es ist damit also ein dürfnis abgeholfen.

Man verlange Spezial-Prospekt:



D. D. Thermoskope nach Kolbe

in neuester verbesserter Ausführung.

Doppelsirene nach Helmholtz

mit Zählwerk, verbesserter Ein- und Ausschaltung, elektrischem Kontakt für das elektrische Pendel, Luftverteilungsrohr und Zugfesthaltung.

Doppelt wirkende rotierende Öl-Luftpumpen (D. R. P.).

Auspumpen von grossen Gefässen, auch für Chemiker vorzüglich geeignet, für Hand- oder Motorbetrieb eingerichtet.

Neu! Spinthariskope Neu!

mit Phosphoreszenzschirm und einer kleinen Menge Radiumbromid auf beweglichem Zeiger, um die aufserordentlichen radioaktiven Eigenschaften des Radiums zu zeigen.

Preis M. 12.— u. 28.—.

Radiumbromid

von überraschender Wirkung; chemisch rein.

Preis auf Anfrage.

Weltausstellung Lüttich 1905: 2 Grands Prix!

.ausstellung St. Louis 1904: Grand Prix und Gold. Medaille,

..en in der Sonderausstellung des Kgl. Preuss. Unterrichtsministeriums in Berlin für die im ..ge der Regierung ausgestellte Einrichtung eines physikalischen Hörsaales u.s.w. in der deutschen Unterrichtsausstellung, Abteilung: wissenschaftliche Instrumente.

Ehrendiplom der Ausstellung der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Düsseldorf 1898. Goldene Medaillen Leipzig 1897, Weltausstellung Paris 1900, Aussig 1903, Athen 1904.

..en mit ausführlichen Kostenanschlägen, Beschreibungen, Referenzen usw. gratis und franko.

